R3 幾何数理工学 期末試験

90 minutes in 8:30–10:15, 2022/1/28

授業で証明した定理はつかってよい．

問題 1. ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ の基底 u, v に対して，アーベル群 G を

$$G = \{\alpha u + \beta v \mid \alpha, \beta \in \mathbb{Z}\}$$

と定義する．$+$ が群演算で，0 が単位元である． $\mathbb{R}^2$ 上の同値関係 $\sim$ を $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in G$ と定義し，商空間 $X := \mathbb{R}^2/\sim$ を考える．$p : \mathbb{R}^2 \to X$ を自然な全射とする．

(1-1) $\mathbb{R}^2$ の任意の開集合 U に対して，$p(U)$ も開集合となることを示せ．

(1-2) $p : \mathbb{R}^2 \to X$ は，被覆写像になることを示せ．

(1-3) X はトーラス $\mathbb{S} \times \mathbb{S}$ と同相になることを示せ．

解答 (1-1) $p^{-1}p(U) = \bigcup_{y \in G} U + y$ で，$x \mapsto x + y$ は $\mathbb{R}^2$ 上の同相写像なので，$U + y$ も開集合．その和集合なので $p^{-1}p(U)$ は開集合．商位相の定義より，$p(U)$ も開集合．

(1-2) $x \in \mathbb{R}^2$ を中心とする半径 $\epsilon > 0$ の開球 B の考えると，(1-1) より，$p(B)$ は， $p(x)$ の開近傍である．特に，$p^{-1}p(B) = \bigcup_{y \in G} B + y$ である．ϵ を十分小さく ($\leq \min\{\|u\|, \|v\|, \|u - v\|\}$) にとると，$B + y$ ($y \in G$) たちは，互いに交わらない．各 $B + y$ への制限 $p|_{B+y}$ は連続な全単射で，(1-1) より，$p|_{B+y}^{-1}$ も連続である．よって，p は被覆写像の定義をみたす．

(1-3) u, v がつくる平行四辺形 S 上では p は X への全射になっていて，内部では，単射になっている．境界上の 2 点 x, x' において，$x' = x \pm u$，$x' = x \pm v$, または，$x' = x \pm u \pm v$ なら $p(x') = p(x)$ となる．つまり，X は S の各対辺を同一方向に貼り合わせたものなのでトーラスである．もっと，厳密にやってもよい．

問題 2. K を 2 次元単体的複体とする．

(2-1) いま，K のある 1 次元単体 e がただ一つの 2 次元単体 F に含まれているとする．そして，K から e と F と K から除いた単体的複体 K' を考える．このとき，K と K' のホモロジー群は等しいことを示せ．

(2-2) トーラス $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ の単体分割から 1 つの 2 次元単体を除いて得られる単体的複体のホモロジー群をもとめよ．

解答 (2-1) K と K' のそれぞれのホモロジー群 H_0, H_1, H_2 が等しいことをいう．H_3 以上に関しては，明らかである（その次元の単体がないので）．H_0 について： 1 次元単体と 0 次元単体がつくるグラフの（弧状）連結成分の成分の個数で H_0 がきまるが，e を除いたとしても F の周がつくるサイクルの 1 部になっているので連結性はかわらない．

H_2 について : $H_2 = \mathrm{Ker}\partial_2$ なので，サイクルの集合 $\mathrm{Ker}\partial_2$ が K と K' で同じであることをいう．$K' \subseteq K$ なので，K' のサイクルは，K のサイクルである．逆をいう．F に ∂_2 を作用させると e が出てくるが，他の 2 単体に ∂_2 を作用させても e はでてこない．これは，K のサイクルにおいては，F の係数がゼロでなくてはならないことを表している．それは，K' のチェイン，サイクルでもある．

H_1 について : 授業でやったように包含写像 $K' \to K$ は準同型 $H_k(K') \to H_k(K)$ を誘導する．それは，K' のホモロジー類を，その代表サイクルの K におけるホモロジー類に対応させる写像である．これが，全単射であることをいう．K におけるサイクルで，e を含むものは，F の周 $\partial_2 F$ をつかうことで，e をつかわないものとホモローグになる（F が e, e_1, e_2 を枝としてもつと $\partial F = e + e_1 + e_2$ のようになり，$e \sim -e_1 - e_2$）．これは，上の写像が全射であることを示している．もしも，K における e を含まない 2 つ

のサイクル z, z' が K においてホモローグだとすると $z - z' = \partial_2 u$ となる 2 チェイン u があるはずだが，うえで見たように u の F の係数はゼロである．これは，z, z' は K' においてもホモローグであること，すなわち，単射性を表している．

(2-2) トーラスとしては正方形の対辺を貼り合わせたモデルで考える．これを単体分割して，正方形の内部の 2 単体 F を 1 個とりのぞいたものを K とする．すると F の任意の枝 e を含む 2 単体は 1 つしか存在しなくなるしたがって，(2-1) の結果より，e とそれを含む唯一つの 2 単体をのぞいてもホモロジー群は不変である．これを繰り返していくことで，最後は正方形の内部の 2 単体がすべてなくなった 1 次元単体複体（グラフ）にできる．このグラフは，2 つのサイクルを一点でくっつけた連結グラフである．したがって，$H_2 = 0$, $H_1 = \mathbb{Z}^2$, $H_0 = \mathbb{Z}$ がわかる．

問題 3. V を n 次元ベクトル空間とし，写像 $\Phi : V \otimes V \otimes V^* \to V$ を

$$\sum_i \alpha_i u_i \otimes v_i \otimes f_i \mapsto \sum_i \alpha_i f_i(v_i) u_i$$

で定義する．

(3-1) この定義が well-defined であることを示せ．

(3-2) V の基底 $e_1, e_2, \ldots, e_n$，その双対基底 $e^1, e^2, \ldots, e^n$ に関して線形写像 Φ の行列表示 (各成分) を求めよ．

解答 (3-1) テンソル空間の元の表し方によらずに定義できていることをしめす．$\Phi((u+u')\otimes v\otimes f) = \Phi(u\otimes v\otimes f + u'\otimes v\otimes f)$ などをしめす．$\Phi((u+u')\otimes v\otimes f) = f(v)(u+u') = f(v)u + f(v)u' = \Phi(u\otimes v\otimes f + u'\otimes v\otimes f)$ のようにして．他の例：$\Phi(u \otimes (v + v') \otimes f) = f(v + v')u = f(v)u + f(v')u = \Phi(u \otimes (v + v') \otimes f)$．他もルーチン作業．

(3-2) Φ を $V \otimes V \otimes V^*$ の基底 $e_j \otimes e_k \otimes e^l$，$V$ の基底 e_i に関して，行列表示 $(\Phi_{i,jkl})$ を考えると，$\Phi_{i,jkl} = e^i(\Phi(e_j \otimes e_k \otimes e^l)) = e^i(\delta_{kl} e_j) = \delta_{ij}\delta_{kl}$．$\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタ．

問題 4. V を $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間，$e_1, e_2, \ldots, e_n$ を基底，$e^1, e^2, \ldots, e^n$ を双対基底とする．$T \in V \otimes V$ を 2 階反変テンソルで上の基底に関する行列表示を $T = (T^{ij})$ とする．次の量を別の基底を用いて表せ：

$$\sqrt{\det T} e_1 \wedge e_2 \wedge \cdots \wedge e_n$$

ただし $\det T \geq 0$ とする．

解答 $e_i = A_i^{i'} e_{i'}$ と $T^{ij} = T^{i'j'} A_{i'}^i A_{j'}^j$ である．行列 $A = (A_i^{i'})$ の逆行列が $(A_{i'}^i)$ である．よって，上の量は，$\sqrt{\det A^{-1} T' A^{-1}} \det A e_{1'} \wedge e_{2'} \wedge \cdots \wedge e_{n'} = (\det A / |\det A|) \sqrt{\det T'} e_{1'} \wedge e_{2'} \wedge \cdots \wedge e_{n'}$ となる．すなわち座標変換 A の det の符号がかかる．

次ページに続く．

問題 5. この授業に対する感想，意見，要望を述べよ（減点することはありません）.

レポートについて

救済レポート（不可 $\to$ 可）:
（授業で未解答の）講義ノートの問題，試験問題（中間，期末）を解いてレポートにして提出.

優上狙いレポート:

例 1: 講義ノートの難しい問題を解いてレポートにして提出.
例 2: 講義に関連する（発展的）話題を調べてレポートにして提出.
例 3: 講義中にやると効果的と思われるトポロジー・テンソルの題材を提出.

締切 : 2021 年 2 月 9 日
提出先 : ITC-LMS