幾何数理工学：テンソル

計数工学科数理情報工学コース
平井広志
hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

授業のページ

http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~hirai/teaching

ここでやること：

- ベクトル空間 V を1つ固定
- そこから構成される V^*, $V \bigotimes V$, $V^* \bigotimes V \bigotimes V, \dots$

  などのテンソル空間の元の座標表示とVの基底変換の関係
- 言葉づかい（反変，共変），アインシュタインの記法
- 大事な空間：対称テンソル空間，交代テンソル空間

V: ベクトル空間，$\mathbb{R}$上，有限次元 n

$e_\kappa\ (\kappa = 1,2,\ldots,n)$: 基底（~ 座標系$\kappa$）

$$V \ni v = \sum_{\kappa=1,2,\ldots,n} v^\kappa e_\kappa \longmapsto \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

記法：

- 座標系κの下での座標表示$\begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}$を v^κ と略記する．
- κには，座標系の名前と$1,2,\ldots,n$をとるインデックスの2つの意味をもたせる．

例：別の座標系κ'の下での座標表示 $v^{\kappa'} = \begin{pmatrix} v^{1'} \\ \vdots \\ v^{n'} \end{pmatrix}$

変換則： $v \in V$, 座標系κ, κ':　$e_\kappa = \sum_{\kappa'=1',2',\ldots,n'} A_\kappa^{\kappa'} e_{\kappa'}$

$$\Longrightarrow \quad v^{\kappa'} = \sum_{\kappa=1,2,\ldots,n} A_\kappa^{\kappa'} v^\kappa = A_\kappa^{\kappa'} v^\kappa$$

（アインシュタインの記法）
同じインデックスが上と下にあるとき,
そのインデックスに関して和をとる

Def: 反変ベクトル

$\Leftrightarrow$ 上の変換則に従う「ベクトル」$\kappa \mapsto v^\kappa \in \mathbb{R}^n$

$V \cong$ 反変ベクトルの空間

$V \cong$ 反変ベクトルの空間

を真面目に説明すると

$$V \ni \quad v \longmapsto \{v^\kappa\}_\kappa \quad \subseteq \mathbb{R}^n$$

変換則(反変)を満たす

$$\{v^\kappa\}_\kappa \longmapsto v^\kappa e_\kappa \quad \in V$$

変換則(反変)を満たす

well-defined?

$$v^{\kappa'} e_{\kappa'} = A^{\kappa'}_{\kappa} v^\kappa e_{\kappa'} = v^\kappa e_\kappa$$

V^*: 双対空間 $:= \{ f: V \to \mathbb{R} \mid$ 線形 $\}$

e^κ : e_κの双対基底

$$e^i(e_j) = \delta^i_j \coloneqq \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$ （クロネッカーのデルタ）

座標表示

$$V^* \ni f = \sum_{\kappa=1,2,\ldots,n} f_\kappa e^\kappa = \begin{pmatrix} f_1 & \cdots & f_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

変換則：$f \in V^*$, 座標系κ, κ':

$A_{\kappa'}^{\kappa}$: $A_{\kappa}^{\kappa'}$の逆行列

$$e_{\kappa'} = A_{\kappa'}^{\kappa} e_{\kappa}$$

$$A_{\kappa'}^{i} A_{j}^{\kappa'} = \delta_{j}^{i}$$

$$\Longrightarrow f_{\kappa'} = A_{\kappa'}^{\kappa} f_{\kappa}$$

$$\because f_{\kappa'} = f(e_{\kappa'}) = f\left(A_{\kappa'}^{\kappa} e_{\kappa}\right) = A_{\kappa'}^{\kappa} f(e_{\kappa}) = A_{\kappa'}^{\kappa} f_{\kappa}$$

Def: 共変ベクトル

$\Leftrightarrow$ 上の変換則に従う「ベクトル」$\kappa \mapsto f_{\kappa} \in \mathbb{R}^n$

$V^* \cong$ 共変ベクトルの空間

$$\because f_{\kappa'} e^{\kappa'} = A_{\kappa'}^{\kappa} f_{\kappa} e^{\kappa'} = f_{\kappa} e^{\kappa}$$

Def: スカラー

1 次元量 $\kappa \mapsto s(\kappa) \in \mathbb{R}$

$\forall \kappa, \kappa': s(\kappa) = s(\kappa')$

いかなる座標系からみても同じ値をとるもの

Ex: 反変ベクトル v^κ，共変ベクトル f_κ

$\Longrightarrow f_\kappa v^\kappa$はスカラー

$$\because f_{\kappa'} v^{\kappa'} = f_{\kappa'} A^{\kappa'}_{\kappa} v^\kappa = f_\kappa v^\kappa$$

$V \otimes V \otimes \cdots \otimes V$: p階反変テンソル空間

基底: $e_{\kappa_1} \otimes e_{\kappa_2} \otimes \cdots \otimes e_{\kappa_p}$ $\left(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_p \ \in \{1,2,\dots,n\}\right)$

e_κ: Vの基底

$$
\begin{array}{l}
V \otimes V \otimes \cdots \otimes V \\
\qquad \Cup \\
\qquad T = \displaystyle\sum_{\kappa_1,\kappa_2,\dots,\kappa_p} T^{\kappa_1\kappa_2\dots\kappa_p}\, e_{\kappa_1} \otimes e_{\kappa_2} \otimes \cdots \otimes e_{\kappa_p}
\end{array}
$$

座標系κによる座標表示:

$$T^{\kappa_1\kappa_2\dots\kappa_p} \in \mathbb{R}^{n\times n\times\cdots\times n}$$

変換則： $T \in \bigotimes_{j=1}^{p} V$, 座標系$\kappa, \kappa'$:

$$e_\kappa = A_\kappa^{\kappa'} e_{\kappa'}$$

$$\Longrightarrow \; T^{\kappa_1' \kappa_2' \dots \kappa_p'} = A_{\kappa_1}^{\kappa_1'} A_{\kappa_2}^{\kappa_2'} \cdots A_{\kappa_p}^{\kappa_p'} T^{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_p}$$

$$\because T = T^{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_p} e_{\kappa_1} \otimes e_{\kappa_2} \otimes \cdots \otimes e_{\kappa_p}$$

$$= T^{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_p} A_{\kappa_1}^{\kappa_1'} e_{\kappa_1'} \otimes A_{\kappa_2}^{\kappa_2'} e_{\kappa_2'} \otimes \cdots \otimes A_{\kappa_p}^{\kappa_p'} e_{\kappa_{p'}}$$

$$= A_{\kappa_1}^{\kappa_1'} A_{\kappa_2}^{\kappa_2'} \cdots A_{\kappa_p}^{\kappa_p'} T^{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_p} e_{\kappa_1'} \otimes e_{\kappa_2'} \otimes \cdots \otimes e_{\kappa_p'}$$

反変テンソル ＝ 変換則 (反変)を満たす $\{ T^{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_p} \}_\kappa$

$V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$: q階共変テンソル空間

基底: $e^{\kappa_1} \otimes e^{\kappa_2} \otimes \cdots \otimes e^{\kappa_q}$ $\left(\kappa_1, \kappa_2, \dots, \kappa_q \ \in \{1,2,\dots,n\}\right)$

e^{κ}: Vの双対基底

$$V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$$
$$\Cup$$
$$T = T_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_q}\, e^{\kappa_1} \otimes e^{\kappa_2} \otimes \cdots \otimes e^{\kappa_q}$$

座標系$\boldsymbol{\kappa}$による座標表示:

$$T_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_q} \in \mathbb{R}^{n \times n \times \cdots \times n}$$

変換則：$T \in \bigotimes_{j=1}^{p} V^*$, 座標系$\kappa, \kappa'$: $e_{\kappa'} = A_{\kappa'}^{\kappa} e_{\kappa}$

$$T_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_p'} = A_{\kappa_1'}^{\kappa_1} A_{\kappa_2'}^{\kappa_2} \cdots A_{\kappa_p'}^{\kappa_p} T_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_p}$$

$$T_{\kappa_1'\kappa_2'\ldots\kappa_p'} = T(e_{\kappa_1'}, e_{\kappa_2'}, \ldots, e_{\kappa_p'})$$

$$= T(A_{\kappa_1'}^{\kappa_1} e_{\kappa_1}, A_{\kappa_2'}^{\kappa_2} e_{\kappa_2}, \ldots, A_{\kappa_p'}^{\kappa_p} e_{\kappa_p})$$

多重線形性

$$= A_{\kappa_1'}^{\kappa_1} A_{\kappa_2'}^{\kappa_2} \cdots A_{\kappa_p'}^{\kappa_p} T(e_{\kappa_1}, e_{\kappa_2}, \ldots, e_{\kappa_p})$$

$$= A_{\kappa_1'}^{\kappa_1} A_{\kappa_2'}^{\kappa_2} \cdots A_{\kappa_p'}^{\kappa_p} T_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_p}$$

共変テンソル ＝ 変換則 (共変)を満たす $\left\{ T_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_p} \right\}_{\kappa}$

反変p価共変q価

$V \otimes \cdots \otimes V \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$: r階混合テンソル空間

$$T = T^{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_p}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_q}\, e_{\kappa_1} \otimes \cdots \otimes e_{\kappa_p} \otimes e^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes e^{\lambda_q}$$

変換則：座標系κ, κ': $e_\kappa = A^{\kappa'}_{\kappa} e_{\kappa'}$

$$\Longrightarrow\ T^{\kappa'_1 \kappa'_2 \dots \kappa'_p}_{\lambda'_1 \lambda'_2 \dots \lambda'_q} = A^{\kappa'_1}_{\kappa_1} \cdots A^{\kappa'_p}_{\kappa_p} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \cdots A^{\lambda_q}_{\lambda'_q}\, T^{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_p}_{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_q}$$

記法：
$\kappa, \kappa_1, \kappa_2, \dots, \lambda, \lambda_1, \dots, \mu, \rho, \pi$などは，座標系$\kappa$のインデックス$1, 2, \dots, n$を動く.
プライム$'$がついているものは，別の座標系κ'のもとで$1', 2', \dots, n'$を動く.
プライム$'$は，座標変換の比較のときのみ登場.

テンソルの縮約

(p, q)型テンソル → $(p-1, q-1)$型テンソル

$$T^{\kappa_1\kappa_2\dots\kappa_p}_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q} \quad \mapsto \quad T^{\kappa_1\kappa_2\dots\mu\dots\kappa_p}_{\lambda_1\lambda_2\dots\mu\dots\lambda_q}$$

well-defined？

$$T^{\kappa'\mu'}_{\lambda'\mu'} = A^{\kappa'}_{\kappa} A^{\lambda}_{\lambda'} A^{\mu'}_{\mu} A^{\pi}_{\mu'} T^{\kappa\mu}_{\lambda\pi} = A^{\kappa'}_{\kappa} A^{\lambda}_{\lambda'} \delta^{\pi}_{\mu} T^{\kappa\mu}_{\lambda\pi}$$

$$= A^{\kappa'}_{\kappa} A^{\lambda}_{\lambda'} T^{\kappa\mu}_{\lambda\mu}$$

$$T^{\kappa\mu}_{\lambda\pi} e_{\kappa} \otimes e_{\mu} \otimes e^{\lambda} \otimes e^{\pi} \longmapsto T^{\kappa\mu}_{\lambda\pi} e_{\mu}(e^{\pi}) e_{\kappa} \otimes e^{\lambda} = T^{\kappa\mu}_{\lambda\mu} e_{\kappa} \otimes e^{\lambda}$$

Ex: 行列のトレース $\mathrm{tr}\, A^{\kappa}_{\lambda} \coloneqq A^{\kappa}_{\kappa}$

テンソルからテンソルをつくる

$T^{\kappa\lambda}$:反変２価，$U_{\pi\mu}$:共変２価

$T, U \longmapsto T \otimes U$に対応

$\Rightarrow\ T^{\kappa\lambda}U_{\pi\mu}$: 反変２価, 共変２価

$$\because\ T^{\kappa'\lambda'}\ U_{\pi'\mu'} = A_{\kappa}^{\kappa'} A_{\lambda}^{\lambda'} A_{\pi'}^{\pi} A_{\mu'}^{\mu} T^{\kappa\lambda} U_{\pi\mu}$$

さらに縮約

$\Rightarrow\ T^{\kappa\lambda}U_{\lambda\mu}$: 反変１価，共変１価

$$\because\ T^{\kappa'\lambda'}\ U_{\lambda'\mu'} = A_{\kappa}^{\kappa'} A_{\lambda}^{\lambda'} A_{\lambda'}^{\pi} A_{\mu'}^{\mu} T^{\kappa\lambda} U_{\pi\mu}$$

$$= A_{\kappa}^{\kappa'} \delta_{\lambda}^{\pi} A_{\mu'}^{\mu} T^{\kappa\lambda} U_{\pi\mu} = A_{\kappa}^{\kappa'} A_{\mu'}^{\mu} T^{\kappa\lambda} U_{\lambda\mu}$$

より一般のテンソルについても同様

特別なテンソル

1. 対称テンソル，計量テンソル
2. 交代テンソル

対称テンソル

$V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$: q階共変テンソル空間

$$= \{T: V \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}, \text{多重線形}\}$$

$T \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*, \sigma: \{1,2,\dots,q\} \to \{1,2,\dots,q\}$ 置換

$\sigma T \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*,$

$\sigma T\left(v_1, v_2, \dots, v_q\right) \coloneqq T\left(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(q)}\right)$

Def: Tが対称 $\Leftrightarrow \sigma T = T$ $(\forall \sigma)$

反変テンソルの場合も同様

座標系κを通してみると

$$T = T_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_q} e^{\kappa_1} \otimes e^{\kappa_2} \otimes \cdots \otimes e^{\kappa_q}$$

$$\begin{aligned} T_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_q} &= T\left(e_{\kappa_1}, e_{\kappa_2}, \dots, e_{\kappa_q}\right) = \sigma T(e_{\kappa_1}, e_{\kappa_2}, \dots, e_{\kappa_q}) \\ &= T\left(e_{\kappa_{\sigma(1)}}, e_{\kappa_{\sigma(2)}}, \dots, e_{\kappa_{\sigma(q)}}\right) \\ &= T_{\kappa_{\sigma(1)} \kappa_{\sigma(2)} \dots \kappa_{\sigma(q)}} \end{aligned}$$

Lem: $T_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_q}$が対称 $\Leftrightarrow$ 成分の入れ替えで不変

Ex: $q = 2, T_{ij} = T_{ji} \quad (\forall i, j \in \{1,2,\dots,n\}) \rightarrow$ 対称行列

Rem: $T_j^i = T_i^j$は意味をもたない.

計量テンソル $g_{\kappa\lambda}$

- 共変2価
- 対称
- 正定値　$g_{\kappa\lambda} v^\kappa v^\lambda > 0 \ (\forall v \neq 0)$

2種類の内積を

意識できるようになろう！

$$f_\kappa v^\kappa \quad \text{v.s.} \quad g_{\kappa\lambda} u^\kappa v^\lambda$$

反変ベクトル対の内積　$\langle u, v\rangle \coloneqq g_{\kappa\lambda} u^\kappa v^\lambda$

長さ $\|v\| \coloneqq \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{g_{\kappa\lambda} v^\kappa v^\lambda}$

これらは

スカラー

角度　$\cos\theta = \dfrac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\|v\|} = \dfrac{g_{\kappa\lambda} u^\kappa v^\lambda}{\sqrt{g_{\kappa\lambda} u^\kappa u^\lambda}\sqrt{g_{\kappa\lambda} v^\kappa v^\lambda}}$

反変量と共変量を結びつける　$v_\lambda \coloneqq g_{\kappa\lambda} v^\kappa$

反変計量テンソル $g^{\kappa\lambda}$: $g_{\kappa\lambda}$の逆行列

交代テンソル

$V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*$: q階共変テンソル空間

$= \{T: V \times V \times \cdots \times V \to \mathbb{R}, \text{多重線形}\}$

$T \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*, \sigma: \{1,2,\dots,q\} \to \{1,2,\dots,q\}$ 置換

$\sigma T \in V^* \otimes \cdots \otimes V^*,$

$\sigma T\left(v_1, v_2, \dots, v_q\right) \coloneqq T\left(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(q)}\right)$

Def: Tが交代的 $\Leftrightarrow \sigma T = \mathrm{sgn}(\sigma) T\ (\forall \sigma)$

反変テンソルの場合も同様

座標系κを通してみると

$$T = T_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_q}\, e^{\kappa_1} \otimes e^{\kappa_2} \otimes \cdots \otimes e^{\kappa_q}$$

$$T_{\kappa_{\sigma(1)} \kappa_{\sigma(2)} \dots \kappa_{\sigma(q)}} = \sigma T(e_{\kappa_1}, e_{\kappa_2}, \dots, e_{\kappa_q})$$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma) T(e_{\kappa_1}, e_{\kappa_2}, \dots, e_{\kappa_q})$$

$$= \operatorname{sgn}(\sigma) T_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_q}$$

Lem: $T_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_q}$が交代的$\Leftrightarrow$成分を入れ替えると符号反転

Ex: $q = 2, T_{ij} = -T_{ji}$ $\rightarrow$ 歪対称行列

$$\begin{pmatrix} 0 & T_{12} & T_{13} \\ -T_{12} & 0 & T_{23} \\ -T_{13} & -T_{23} & 0 \end{pmatrix}$$

Rem: $T_{\kappa_1 \kappa_2 \dots \kappa_q} = 0$ if $\kappa_i = \kappa_j (\exists i \neq j)$

Lem: $u, v \in V^*$

$u \wedge v := \frac{u \otimes v - v \otimes u}{2}$ は，交代2価共変テンソル

一般に

$$u^{(1)} \wedge u^{(2)} \wedge \cdots \wedge u^{(p)} := \frac{1}{p!} \sum_{\sigma} \mathrm{sgn}(\sigma) u^{(\sigma(1))} \otimes u^{(\sigma(2))} \otimes \cdots \otimes u^{(\sigma(p))}$$

は，交代p価共変テンソル

$$\because (u \wedge v)(x, y) = \frac{u \otimes v(x,y) - v \otimes u(x,y)}{2} = \frac{u(x)v(y) - v(x)u(y)}{2}$$

$$= \frac{-u \otimes v(y,x) + v \otimes u(y,x)}{2} = -(u \wedge v)(y, x)$$

座標系でみると $(u \wedge v)_{\kappa\lambda} = \dfrac{u_\kappa v_\lambda - u_\lambda v_\kappa}{2}$

Lem: $u, v, u', v' \in V^*, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

- $u \wedge v = -v \wedge u$
- $u \wedge u = 0$
- $u \wedge (\alpha v + \beta v') = \alpha u \wedge v + \beta u \wedge v'$
- $(\alpha u + \beta u') \wedge v = \alpha u \wedge v + \beta u' \wedge v$

Def: $\Lambda^p \; V^* = V^* \wedge V^* \wedge \cdots \wedge V^*$

交代p価共変テンソルからなる空間

共変p-ベクトル

Prop: $e^1, e^2, \dots, e^n$: V^*の基底

$$e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_p} \quad (1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_p \leq n)$$

は $\wedge^p V^*$ の基底 $\to \dim \wedge^p V^* = \binom{n}{p}$

$$\because T = \sum T_{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3} e^{\kappa_1} \otimes e^{\kappa_2} \otimes e^{\kappa_3}$$

$$= \sum_{1 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 \leq n} T_{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3} (e^{\kappa_1} \otimes e^{\kappa_2} \otimes e^{\kappa_3} - e^{\kappa_2} \otimes e^{\kappa_1} \otimes e^{\kappa_3} + e^{\kappa_2} \otimes e^{\kappa_3} \otimes e^{\kappa_1}$$
$$- e^{\kappa_3} \otimes e^{\kappa_2} \otimes e^{\kappa_1} + e^{\kappa_3} \otimes e^{\kappa_1} \otimes e^{\kappa_2} - e^{\kappa_1} \otimes e^{\kappa_3} \otimes e^{\kappa_2})$$

$$= \sum_{1 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \kappa_3 \leq n} 3!\, T_{\kappa_1 \kappa_2 \kappa_3} e^{\kappa_1} \wedge e^{\kappa_2} \wedge e^{\kappa_3}$$

Lem: $u^{(1)} \wedge u^{(2)} \wedge \cdots \wedge u^{(n)} = \det\left[\, u_\kappa^{(i)} \right] e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n$

$$\because \bigwedge_{i=1}^{n} (u_1^{(i)} e^1 + u_2^{(i)} e^2 + \cdots + u_n^{(i)} e^n)$$

$$= \sum_\sigma \left(\prod_{i=1}^{n} u_{\sigma(i)}^{(i)}\right) e^{\sigma(1)} \wedge e^{\sigma(2)} \wedge \cdots \wedge e^{\sigma(n)}$$

$$\parallel$$

$$\mathrm{sgn}(\sigma) e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n$$

$e^i \wedge e^i = 0$
に注意

Ex: $n = 3,\ u \wedge v = (u_1 e^1 + u_2 e^2 + u_3 e^3) \wedge (v_1 e^1 + v_2 e^2 + v_3 e^3)$

$$= (u_2 v_3 - u_3 v_2) e^2 \wedge e^3$$

$$+ (u_1 v_3 - v_3 u_1) e^1 \wedge e^3$$

$$+ \ (u_1 v_2 - v_2 u_1) e^1 \wedge e^2$$

Rem: 3 次元ベクトル $\vec{u}, \vec{v}$ の外積 $\vec{u} \times \vec{v}$

Appendix: 古いスライド

最適化アルゴリズムの不変性

目的関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$　最小化したい

最急降下法

$$\vec{x} \leftarrow \vec{x} + \underset{\text{ステップ幅}}{h} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x^1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

テンソル式に書くと

$$\overset{\text{反変}}{x^\kappa} \leftarrow x^\kappa + h \overset{\text{共変}}{\frac{\partial f}{\partial x^\kappa}}$$

不変でない

$h \to$ 反変計量テンソル $g^{\kappa\lambda}$

$$x^\kappa \leftarrow x^\kappa + g^{\kappa\lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

不変

Ex: ニュートン法 $g^{\kappa\lambda} = \left(\frac{\partial f}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda} \right)^{-1}$

反変ベクトルの例

- 位置ベクトル　$x = \overrightarrow{OP}$
- 速度ベクトル　$\frac{dx}{dt}$
- 加速度ベクトル　$\frac{d^2x}{dt^2}$

共変ベクトルの例

- 超平面の法線ベクトル　$a_\kappa x^\kappa = 0 \rightarrow a_\kappa A^\kappa_{\kappa'} x^{\kappa'} = 0$
- 勾配ベクトル　$\frac{\partial U}{\partial x^{\kappa'}} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} \frac{\partial U}{\partial x^\kappa} = A^\kappa_{\kappa'} \frac{\partial U}{\partial x^\kappa}$
- 力は共変ベクトルとみなすのが自然

ニュートンの運動方程式　$m\frac{d^2\vec{x}}{dt^2} = \vec{f}$

$\vec{x}$: 反変ベクトルx^κ,　$\vec{f}$: 共変ベクトルf_κ　とモデリング

$$m\frac{d^2x^\kappa}{dt^2} = f_\kappa \quad (\kappa = 1,2,3)$$

座標変換 $\kappa \to \kappa'$ (~ 観測者を変える)

$$m\sum_{\kappa=1',2',3'} A^{\kappa}_{\lambda'} A^{\kappa}_{\kappa'} \frac{d^2x^{\kappa'}}{dt^2} = f_{\lambda'} \quad (\lambda' = 1', 2', 3')$$

観測者を変えると物理法則が変わってしまった！

- 反変と共変を＝で結んでいるのはモデリングとしておかしい.
- 物理法則を表す式は, 「可能な」座標変換のもとで「不変」であるべき.

⇒　座標変換として「直交変換」のみ考える.

$$\sum_{\kappa=1',2',3'} A^{\kappa}_{\lambda'} A^{\kappa}_{\kappa'} = \begin{cases} 1 & \lambda' = \kappa' \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

⇒　質量 m を2階共変テンソル $m_{\kappa\lambda}$ と考える.

$$m_{\kappa\lambda} \frac{d^2 x^{\lambda}}{dt^2} = f_{\kappa}$$

- これまで扱ったテンソルは，V, V^*から構成される空間 $V^* \otimes V$など，の元であった．座標表示しなくても議論できる．
- 実は，すでに我々はVやV^*の元とはみなせない「ベクトル」を扱っている．

Q1: $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$, $\vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix} u^2 v^3 - v^3 u^2 \\ u^3 v^1 - u^1 v^3 \\ u^1 v^2 - u^2 v^1 \end{pmatrix}$

$\vec{u}, \vec{v}$を反変ベクトルすると$\vec{u} \times \vec{v}$は反変？共変？

Q2: $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^3$, $\det \begin{pmatrix} u^1 & v^1 & w^1 \\ u^2 & v^2 & w^2 \\ u^3 & v^3 & w^3 \end{pmatrix}$はスカラー？

テンソル密度

Def: $\kappa \mapsto P^{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_p}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_q} \in \mathbb{R}^{n^{p+q}}$ が

重みt，反変p価，共変q価のテンソル密度

$\Leftrightarrow$ 座標系κ, κ': $e_\kappa = A^{\kappa'}_\kappa e_{\kappa'}$

$$P^{\kappa'_1\ldots\kappa'_p}_{\lambda'_1\ldots\lambda'_q} = \frac{1}{|\Delta|^t} A^{\kappa'_1}_{\kappa_1} \cdots A^{\kappa'_p}_{\kappa_p} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \cdots A^{\lambda_q}_{\lambda'_q} P^{\kappa_1\ldots\kappa_p}_{\lambda_1\ldots\lambda_q}$$

$$\Delta \coloneqq \det(A^{\kappa'}_{\kappa})$$

- $p + q = 1$: (反変/共変)ベクトル密度
- $p + q = 0$: スカラー密度

Ex: $|\det(u^\kappa\ v^\kappa\ w^\kappa)|$は重み$-1$のスカラー密度

$$\because \left|\det\left(u^{\kappa'}\ v^{\kappa'}\ w^{\kappa'}\right)\right| = \left|\det\left(A^{\kappa'}_{\kappa} u^\kappa\ \ A^{\kappa'}_{\kappa} v^\kappa\ \ A^{\kappa'}_{\kappa} w^\kappa\right)\right|$$

$$= |\det(A^{\kappa'}_{\kappa})||\det(u^\kappa\ v^\kappa\ w^\kappa)|$$

$$\frac{1}{|\Delta|^{-1}}$$

- $|\det(u^\kappa\ v^\kappa\ w^\kappa)|$は$u^\kappa, v^\kappa, w^\kappa$が張る平行６面体の体積

e_1, e_2, e_3がつくる立方体の体積を１としたときの

- よって，変換$\kappa \to \kappa'$のとき，$e_{1'}, e_{2'}, e_{3'}$がつくる立方体の体積との比率がかかる.

擬テンソル密度

Def: $\kappa \mapsto \tilde{P}^{\kappa_1\kappa_2\dots\kappa_p}_{\lambda_1\lambda_2\dots\lambda_q} \in \mathbb{R}^{n^{p+q}}$ が

重みt，反変p価，共変q価の擬テンソル密度

$\Leftrightarrow$ 座標系κ, κ': $e_\kappa = A_\kappa^{\kappa'} e_{\kappa'}$

$$\tilde{P}^{\kappa'_1\dots\kappa'_p}_{\lambda'_1\dots\lambda'_q} = \frac{\Delta}{|\Delta|}\frac{1}{|\Delta|^t} A^{\kappa'_1}_{\kappa_1} \cdots A^{\kappa'_p}_{\kappa_p} A^{\lambda_1}_{\lambda'_1} \cdots A^{\lambda_q}_{\lambda'_q} \tilde{P}^{\kappa_1\dots\kappa_p}_{\lambda_1\dots\lambda_q}$$

± 1 $\quad \Delta \coloneqq \det(A_\kappa^{\kappa'})$

- $p+q=1, t=0$: (反変/共変)擬ベクトル
- $p+q=0$: 擬スカラー密度

Ex: $\det(u^\kappa\ v^\kappa\ w^\kappa)$は重み$-1$の擬スカラー密度

$$\because \det\left(u^{\kappa'}\ v^{\kappa'}\ w^{\kappa'}\right) = \det(A^{\kappa'}_{\kappa}) \det(u^\kappa\ v^\kappa\ w^\kappa)$$

$$\frac{\Delta}{|\Delta|}\frac{1}{|\Delta|^{-1}}$$

Ex: $u^\kappa \times v^\kappa$は重み-1の共変擬ベクトル密度

Ex: 回転の軸・強さ 〜 反変擬ベクトル

- 擬テンソル/ベクトルは軸性テンソル/ベクトルともいう.
- 通常のテンソル/ベクトルは極性テンソル/ベクトルともいう.

Ex: 空間に質量が分布している．
ある点における質量密度

$$m = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

それに含まれる質量
〜 スカラー

重み1のスカラー密度

平行６面体の体積
〜 スカラー密度，重み-1

Ex: 流体のある点の速度 v^κ（反変ベクトル）

その点の質量密度 m（スカラー密度，重み-1）

質量速度ベクトル mv^κ（反変ベクトル密度，+1）

面積要素 f_κ（共変ベクトル密度，-1）

面積要素を通過する流体の量 $mf_\kappa v^\kappa$（スカラー）

Eddintonのエプシロン

～擬の量とふつうの量を結びつける

$$\tilde{\varepsilon}_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n} := \begin{cases} 1 & (\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n)\text{が}(12\cdots n)\text{の偶置換} \\ -1 & (\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n)\text{が}(12\cdots n)\text{の奇置換} \\ 0 & \text{その他（同じインデックスがある）} \end{cases}$$

Prop:　$\tilde{\varepsilon}_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}$は共変$n$価擬テンソル密度，重み$-1$

$$\because A^{\kappa_1}_{1'}A^{\kappa_2}_{2'}\cdots A^{\kappa_n}_{n'}\tilde{\varepsilon}_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n} = \det(A^{\kappa}_{\kappa'})$$

$$A^{\kappa_1}_{\kappa'_1}A^{\kappa_2}_{\kappa'_2}\cdots A^{\kappa_n}_{\kappa'_n}\tilde{\varepsilon}_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n} = \det(A^{\kappa}_{\kappa'})\tilde{\varepsilon}_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n}$$

$$\text{Ex: } (u \times v)_\kappa = \tilde{\varepsilon}_{\kappa\lambda\mu} u^\lambda v^\mu = \begin{pmatrix} u^2v^3 - u^3v^2 \\ u^3v^1 - u^1v^3 \\ u^1v^2 - u^2v^1 \end{pmatrix}$$

→ 外積$u \times v$は，共変擬ベクトル密度，重み-1

別の見方: $u \wedge v =$

$$(u^2v^3 - u^3v^2)e_2 \wedge e_3 + (u^3v^1 - u^1v^3)e_3 \wedge e_1 + (u^3v^1 - v^2u^1)e_1 \wedge e_2$$

この量を 3 次元量と見ている

$$\text{Ex: } \det(u\ v\ w) = \tilde{\varepsilon}_{\kappa\lambda\mu} u^\kappa v^\lambda w^\mu$$

別の見方: $u \wedge v \wedge w = \det(u\ v\ w) e_1 \wedge e_2 \wedge e_3$

この量を 1 次元量と見ている

剛体の運動

ω: 角速度ベクトル

点$\vec{x}$における速度: $\frac{d\vec{x}}{dt}=\omega\times\vec{x}$

テンソル式に書くと

$\frac{d\vec{x}}{dt}\to\frac{dx^\kappa}{dt}$:反変

反変計量: $g^{\kappa\lambda}$

$\vec{x}\to x^\kappa$:反変

$\omega\to\widetilde{\omega}^\kappa$:反変擬ベクトル密度(+1)

$\omega\times\vec{x}\to\tilde{\varepsilon}_{\kappa\lambda\mu}\widetilde{\omega}^\lambda x^\mu$:共変ベクトル

$$\frac{dx^\kappa}{dt}=g^{\kappa\lambda}\tilde{\varepsilon}_{\lambda\mu\sigma}\widetilde{\omega}^\mu x^\sigma=g^{\kappa\lambda}B_{\lambda\sigma}x^\sigma$$

$B_{\lambda\sigma}:=\tilde{\varepsilon}_{\lambda\mu\sigma}\widetilde{\omega}^\mu$ 角速度テンソル: 共変2-ベクトル

マクスウェル方程式の一部（時間変化なし）

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$$

磁界　電流密度 = 電荷密度×速度

スカラー密度(+1)　反変

$\vec{j} \to j^{\kappa}$: 反変ベクトル密度(+1)

$\vec{H} \to \widetilde{H}_{\kappa}$: 共変擬ベクトル or $H^{\kappa\mu}$: 反変2-ベクトル密度(+1)

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} \to \tilde{\varepsilon}^{\kappa\mu\lambda}\partial_{\mu}\widetilde{H}_{\lambda}$$

$$\tilde{\varepsilon}^{\kappa\mu\lambda}\partial_{\mu}\widetilde{H}_{\lambda} = j^{\kappa} \qquad \partial_{\mu}H^{\kappa\mu} = j^{\kappa}$$