幾何数理工学

多様体上のベクトル・テンソル解析入門

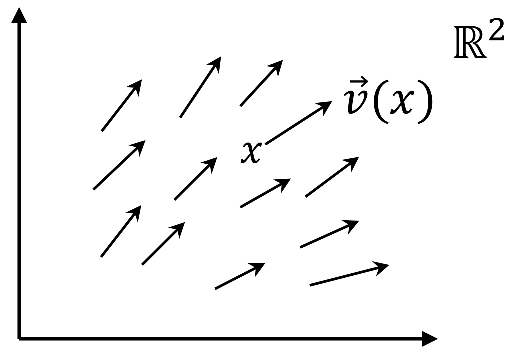
計数工学科数理情報工学コース
平井広志
hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

授業のページ

http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~hirai/teaching

ベクトル解析（復習）

ベクトル場 ～ $\mathbb{R}^n$ $(n = 2,3)$の各点xにベクトル $\vec{v}(x) \in \mathbb{R}^n$が付随



ベクトル場の微積分
　～ grad, div, rot, ストークスの定理，ガウスの発散定理, etc

ここでは，多様体論からの扱いのさわりを勉強する.
本格的には，4年科目 応用空間論でやるはず.

多様体 (manifold)

～ 局所的にユークリッド空間とみなせる位相空間

Def. n次元多様体M

$\Leftrightarrow$ Mはハウスドルフ位相空間

$\exists\{U_\kappa\}_{\kappa\in\Lambda}$: Mの開集合の族，$\exists\varphi_\kappa: U_\kappa \to \mathbb{R}^n$

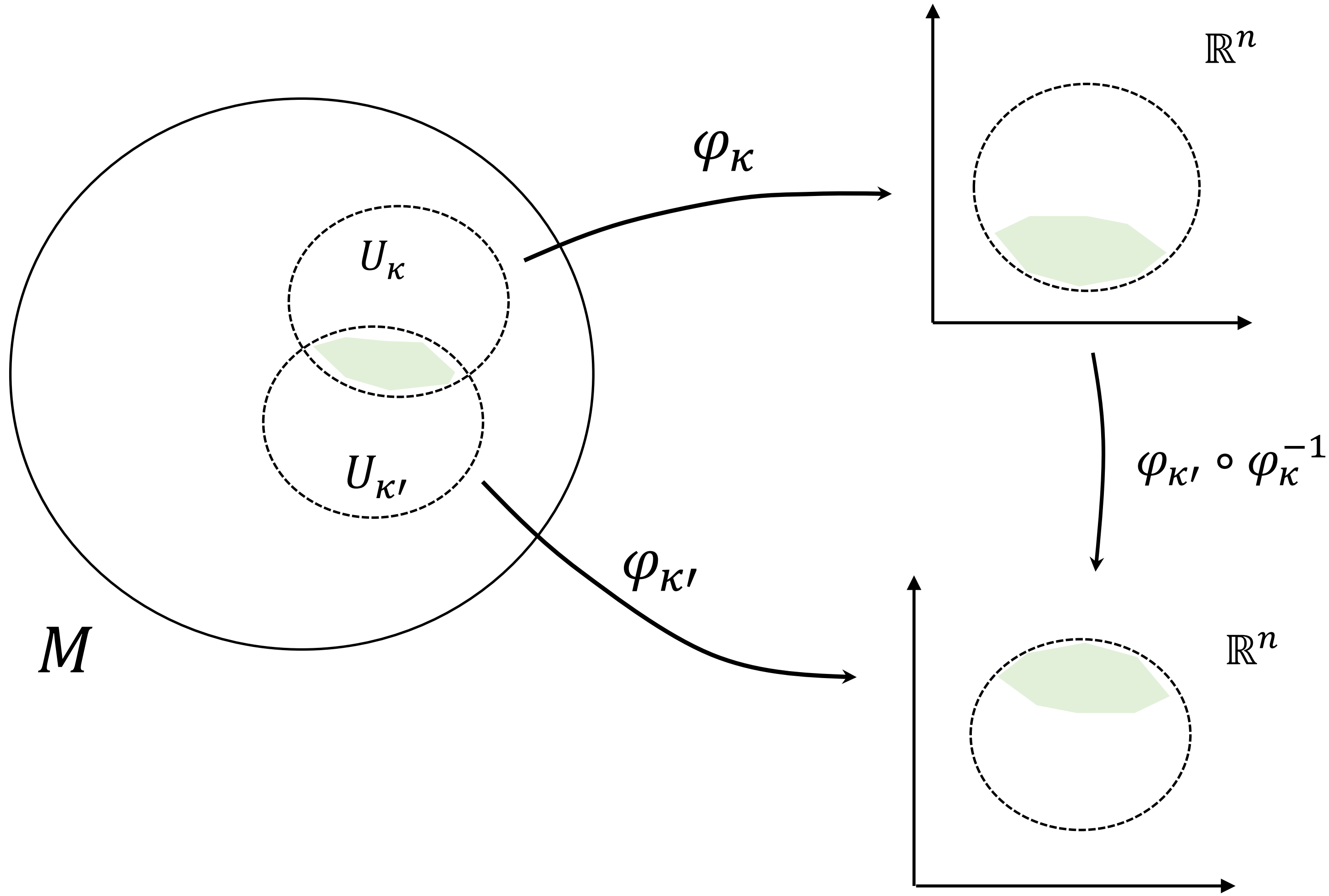
i. $M = \bigcup_\kappa U_\kappa$

ii. $\varphi_\kappa: U_\kappa \to \varphi_\kappa(U_\kappa)$は同相写像 $(\forall\kappa)$

iii. $\varphi_{\kappa'} \circ \varphi_\kappa^{-1}: \varphi_\kappa(U_\kappa \cap U_{\kappa'}) \to \varphi_{\kappa'}(U_\kappa \cap U_{\kappa'})$

は十分滑らか $(\forall\kappa,\kappa': U_\kappa \cap U_{\kappa'} \neq \emptyset)$

ハウスドルフ位相空間：
任意の異なる２点に対し交わらない開近傍が存在する位相空間



$(U_\kappa, \varphi_\kappa)$：座標近傍，局所座標系

$\varphi_{\kappa'} \circ \varphi_\kappa^{-1}$：座標変換

多様体の例

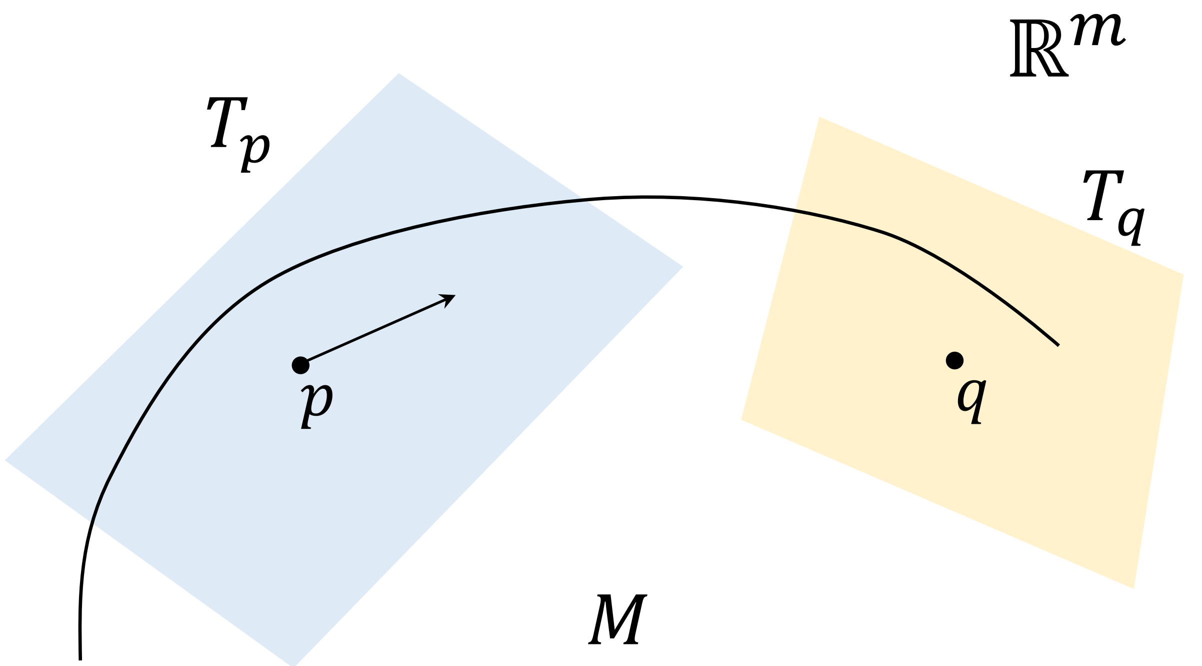
- $\mathbb{R}^n$の開集合

  Ex. 正定値行列からなる集合

- 球面，トーラス，射影空間，…

多様体でないもの

接ベクトル空間



Mが$\mathbb{R}^m$に入ってない場合はどう定義するか？

M: n次元多様体, $p \in M$

pの近傍局所座標系U_κをとって,
$\mathbb{R}^n$の開集合$U_\kappa = \{x^\kappa = (x^1, x^2, \dots, x^n)\}$
とみなす.

Def. (pにおける接空間 T_p)

$$T_p \coloneqq \{\ p\text{での方向微分全体}\ \}$$

$$= \left\{ v^\kappa \left(\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\right)_p \,\middle|\, v^\kappa \in \mathbb{R}^n \right\}$$

$\left(\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\right)_p$は$T_p$の基底

pの接ベクトル: T_p の元 $v^\kappa \left(\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\right)_p \simeq v^\kappa = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

pでの方向微分

$$f \longmapsto v^\kappa \frac{\partial f}{\partial x^\kappa}(p)$$

pの周りで定義された関数

別の座標系 $U_{\kappa'} = \{x^{\kappa'} = (x^{1'}, x^{2'}, \dots, x^{n'})\} \subseteq \mathbb{R}^n$から見ると

pでの方向微分

$$f \longmapsto v^{\kappa} \frac{\partial f}{\partial x^{\kappa}}(p) = v^{\kappa} \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}} \frac{\partial f}{\partial x^{\kappa'}}(p)$$

ここで, $x^{\kappa'}$を（$\varphi_{\kappa'} \circ \varphi_{\kappa}^{-1}$をとおして）$x^{\kappa}$の関数とみている

基底変換: $\left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\right)_p = \left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa'}}\right)_p$

変換行列: $\left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}\right) \quad (= A^{\kappa'}_{\kappa})$

変換則: $\quad v^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}} v^{\kappa}$

T_p: 反変ベクトルの空間

余接ベクトル空間 T_p^*

Def. 余接ベクトル空間 $T_p^* \coloneqq T_p$の双対空間

pの局所座標系$U_\kappa = \{x^\kappa\}$

双対基底 $(dx^\kappa)_p \;\Leftrightarrow (dx^\kappa)_p \left(\dfrac{\partial}{\partial x^\lambda}\right)_p = \delta_\lambda^\kappa$

変換則: $f_\kappa = \dfrac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa} f_{\kappa'}$

T_p^*: 共変ベクトルの空間

このようにして，各点$p \in M$にテンソル空間

$$T_p \otimes \cdots \otimes T_p \otimes T_p^* \otimes \cdots \otimes T_p^*$$

を対応させることができる．

テンソルの基底による表現

$$T = T^{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_r}_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_s}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa_1}}\right) \otimes \cdots \otimes \left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa_r}}\right) \otimes dx^{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\lambda_s}$$

特に大事な空間

$T_p^* \wedge \cdots \wedge T_p^*$: r次交代共変テンソルの空間（r次微分形式）

$$\begin{array}{l} \rotatebox{90}{$\in$} \\ \omega = \displaystyle\sum_{1 \le \kappa_1 < \cdots < \kappa_r \le n} \omega_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_r} dx^{\kappa_1} \wedge \cdots \wedge dx^{\kappa_r} \end{array}$$

ベクトル・テンソル場

Def. 反変ベクトル場 $\Leftrightarrow X = \{v_p\}_{p \in M}$　ここで $v_p \in T_p$

Def. 共変ベクトル場 $\Leftrightarrow \omega = \{\omega_p\}_{p \in M}$　ここで $\omega_p \in T_p^*$

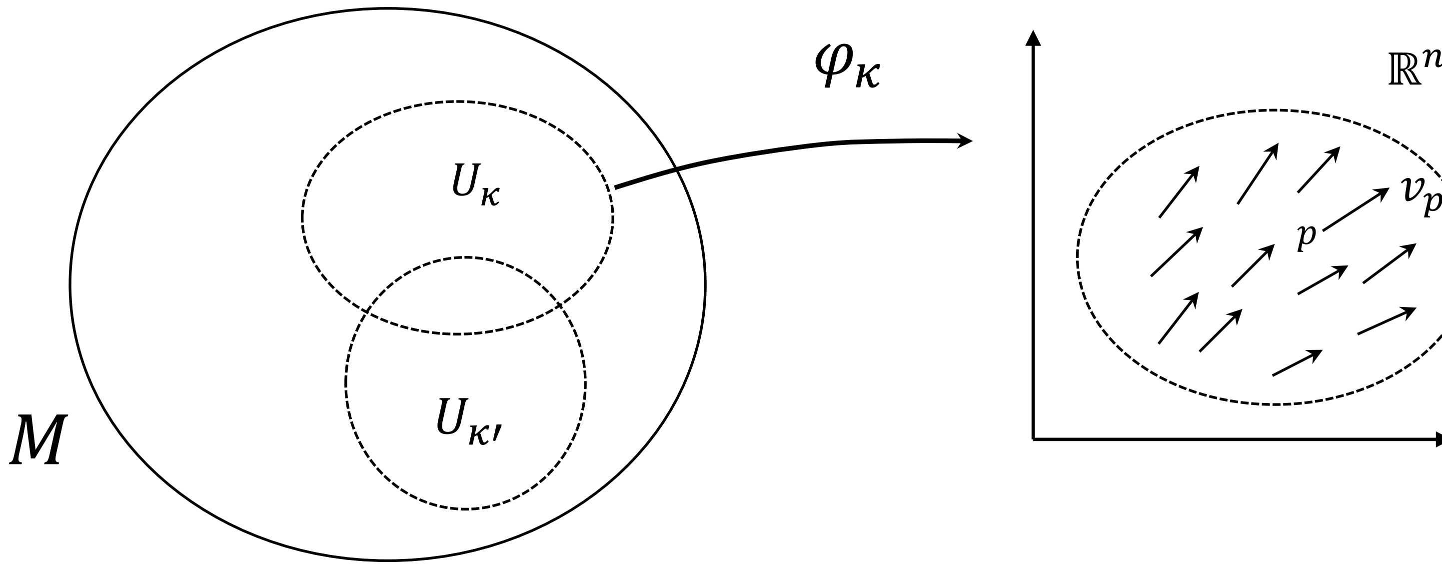
一次微分形式ともいう

ただし，座標系をとって基底表現したとき係数が滑らかになるものを考える．

つまり，$X = {v_p}^{\kappa} \left(\frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \right)_p \; (p \in U_\kappa)$と表現したとき

$p \mapsto {v_p}^{\kappa} \in \mathbb{R}$　が滑らか

テンソル場についても同様に定義する．



座標近傍U_κをとって，$U_\kappa \subseteq \mathbb{R}^n$とみることで

そこでいつもの微積分・ベクトル解析ができる．

しかし，得られた計算結果・概念が座標系の取り方によらない

多様体上の概念なのかどうか考える必要がある．

特別な座標系・変換に限定して考えることもある．

Ex. アファイン座標系・変換 $x^{\kappa'} = A_\kappa^{\kappa'} x^\kappa + b$ $(A_\kappa^{\kappa'}, b$: 定数)

$f: M \to \mathbb{R}$

Lem. $\dfrac{\partial f}{\partial x^\kappa}$ は共変ベクトル場（1次微分形式）

$$\because \ \frac{\partial f}{\partial x^\kappa} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}\frac{\partial f}{\partial x^{\kappa'}}$$

Def. 外微分 $f \longmapsto df := \dfrac{\partial f}{\partial x^\kappa} dx^\kappa$ $= \dfrac{\partial f}{\partial x^\kappa}\dfrac{\partial x^\kappa}{\partial x^{\kappa'}} dx^{\kappa'} = \dfrac{\partial f}{\partial x^{\kappa'}} dx^{\kappa'}$

- 多様体上の関数に対する演算としてwell-defined

  座標系を使わない定義: $df(v) := v(f)$ $(v \in T_p)$
- fの全微分dfの意味づけ
- f: ポテンシャル関数, $\dfrac{\partial f}{\partial x^\kappa}$: 勾配ベクトル場 grad fといっていい？

df と $\mathrm{grad}\, f$ の違い

Def: リーマン多様体

$\Leftrightarrow$ 多様体であって，各点p の接空間 T_p に内積$\langle , \rangle_p$ がある．

$$\text{内積}\langle , \rangle_p \cong \text{計量テンソル}\ g_{\kappa\lambda} \in T_p^* \otimes T_p^*$$

$$\langle u, v\rangle_p \coloneqq g_{\kappa\lambda} u^\kappa v^\lambda$$

Def: 勾配 $\mathrm{grad}\, f(p) \in T_p$

$$\Leftrightarrow \langle \mathrm{grad}\, f(p), v\rangle_p \coloneqq df(v) \quad (\forall v \in T_p)$$

$$\Leftrightarrow (\mathrm{grad}\, f(p))^\kappa g_{\kappa\lambda} \coloneqq \frac{\partial f}{\partial x^\lambda}$$

問題: リーマン多様体上の最適化について調べよ．

変換則: $f_\kappa = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa} f_{\kappa'}$

$f = (f_\kappa)$: 共変ベクトル場（1次微分形式）

この項のおかげで
そうでない

$\frac{\partial f_\kappa}{\partial x^\lambda}$ は2階共変テンソル場か？

$$\frac{\partial f_\kappa}{\partial x^\lambda} = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial}{\partial x^{\lambda'}} \left(\frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa} f_{\kappa'} \right) = \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa} \frac{\partial f_{\kappa'}}{\partial x^{\lambda'}} + f_{\kappa'} \frac{\partial^2 x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda}$$

Lem. $\frac{\partial f_\kappa}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x^\kappa}$ は交代2階共変テンソル場（2次微分形式）

Def: 外微分 $df := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f_\kappa}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x^\kappa}\right) dx^\lambda \otimes dx^\kappa$

$$= \sum_{1 \le \lambda < \kappa \le n} \left(\frac{\partial f_\kappa}{\partial x^\lambda} - \frac{\partial f_\lambda}{\partial x^\kappa}\right) dx^\lambda \wedge dx^\kappa$$

$\Omega^k = \Omega^k(M)$: k次微分形式の空間（ベクトル空間，$\mathbb{R}$上）

Ω^0: M上の滑らかな関数の空間

Ω^1: 共変ベクトル場

Def. 外微分 $d\colon \Omega^k \to \Omega^{k+1}$

$$\sum \omega_{i_1 i_2 \dots i_k} dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

$$\longmapsto \sum d\omega_{i_1 i_2 \dots i_k} \wedge dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_k}$$

Well-defined? → 自明でない

問題：これを調べよ

例: $\mathbb{R}^3$では

$$f = f_1 dx^1 + f_2 dx^2 + f_3 dx^3$$

$$df = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^2} - \frac{\partial f_2}{\partial x^3}\right) dx^2 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial f_3}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^3 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial x^1} - \frac{\partial f_1}{\partial x^2}\right) dx^1 \wedge dx^2$$

$$\omega = V_1 dx^2 \wedge dx^3 + V_2 dx^3 \wedge dx^1 + V_3 dx^1 \wedge dx^2$$

$$d\omega = \left(\frac{\partial V_1}{\partial x^1} + \frac{\partial V_2}{\partial x^2} + \frac{\partial V_3}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

～ 回転 rot, 発散 div の正体は外微分

問題：多様体上の積分・ストークスの定理について調べよ

ド・ラームコホモロジー

Lem: $d \circ d = 0$

$\because\ df = \frac{\partial f}{\partial x^\kappa} dx^\kappa,\ ddf = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x^\lambda \partial x^\kappa} - \frac{\partial f}{\partial x^\kappa \partial x^\lambda}\right) dx^\lambda \otimes dx^\kappa = 0$

$$\longrightarrow\ \Omega^{k-1} \xrightarrow{d} \Omega^k \xrightarrow{d} \Omega^{k+1} \longrightarrow$$

Def: $H^k_{\mathrm{DR}}(M) \coloneqq \mathrm{Ker}\, d \,/\, \mathrm{Im}\, d$

Thm: $H^k_{\mathrm{DR}}(M) \cong H^k(M, \mathbb{R})$

問題：ド・ラームコホモロジーについてもっと調べよ

擬ベクトル・テンソル，密度，

という考え方について

$f_{\kappa\lambda}$: 交代2階共変ベクトル（2次微分形式）

$n = 3$ で３つの成分 $f_{23} = -f_{32}$, $f_{31} = -f_{13}, f_{12} = -f_{21}$ からなる.

これを「３次元ベクトル」とみて,

$\tilde{f}^{\mu} \coloneqq f_{123-\mu} \quad (\mu = 1,2,3)$　とおいてみる

ここで，$\tilde{f}^1 = f_{23}$, $\tilde{f}^2 = f_{31}$, $\tilde{f}^3 = f_{12}$

$\mu \mapsto \tilde{f}^{\mu}$はどのような変換則に従うか？

$$f_{\kappa\lambda} = A_\kappa^{\kappa'} A_\lambda^{\lambda'} f_{\kappa'\lambda'} \qquad \text{ここで } A_\kappa^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^\kappa}$$

$$\tilde{f}^{123-\kappa\lambda} = \sum_{1\le\kappa'<\lambda'\le 3} \left(A_\kappa^{\kappa'} A_\lambda^{\lambda'} - A_\lambda^{\kappa'} A_\kappa^{\lambda'} \right) \tilde{f}^{1'2'3'-\kappa'\lambda'}$$

$$\tilde{f}^\mu = \sum_{1\le\mu'\le 3} (-1)^{\mu+\mu'} \left(\text{行列} A = \left(A_\kappa^{\kappa'} \right) \text{の} (\mu', \mu) \text{−余因子} \right) \tilde{f}^{\mu'}$$

逆行列の公式を思い出す.

$$\text{変換則: } \frac{1}{\det A} A_\mu^{\mu'} \tilde{f}^\mu = \tilde{f}^{\mu'}$$

$\tilde{f}^\mu$は反変ベクトルに似ているが, $\dfrac{1}{\det A}$がかかっている.

擬ベクトル・スカラー密度（場）

Def. （（反変）擬ベクトル密度（重みt））

$$\tilde{f}^{\kappa'} = \frac{\Delta}{|\Delta|}\frac{1}{|\Delta|^t} A^{\kappa'}_{\kappa} \tilde{f}^{\kappa}$$

$$\Delta := \det(A^{\kappa'}_{\kappa})$$

Def. （擬スカラー密度（重みt））

$$\tilde{s}' = \frac{\Delta}{|\Delta|}\frac{1}{|\Delta|^t} \tilde{s}$$

- 重み $t = 0$ → 擬ベクトル・擬スカラー
- 符号 $\frac{\Delta}{|\Delta|} \in \{\pm 1\}$ なし→ ベクトル密度・スカラー密度
- 共変，テンソルについても同様に定義される．

これらは座標系の取り方に依存した概念であるが物理・工学モデリングに使われる．

そもそも我々はすでに使っている．

回転 $\mathrm{rot}\,\vec{f}$:　$\vec{f}$が共変ベクトルなら反変擬ベクトル（重み1）

外積 $\vec{f}\times\vec{g}$：$\vec{f},\vec{g}$が共変ベクトルなら反変擬ベクトル（重み1）

（≈ 2 次微分形式）

$\vec{f},\vec{g},\vec{h}$（共変）が張る平行 6 面体の符号付体積

$$\det\left(\vec{f}\ \vec{g}\ \vec{h}\right)$$

→ 擬スカラー密度（重み1）≈ 3 次微分形式

$$f\wedge g\wedge h=\det(f_\kappa\ g_\lambda\ h_\mu)\,dx^1\wedge dx^2\wedge dx^3$$

その絶対値 → スカラー密度（重み1）

発散 $\mathrm{div}\,\vec{V} = \dfrac{\partial V^1}{\partial x^1} + \dfrac{\partial V^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial V^3}{\partial x^3}$

$\vec{V}$を反変擬ベクトル（重み１），すなわち,

２次微分形式 $\omega = V^1 dx^2 \wedge dx^3 + V^2 dx^3 \wedge dx^1 + V^3 dx^1 \wedge dx^2$

とみる.

外微分 $d\omega = dV^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3 + dV^2 \wedge dx^3 \wedge dx^1 + dV^3 \wedge dx^1 \wedge dx^2$

$$= \left(\frac{\partial V^1}{\partial x^1} + \frac{\partial V^2}{\partial x^2} + \frac{\partial V^3}{\partial x^3}\right) dx^1 \wedge dx^2 \wedge dx^3$$

$$dx^i \wedge dx^i = 0$$

$$dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$$

→ ３次微分形式＝擬スカラー密度（重み1）

Lem. $\tilde{f}^{\kappa}$: 反変擬ベクトル密度（重み1）

$\rightarrow \dfrac{\partial \tilde{f}^{\kappa}}{\partial x^{\kappa}}$: 擬スカラー密度（重み1）

$$\because\ \frac{\partial \tilde{f}^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa'}} = \frac{\partial}{\partial x^{\kappa'}}\left(\frac{1}{\Delta} A_{\kappa}^{\kappa'} \tilde{f}^{\kappa}\right) = \frac{1}{\Delta} A_{\kappa}^{\kappa'} \frac{\partial \tilde{f}^{\kappa}}{\partial x^{\kappa'}} + \tilde{f}^{\kappa} A_{\kappa}^{\kappa'} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa'}} \frac{1}{\Delta} + \frac{1}{\Delta} \tilde{f}^{\kappa} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa'}} A_{\kappa}^{\kappa'}$$

$$= \frac{1}{\Delta} \frac{\partial \tilde{f}^{\kappa}}{\partial x^{\kappa}} + \frac{1}{\Delta} \tilde{f}^{\kappa} \left(-\frac{1}{\Delta} \frac{\partial \Delta}{\partial x^{\kappa}} + A_{\kappa'}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A_{\kappa}^{\kappa'}\right)$$

$$A_{\kappa}^{\kappa'} = \frac{\partial x^{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}$$

ここで，　$-\dfrac{1}{\Delta} \dfrac{\partial \Delta}{\partial x^{\kappa}} + A_{\kappa'}^{\mu} \dfrac{\partial}{\partial x^{\mu}} A_{\kappa}^{\kappa'} = 0$

$\because A = \left(A_{\kappa}^{\kappa'}\right) = (a_1\ a_2\ \ldots a_n)$として

$$\frac{1}{\det A} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} \det A = \frac{1}{\det A} \sum_{\kappa'=1}^{n} \det\left(a_1, \ldots, a_{\kappa'-1}, \frac{\partial a_{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}}, a_{\kappa'+1} \ldots a_n\right)$$

$$= \sum_{\kappa'=1}^{n} A^{-1} \frac{\partial a_{\kappa'}}{\partial x^{\kappa}} \text{の}\kappa'\text{行目} = A_{\kappa'}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}} A_{\mu}^{\kappa'} = A_{\kappa'}^{\mu} \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} A_{\kappa}^{\kappa'}$$

クラメルの公式

次元 n

$n-1$階交代共変テンソル		反変 擬ベクトル密度（重み1）
$f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}}$	$\Longrightarrow$	$\tilde{f}^{\kappa} := \varepsilon^{\kappa\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}} f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}}$
$f_{\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}} := \varepsilon_{\kappa\lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_{n-1}} \tilde{f}^{\kappa}$	$\Longleftarrow$	$\tilde{f}^{\kappa}$

Eddinton の ε（エプシロン）

$$\varepsilon^{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n} = \varepsilon_{\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n} := \begin{cases} \mathrm{sgn}(\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n) & if\ (\kappa_1\kappa_2\ldots\kappa_n)\text{が}(12\ldots n)\text{の置換} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

n階交代共変テンソルと擬スカラー密度（重み1）も同様の対応がある.

この先の話題

- ドラームコホモロジー
- 多様体上の積分，ストークスの定理
- リーマン多様体
- アファイン接続，共変微分
- 情報幾何学（4年科目 応用空間論）

おすすめ教科書

藤原彰夫：情報幾何学の基礎，牧野書店，東京，２０１５.

トゥー：多様体，裳華房，東京，２０１９.

おわり