R4 幾何数理工学 中間試験 90 minutes in 8:30–10:15, 2022/11/25

- 試験問題も回収します．学籍番号と名前を記入すること：学籍番号 ＿＿＿＿＿ 名前 ＿＿＿＿＿＿
- 追試が完了するまで，試験内容について（SNS 等を通じても）口外しないこと．
- 本試験の内容に関する投稿，書き込みをみたら報告してください．
- $\mathbb{R}^n$ にはユークリッド距離から誘導される位相が入っているものとする．
- 区間 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ のコンパクト性と連結性は仮定してよい．

問題 1.

(1-1) 関数 $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ を

$$f(x,y) := x + y \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

と定義する．f は連続であることを示せ．

(1-2) X, Y を位相空間，$g : X \to \mathbb{R}$, $h : Y \to \mathbb{R}$ を連続関数とする．$g + h : X \times Y \to \mathbb{R}$ を

$$(g+h)(x,y) := g(x) + h(y) \quad (x \in X, y \in Y)$$

と定義する．$g + h$ は連続であることを示せ．

問題 2. $\mathbb{R}$ に新しい元 $\omega (\notin \mathbb{R})$ を追加した集合 $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\omega\}$ を考える．$\overline{\mathbb{R}}$ の部分集合族 $\overline{\mathcal{O}} \subseteq 2^{\overline{\mathbb{R}}}$ を以下のように定義する：

- $X \in \overline{\mathcal{O}} \Leftrightarrow X$ は $\mathbb{R}$ の開集合であるか，あるいは，$\mathbb{R}$ の開集合 Y とある $a \in \mathbb{R}$ に対して，$X = Y \cup \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} \cup \{\omega\}$ とかける．

(2-1) $\overline{\mathbb{R}}$ は $\overline{\mathcal{O}}$ を開集合族とする位相空間になることを示せ．以下の問題 (2-2), (2-3) はこの位相のもとで考える．

(2-2) $\overline{\mathbb{R}}$ の部分位相空間 $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \cup \{\omega\}$ を考える．$\overline{\mathbb{R}}_+$ はコンパクトか？理由をつけて答えよ．

(2-3) $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \to \overline{\mathbb{R}}_+$ を

$$f(x) := \begin{cases} \omega & \text{if } x = 0, \\ 1/x & \text{if } x > 0, \\ 0 & \text{if } x = \omega, \end{cases} \qquad (x \in \overline{\mathbb{R}}_+)$$

と定義する．f は連続か？理由をつけて答えよ．

問題 3. X を位相空間，Y を離散位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像とする．

(3-1) もし $f(x) \neq f(y)$ となる $x, y \in X$ が存在したら，X は連結ではないことを示せ．

(3-2) $x, y \in X$ を結ぶパスが存在するなら，$f(x) = f(y)$ となることを示せ．

問題 4. ハウスドルフ空間とは以下を満たす位相空間 X のことである：

- 任意の異なる 2 点 $x, y \in X$ について，$x \in U$, $y \in V$, $U \cap V = \emptyset$ となる開集合 U, V が存在する．

(4-1) 距離空間はハウスドルフ空間であることを示せ．

(4-2) ハウスドルフ空間のコンパクト集合は閉集合であることを示せ．