

- 試験問題も回収します。学籍番号と名前を記入すること：学籍番号 _____ 名前 _____
- 追試が完了するまで、試験内容について（SNS 等を通じて）口外しないこと。
- 本試験の内容に関する投稿，書き込みをみたら報告してください。
- \mathbb{R}^n にはユークリッド距離から誘導される位相が入っているものとし， \mathbb{R}^n の部分集合には \mathbb{R}^n からの相対位相が入っているものとする。
- ベクトル空間は，体 \mathbb{R} 上，有限次元であるとする。

問題 1. $X := \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ (\mathbb{R}^2 から原点を除いた位相空間) とする。このとき， X の基本群 $\pi_1(X)$ から円周 $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ の基本群 $\pi_1(S^1)$ への同型写像を構成せよ。同型であることも示すこと。

問題 2. $D := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ ， $I := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2 \leq x \leq 3, y = 0\}$ とする。位相空間 $D \cup I$ を以下の同値関係 \sim で割った商位相空間を X とする。

$$p \sim q \Leftrightarrow p = q \text{ or } \{p, q\} = \{(0, 1), (2, 0)\} \text{ or } \{p, q\} = \{(0, -1), (3, 0)\} \quad (p, q \in D \cup I).$$

(2-1) X の単体分割 Δ を与え図示せよ。

(2-2) Δ のホモロジー群を計算せよ。

問題 3. U をベクトル空間， $\{e_i\}_{i=1, \dots, n}$ ， $\{f_i\}_{i=1, \dots, n}$ を U の基底とし， $\{e^i\}_{i=1, \dots, n}$ ， $\{f^i\}_{i=1, \dots, n}$ をそれぞれの双対基底とする。

(3-1) いま， f_i たちが A_j^i を (i, j) 要素とする正則行列 $A = (A_j^i)$ を用いて

$$f_j = \sum_{i=1}^n A_j^i e_i \quad (j = 1, 2, \dots, n)$$

と表されたとする。このとき， f^j を A と $\{e^i\}_{i=1, 2, \dots, n}$ を用いて表せ。

(3-2) $f^i(e_j) = e^j(f_i)$ は成り立つか？理由をつけて答えよ。

(3-3) Φ を $U \times U^*$ 上の双線形形式とする。このとき

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \Phi(e_i, f^j) e^i(f_j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \Phi(f_i, e^j) f^i(e_j)$$

が成り立つことを示せ。

問題 4. U, V をベクトル空間とする。 $\text{Hom}(U, V)$ を U から V への線形写像全体とする。

(4-1) $\text{Hom}(U, V)$ に以下のように和 $+$ とスカラー倍 \cdot を定義するとき $\text{Hom}(U, V)$ は，ベクトル空間となる。このことを確かめ， $\text{Hom}(U, V)$ の基底（の 1 つ）と次元を求めよ。

$$\begin{aligned} (\varphi + \phi)(u) &:= \varphi(u) + \phi(u) \quad (\varphi, \phi \in \text{Hom}(U, V), u \in U), \\ (\alpha \cdot \varphi)(u) &:= \alpha \cdot \varphi(u) \quad (\alpha \in \mathbb{R}, \varphi \in \text{Hom}(U, V), u \in U). \end{aligned}$$

ここで，右辺の和 $+$ とスカラー倍 \cdot は V におけるものである。

(4-2) $\text{Hom}(U, V)$ から $U^* \otimes V = \{U \times V^* \text{ 上の双線形形式}\}$ への「基底の取り方に異存しない」同型写像を構成せよ。同型であることも示すこと。

問題 5. 授業に対する感想，意見，要望を述べよ（減点することはありません）。