R3 幾何数理工学 中間試験

90 minutes in 8:30–10:15, 2021/12/03

- 授業で証明した定理はつかってよい．

問題 1. X, Y を位相空間，$f : X \to Y$ を連続写像とする．$\sim$ を X 上の同値関係とする．f は，$x \sim y$ なら $f(x) = f(y)$ を満たすとする．$\tilde{X} := X/\sim$ を $\sim$ に関する商位相空間とする．このとき，$\tilde{f} : \tilde{X} \to Y$ を

$$\tilde{f}([x]) := f(x)$$

と定義する（$[x]$ は x の属する同値類）．この定義は，well-defined であって，$\tilde{f}$ は連続であることを示せ．

[解答] Well-defined: $x \sim x'$ なら $f(x) = f(x')$ なので，$\tilde{f}([x]) = \tilde{f}([x'])$（代表元のとり方によらない）．$Y$ の開集合 O の逆像 $\tilde{f}^{-1}(O)$ が $\tilde{X}$ で開集合であることをいう．それには，商空間の定義から，$[x] \in \tilde{f}^{-1}(O)$ となる $x \in X$ たちの集合が X において開集合であればよい．ここで，$[x] \in \tilde{f}^{-1}(O) \Leftrightarrow \tilde{f}([x]) \in O \Leftrightarrow f(x) \in O \Leftrightarrow x \in f^{-1}(O)$ より，そのような x たちのなす集合は $f^{-1}(O)$ であって，f の連続性から開集合である．

問題 2. (X, d) を距離空間とし，$S \subseteq X$ を有界な部分集合とする．関数 $f : X \to \mathbb{R}$ を

$$f(x) := \sup_{y \in S} d(x, y) \quad (x \in X)$$

と定義する．このとき f は連続であることを示せ．

[解答] 三角不等式から $f(x) - f(x') = \sup_{y \in S} d(x, y) - \sup_{y \in S} d(x', y) \leq \sup_{y \in S} d(x, x') + d(x', y) - \sup_{y \in S} d(x', y) = d(x, x')$．同様に，$f(x') - f(x) \leq d(x', x) = d(x, x')$．したがって，$|f(x) - f(x')| \leq d(x, x')$．あとは，$\epsilon$-$\delta$ で証明．$\epsilon > 0$ に対し，δ としては，ϵ がとれる．

問題 3. 位相空間 X の各点 x に対して弧状連結な近傍が存在するとする．このとき，X の各弧状連結成分は開集合かつ閉集合であることをしめせ．なお，弧状連結成分とは，X 上の同値関係 $\sim$ を $x \sim y \Leftrightarrow x$ と y を結ぶパスが存在，と定義したときの同値類のことをいう．

[解答] P を弧状連結成分とする．開集合であること：任意の $x \in P$ にたいして，弧状連結な x の近傍 U をとると P の各点と x はパスで結べるので $U \subseteq P$．よって任意の $x \in P$ が内点なので P は開集合．閉集合であること：P の補集合 P^c が開集合であることをいう．P^c は P を除く弧状連結成分のユニオンである．うえで示したように，弧状連結成分は開．開集合たちのユニオンは開集合なので P^c は開．よって P は閉．

問題 4. X, Y を位相空間，$f : X \times Y \to \mathbb{R}$，$g : X \to \mathbb{R}$ を連続写像とする．Y の部分集合 P を

$$P := \{y \in Y \mid f(x, y) \leq g(x) \ (\forall x \in X)\}$$

と定義する．

(4-1) P は閉集合であることを示せ．

(4-2) X はコンパクトとする．このとき，$y \in P$ が

$$f(x, y) < g(x) \ (\forall x \in X)$$

をみたせば，y は P の内点であることを示せ．

[解答] (4-1) x を固定して，写像 $f_x : y \mapsto f(x,y)$ を考えると，X から $\mathbb{R}$ への連続写像である（$\{x\}\times Y \simeq Y$ から）．$f_x(y) > g(x)$ となる y たちは，f_x の連続性から開集合である（$\{z \in \mathbb{R} \mid z > g(x)\}$ は開なので $f_x^{-1}(\{z \in \mathbb{R} \mid z > g(x)\})$ は開）．したがって，その補集合である $f_x(y) \leq g(x)$ となる y たちの集合 $P_x \subseteq Y$ は閉．P は P_x のすべての x にわたる交わりなので閉集合．

(4-2) そのような y を一つとる．第 1 段 : $h_y(x) := g(x) - f(x,y)$ とおくと h_y はコンパクト空間 X 上で連続関数なので最小値 $\epsilon^* = \min_{x\in X} h_y(x)$ が存在する．つねに $h(x) > 0$ なので，$\epsilon^* > 0$ である．したがって，y をすこし動かしても $f(x,y) < g(x)$ $(\forall x)$ は，保たれるような気がする．

第 2 段 : 任意の $y \in Y$ に対して，$h(y) := \min_{x\in X} h_y(x)$ と定義する．$h : Y \to \mathbb{R}$ が連続であることをしめす．それがいえると，$h(y) = \epsilon > 0$ なら，ある y の近傍 U が存在して，$|h(y') - h(y)| < \epsilon$ $(\forall y' \in U)$ なので $h(y') > 0 (\forall y' \in U)$ つまり $\min_x f(x,y') - g(x) > 0$ $(\forall y' \in U)$．これは，$U \subseteq P$ を意味している．つまり y は内点．

$h : Y \to \mathbb{R}$ が連続であること : $F(x,y) := g(x) - f(x,y)$ と定義すると $h(y) = \min_{x\in X} F(x,y)$ である（min はいつも達成）．$y \in Y$ を任意に 1 つとる．$\epsilon > 0$ も任意に 1 つとる．F は連続なので，任意の $x \in X$ に対して，(x,y) のある開近傍 $Z_x \subseteq X \times Y$ がとれて，$|F(x,y) - F(x',y')| \leq \epsilon$ $((x',y') \in Z_x)$ となる．ここで，$Z_x = U_x \times V_x$, U_x は X で開，V_x は Y で開，を仮定できる（直積位相の議論）．すべての $U_x (\ni x)$ は，X の開被覆である．したがって，X のコンパクト性から有限個の $U_{x_1}, U_{x_2}, \ldots, U_{x_m}$ がとれて $X = \bigcup_{i=1}^m U_{x_i}$ となる．一方，$V := V_{x_1} \cap V_{x_2} \cap \cdots \cap V_{x_m}$ は y の開近傍である (有限個の開集合の交わり)．よって，任意の $y' \in V$ に対して，$h(y') = F(x',y')$ (x' で min 達成) とすると，$(x',y') \in U_{x_i} \times V_{x_i}$ とすると，$h(y) - h(y') \leq F(x',y) - F(x',y') \leq \epsilon$．一方で，$h(y) = F(x,y)$ (x で min 達成) とすると $(x,y') \in U_{x_j} \times V_{x_j}$ として，$h(y') - h(y) \leq F(x,y') - F(x,y) \leq \epsilon$ (こっちはやさしい方向，上が非自明)．よって，h は連続．

注意 : (4-2) は想定してたより難しかったので第 2 段へ向かうところまで解けていれば満点とします．第 2 段も出来た人（あるいは別のやり方で完答した人）は，優上へむけた加点とします．$X = S^{n-1}$, $Y = \mathbb{R}^n$ で $f(x,y) = \langle x,y \rangle$ の場合をイメージしてました．このときは，第 1 段で $\epsilon^* > 0$ がとれたら，y を中心とする半径 ϵ^* の開球 B を考えるとダイレクトに $B \subseteq P$ がいえる．

問題 5. 位相空間 X が連結位相空間 Y とホモトピー同値のとき，X も連結か？理由をつけて答えよ．

[解答]X も連結である．$f : X \to Y$, $g : Y \to X$ をホモトピー同値写像とする．X の任意の 2 点 x, y を含む連結集合の存在を示す．Y は連結なので，$g(Y)$ は，$g \circ f(x), g \circ f(y)$ を含む連結集合である．$g \circ f$ は恒等写像 I_X にホモトピー同値なので，そのホモトピーにそって x と $g \circ f(x)$ を結ぶパス P，y と $g \circ f(y)$ を結ぶパス P' が得られる．$P \cup g(Y) \cup P'$ が x, y を含む連結集合である．

問題 6. ここまでの授業に対する感想，意見，要望を述べよ（減点することはありません）．