担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

ベクトル空間と基底

実施日：October 18, 2017

ベクトル空間

前回は、3 つの実数の並びをベクトルと呼んだ。一般には、定数倍と足し算ができるものをベクトルと呼ぶ。ベクトルの集まりがベクトル空間である。

定義 1. 集合 V の勝手な要素 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in V$ および勝手な実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して

- $a\boldsymbol{x} \in V$　　(定数倍)
- $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in V$　　(足し算)

が定まるとき、V をベクトル空間と呼ぶ。

厳密には、さらに以下の条件を満たしていなければならない。

(1) $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}+(\boldsymbol{y}+\boldsymbol{z})$ が成り立つ。

(2) 零ベクトル $\mathbf{0} \in V$ が存在し、勝手な $\boldsymbol{x} \in V$ に対し $\boldsymbol{x}+\mathbf{0} = \mathbf{0}+\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ が成り立つ。

(3) 勝手な $\boldsymbol{x} \in V$ に対し逆ベクトル $-\boldsymbol{x} \in V$ が存在し、$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x}) = (-\boldsymbol{x})+\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ が成り立つ。

(4) $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}+\boldsymbol{x}$ が成り立つ。

(5) $(a+b)\boldsymbol{x} = a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{x}$ が成り立つ。

(6) $a(b\boldsymbol{x}) = (ab)\boldsymbol{x}$ が成り立つ。

(7) $1\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$ が成り立つ。

(8) $a(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = a\boldsymbol{x}+a\boldsymbol{y}$ が成り立つ。

要は、我々が「定数倍」や「足し算」の計算を行う際に、満たしていてほしい性質がちゃんと成り立っているということである。上の定義より、$a\boldsymbol{x}+b\boldsymbol{y}$ という形の要素は全て同じベクトル空間 V に入っている。このようなベクトルを $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の一次結合と呼ぶ。

問題 1. 上の条件から、実は $0\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ や $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$ が導かれることを示せ。

むしろ大切なのは、具体的なベクトル空間の例をたくさん知ることである。まず、前回扱った $\mathbb{R}^3$ がベクトル空間であることを確かめよう。

例 1. n を自然数とし、n 個の実数の並びをすべて集めたものを $\mathbb{R}^n$ と書く。定数倍と足し算を

$$a\boldsymbol{x} = a\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1+y_1 \\ \vdots \\ x_n+y_n \end{pmatrix}$$

と定めると、$\mathbb{R}^n$ はベクトル空間になっている。
零ベクトルと逆ベクトルはそれぞれ

$$\boldsymbol{0} := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad -\boldsymbol{x} := \begin{pmatrix} -x_1 \\ \vdots \\ -x_n \end{pmatrix}$$

で与えられる。

多項式の集合もベクトル空間の基本的な例である。

例 2. 1 変数の (実数係数) 多項式をすべて集めたものを

$$\mathbb{R}[x] := \left\{ a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0 \in \mathbb{R} \right\}$$

と書く。定数倍と足し算を

$$\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) + \left(\sum_{k=0}^{n} b_k x^k\right) := \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) x^k,$$

$$c\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k\right) := \sum_{k=0}^{n} (c a_k) x^k$$

と定めると、$\mathbb{R}[x]$ はベクトル空間になる。零元はこの場合定数 0 と同じものであり、逆元は多項式のマイナス倍である。

問題 2. (提出問題) 以下についてはベクトル空間の定義 1 を確かめよ。条件 (1)〜(8) はチェックしなくてもよい。

(1) 閉区間 $[0,1]$ 上定義された実数値連続関数の全体 $C([0,1];\mathbb{R})$ は

$$(af)(x) := a \cdot f(x), \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x)$$

についてベクトル空間であることを示せ。

(2) 三項間漸化式

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 1)$$

を満たす数列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の全体を考えると、これは

$$c\{a_n\}_{n=1}^{\infty} := \{ca_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \{a_n\}_{n=1}^{\infty} + \{b_n\}_{n=1}^{\infty} := \{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$$

についてベクトル空間であることを示せ。さらに、このベクトル空間の要素をすべて求めよ。

(3) $\omega > 0$ を定数とする。閉区間 $[0,1]$ 上定義された実数値関数 $f(x)$ で、微分方程式

$$\frac{d^2 f}{dx^2} + \omega^2 f \equiv 0$$

を満たすもの全体を考えると、これは (1) で定めた演算についてベクトル空間であることを示せ。さらに、このベクトル空間の要素をすべて求めよ。

部分ベクトル空間

定義 2. V をベクトル空間とする。空でない部分集合 $W \subseteq V$ が V の定数倍と足し算について閉じている、すなわち勝手な $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in W$ および勝手な実数 $a \in \mathbb{R}$ に対して

$$a\boldsymbol{x} \in W, \quad \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$$

となるとき、W を V の部分ベクトル空間と呼ぶ。

特に ($a = 0$ とすれば)W はいつでもゼロベクトル $\mathbf{0}$ を含む事に注意せよ。幾何学的なイメージとしては、$\mathbb{R}^3$ 内の原点を通る直線や平面を思い浮かべればよい。

問題 3.

(1) n を自然数とする。$\mathbb{R}^n$ の元で n 番目の成分がゼロであるようなもの全体は部分ベクトル空間であることを示せ。さらに、$n = 3$ のときこの部分ベクトル空間を図示せよ。

(2) n を自然数とする。$\mathbb{R}[x]$ の元で次数が高々 d であるようなもの全体を P_d と書く。P_d は $\mathbb{R}[x]$ の部分ベクトル空間であることを示せ。

(3) 問題 2(3) のベクトル空間は、同問題 (1) のベクトル空間の部分ベクトル空間であることを示せ。

例 3. V をベクトル空間とする。零ベクトルのみからなる集合 $\{\mathbf{0}\}$ は V の部分ベクトル空間である。また、V 自身も V の部分ベクトル空間である。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 4. 次の $\mathbb{R}^2$ の部分集合は部分ベクトル空間であるかどうか判定せよ。(部分ベクトル空間でないならその理由を述べよ。)

(1) $W_1 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y=0 \right\}$.

(2) $W_2 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; x+y=1 \right\}$.

(3) $W_3 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; xy=0 \right\}$.

(4) $W_4 := \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \mathbf{0} \right\}$ (ただし A は 2 次正方行列とする).

一次独立

赤・青・黄色といった基本的な色を用いて様々な色を合成できることは周知の通りだろう。例えば緑は青と黄色から作れるので、ここに緑を加えても無駄である。しかし、黄色は赤と青からだけでは作れない。赤・青・黄色の 3 色の選び方には無駄がないのである。ベクトル空間においても[1]このような考えが有用である。すなわち、いくつかの基本的なベクトルからスタートして、定数倍と足し算によって他の様々なベクトルを作ってしまおうというアイデアである。例えば、$\mathbb{R}[x]$ においては $1, x, x^2, x^3, \ldots$ が基本的なベクトルとして選べそうである。その際、ベクトルの選び方に「無駄がない」ことを保証するのが、一次独立性である。

定義 3. V をベクトル空間とする。ベクトルの組 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in V$ が一次独立であるとは、勝手な実数の組み合わせ $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ に対し

$$a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k = \mathbf{0} \quad \text{ならば} \quad a_1 = \cdots = a_k = 0$$

が常に成り立つときをいう。そうでない場合、一次従属であると言う。

問題 5.

(1) 多項式の成すベクトル空間 $\mathbb{R}[x]$ において、$x^2+x+1, x^2-x, x-1$ は一次独立であることを示せ。

(2) $\mathbb{R}^3$ のベクトル

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

が一次独立になる α の条件を求めよ.

[1]ベクトル空間においてこそ有用であると言った方が正しい。集合の要素を伸ばしたり繋げたりして別の要素を作るという枠組みを抽象化してできたものが、まさにベクトル空間なのだから。

問題 6. ベクトル $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_k \in V$ が一次独立であることと、勝手な $1 \le i \le k$ に対し

$$\boldsymbol{x}_i = a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_{i-1}\boldsymbol{x}_{i-1} + a_{i+1}\boldsymbol{x}_{i+1} \cdots + a_k\boldsymbol{x}_k$$

となる実数の組み合わせ $a_1, \ldots a_{i-1}, a_{i+1}, \ldots a_k \in \mathbb{R}$ が存在しないことは同値である。これを示せ。(ヒント：$k = 3$ で考えてみよ。)

定義 4. ベクトル空間 V の元の組 $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ が次の条件を満たす時、$\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ を V の基底と呼ぶ。

(1) 任意の $\boldsymbol{x} \in V$ に対して、$\boldsymbol{x} = a_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + a_n\boldsymbol{x}_n$ が成り立つような実数の組 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ が存在する。

(2) $\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ は 1 次独立 。

補足 1.

- (1) の条件が成り立つとき、$\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_n$ は V を生成する、もしくは V を張ると言う。
- 条件 (1) に加えてさらに条件 (2) が成立するとき、ベクトル空間のどんな要素も基底の一次結合として一意的に表すことができる。
- 1 つのベクトル空間には様々な基底が存在するが、実は基底を構成する要素の数 (定義の n) は基底の選び方に依らない。この n を V の次元と呼び, $n = \dim V$ と表す。ゼロベクトルだけからなるベクトル空間 $\{\mathbf{0}\}$ の次元はゼロと考える。
- 有限個の元からなる基底を持たないようなベクトル空間もある。例えば、$\mathbb{R}[x]$ の元 $1, x, x^2, x^3, \ldots$ には無駄がない。実際どの有限個を選んでも一次独立になっている。以下では基本的に有限個の基底が取れるようなベクトル空間だけを扱う。

例 4. $\mathbb{R}^n$ の単位ベクトル

$$\boldsymbol{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \boldsymbol{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \boldsymbol{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

は $\mathbb{R}^n$ の基底を与える。特に、$\mathbb{R}^n$ は n 次元ベクトル空間である。

例 5. 高々 d 次の多項式全体が成すベクトル空間を P_d とすると、

$$1, x, x^2, \ldots x^d$$

は P_d の基底を与える。特に、P_d は $d+1$ 次元ベクトル空間である。

問題 7. $d+1$ 個の多項式

$$1, (x-1), (x-1)^2, \ldots, (x-1)^d$$

は P_d の基底を成すことを示せ。

問題 8. V を有限次元ベクトル空間とする。

(1) W_1, W_2 を V の部分ベクトル空間とするとき、その共通部分

$$W_1 \cap W_2 := \left\{ v \in V \;\middle|\; v \in W_1 \text{ かつ } v \in W_2 \right\}$$

はまた V の部分ベクトル空間であることを示せ。

(2) W_1, W_2 を V の部分ベクトル空間とするとき

$$W_1 + W_2 := \left\{ v \in V \;\middle|\; \text{ある } w_1 \in W_1, w_2 \in W_2 \text{ があって、} v = w_1 + w_2 \right\}$$

はまた V の部分ベクトル空間であることを示せ。

(3) $W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}$ ならば

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2$$

であることを示せ。

問題 9. (提出問題)

(1) 高々 d 次の多項式からなるベクトル空間を P_d とする。

$$\int_0^1 f(x)dx = 0$$

となるような d 次多項式 $f(x)$ からなる集合を P'_d とおく。P'_d は V の部分ベクトル空間であることを示せ。

(2) 高々 d 次の多項式からなるベクトル空間を P_d とする。

$$\int_0^1 f(x)dx = 1$$

となるような d 次多項式 $f(x)$ からなる集合を P''_d とおく。P''_d は P_d の部分ベクトル空間ではないことを示せ。

(3) $d = 2$ のとき、

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = 1$$

を満たす多項式 f からなる P'_d の基底を 1 組求めよ。

担当教員：久本 智之　研究室：A343　E-mail:hisamoto@math.nagoya-u.ac.jp

問題 10. V を 2 次元ベクトル空間とし、基底 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ を取る。2 次正方行列

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

に対し、新しいベクトル $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in V$ を

$$(\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2) := (\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{u}_1 = a_{11}\boldsymbol{v}_1 + a_{21}\boldsymbol{v}_2 \\ \boldsymbol{u}_2 = a_{12}\boldsymbol{v}_1 + a_{22}\boldsymbol{v}_2 \end{cases}$$

により定める。このとき、$\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$ が V の基底になるための A の条件を求めよ。

問題 11. (提出問題) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3 \in \mathbb{R}^3$ とする。次の命題が正しければ証明し、誤りならば反例を挙げよ。

(1) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が一次独立ならば、$\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_2 - \boldsymbol{v}_3, \boldsymbol{v}_3 - \boldsymbol{v}_1$ も一次独立である。

(2) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ のうちどの 2 つを取っても一次独立ならば $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ も一次独立である。

(3) $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \boldsymbol{v}_3$ が一次独立ならば、任意の元 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$ に対して $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_2 + \boldsymbol{w}, \boldsymbol{v}_3 + \boldsymbol{w}$ も一次独立である。

次回は 10 月 25 日。2 変数関数の連続性と微分可能性について扱う。