幾何数理工学ノート

位相空間：連結性と弧状連結性

平井広志

東京大学工学部 計数工学科 数理情報工学コース

東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻

hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

協力：池田基樹（数理情報学専攻 D1）

3　連結性と弧状連結性

3.1　連結性

定義 3.1. 位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ が連結 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\mathfrak{O} \cap \mathfrak{A} = \{\emptyset, X\}$.

すなわち，自明な $\emptyset, X$ 以外には開かつ閉の集合が存在しないという意味である．X が非連結とは，$O \neq \emptyset, X$ なる開集合 $O \in \mathfrak{O}$ が存在して $X - O \in \mathfrak{O}$ を満たすことと同値である．このとき，X は（部分位相空間）O と $X - O$ の直和と同相となる．

演習 3.1. これを証明せよ．

定義 3.2. 部分集合 $A \subseteq X$ が連結 $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ A が X の部分位相空間（相対位相）として連結.

次の命題は，連結性は連続写像によって不変な性質（すなわち位相的性質（同相写像によって不変））であることを意味する.

命題 3.3. X, Y を位相空間とする．写像 $f : X \to Y$ を連続，$A \subseteq X$ を連結とすると $f(A)$ は連結.

証明. f のかわりに $f|_A$ を考えることで，$A = X$ と仮定してよい．$B \subseteq f(X)$ を（$f(X)$ の相対位相で）開かつ閉集合にとる．$B = \emptyset$ か $B = f(X)$ が成り立つことを示せばよい．相対位相の定義より，Y の開集合 G，閉集合 F が存在して $B = G \cap f(X) = F \cap f(X)$ と書ける．すると

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(G) \cap f^{-1}(f(X)) = f^{-1}(F) \cap f^{-1}(f(X))$$

で，$f^{-1}(f(X)) = X$ より，

$$f^{-1}(B) = f^{-1}(G) = f^{-1}(F)$$

となる．f の連続性より $f^{-1}(G), f^{-1}(F)$ はそれぞれ X において開，閉であるから，$f^{-1}(B)$ は開かつ閉である．X の連結性より $f^{-1}(B) = \emptyset$ か $f^{-1}(B) = X$ が成り立つ．前者の場合，$B = \emptyset$ である．後者の場合，$B = f(X)$ である． □

命題 3.4. $A, B \subseteq X$ が共に連結で $A \cap B \neq \emptyset$ ならば $A \cup B$ は連結.

証明． $N \subseteq A \cup B$ を（$A \cup B$ の相対位相で）開かつ閉集合にとる．すると X の開集合 G，閉集合 F で $N = G \cap (A \cup B) = F \cap (A \cup B)$ を満たすものが存在する．このとき

$$N \cap A = G \cap A = F \cap A$$

であるから，$N \cap A$ は A で開かつ閉．A の連結性より $N \cap A = \emptyset$ か $N \cap A = A$ となる．同様に $N \cap B$ も $N \cap B = \emptyset$ か $N \cap B = B$ を満たす．もし $N \cap A = \emptyset$ なら，$A \cap B \neq \emptyset$ より $N \cap B = B$ はありえない．よって $N \cap B = \emptyset$ が成り立つ．$N \cap B = \emptyset$ ならば $N \cap A = \emptyset$ が成り立つことも同様に言える．したがって $N \cap A = N \cap B = \emptyset$ か，$N \cap A = A$ かつ $N \cap B = B$ のどちらかが成り立ち，前者の場合は $N = \emptyset$，後者の場合は $N = A \cup B$ となる． □

同様に次の命題も示せる．

命題 3.5. A_λ $(\lambda \in \Lambda)$ が全て連結で $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \neq \emptyset$ ならば，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ は連結.

連結な集合で位相空間を分割することができる．

定義 3.6 (連結成分)**.** X 上の二項関係 $\sim$ を

$$x \sim y \overset{\text{def}}{\iff} \exists A \subseteq X : \text{連結},\ x \in A,\ y \in A$$

と定義すると，$\sim$ は同値関係になる．実際，反射律 $x \sim x$ は $\{x\}$ が連結であることから従う．推移律は，$x \sim y$ ならば $x, y \in A$ なる連結集合 A，$y \sim z$ ならば $y, z \in B$ なる連結集合 B が存在し，$A \cap B \ni \{y\}$ より命題 3.4 が使えて $x, z \in A \cup B$ なる

連結集合 $A \cup B$ が得られる．この同値関係 $\sim$ による同値類を X の**連結成分**という．$x \in X$ を含む連結成分を C_x で表す．

命題 3.7. C_x は x を含む最大の連結部分集合．

証明. x を含む任意の連結集合 A について，任意の $y \in A$ は $x \sim y$ を満たすので $A \subseteq C_x$ となる．よって $\bigcup\{A \mid x \in A,\ A \text{ は連結 }\} \subseteq C_x$ である．逆に，任意の $y \in C_x$ について $x, y \in A$ なる連結集合 A が存在するので，結局 $C_x = \bigcup\{A \mid x \in A,\ A \text{ は連結 }\}$ が成り立つ．命題 3.5 より C_x は連結だから，命題が成り立つ． $\square$

注意 3.8. $X = \bigcup_x C_x$ (非交差和) となるが，$X = \coprod_x C_x$ (直和) となるとは限らない．有理数の集合 $\mathbb{Q}$ に $\mathbb{R}$ からの相対位相をいれてえられる位相空間を考えてみよ．

命題 3.9 (中間値の定理)**.** X が連結, $f : X \to \mathbb{R}$ が連続で, $x, y \in X$ が $f(x) < f(y)$ を満たすとすると，$f(x) < \alpha < f(y)$ を満たす任意の α について，$f(z) = \alpha$ なる $z \in X$ が存在．

証明. $f^{-1}(\alpha) = \emptyset$ と仮定して矛盾を導く．f の連続性から $M := f^{-1}((-\infty, \alpha))$ は開集合である．また，$f^{-1}(\alpha) = \emptyset$ より $M = f^{-1}((-\infty, \alpha])$ なので，M は閉集合でもある．$x \in M \not\ni y$ は X の連結性に矛盾する． $\square$

3.2 弧状連結性

弧状連結性に入るまえに次の（明らかに見える）性質に注意する．

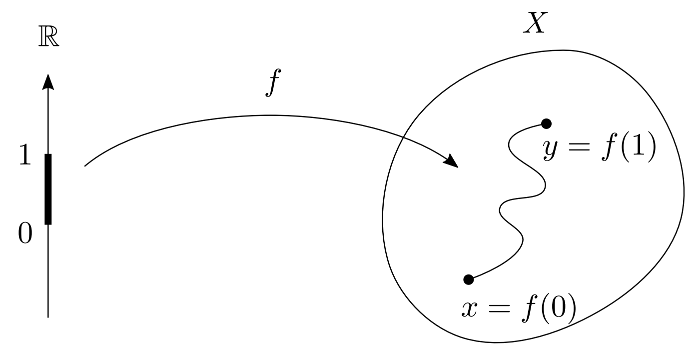

図 1: 弧状連結性.

補題 3.10. $[a,b]$ $(a<b)$ は $\mathbb{R}$ で連結.

証明. 空でない $\mathbb{R}$ の開集合 O, O' が $O \cap O' = \emptyset$, $[a,b] = (O \cap [a,b]) \cup (O' \cap [a,b])$ を満たすとする．一般性を失わず $a \in O$ を仮定する．$O' \cap [a,b] \neq \emptyset$ として矛盾を導く．$c := \sup\{x \mid [a,x] \subseteq O\}$ とすると，O と O' は開集合なので $a < c < b$ である．また

(i) 任意の $\epsilon > 0$ について $c - \epsilon \notin O'$（$c - \epsilon \in O$ より）.

(ii) 任意の $\epsilon > 0$ について $c + \epsilon \notin O$.

となる．すると，$c \in O$ ならば (ii) より O が開集合であることに矛盾し，$c \in O'$ ならば (i) より O' が開集合であることに矛盾する． □

定義 3.11. 位相空間 X が**弧状連結** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall x, y \in X,\ \exists f : [0,1] \to X :$ 連続, $f(0) = x,\ f(1) = y$.

上の定義で，$[0,1]$ には $\mathbb{R}$ の部分集合としての通常の位相が入っているものとする．f あるいは f の像を**パス**と呼ぶ（図 1）.

命題 3.12. X が弧状連結ならば X は連結.

証明. 命題 3.3 と補題 3.10 より $f([0,1])$ は連結なので，任意の $x, y \in X$ についてそれを含む連結集合が存在．すなわち $x \sim y$ なので，結局 $C_x = X$. □

一般には，X が連結だからといって弧状連結とは限らない.

演習 3.2. そのような例を与えよ.

定義 3.13. 部分集合 $A \subseteq X$ が**弧状連結** $\overset{\text{def}}{\iff}$ A が X の部分位相空間として弧状連結.

命題 3.14. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ を開集合とすると，

$$A \text{ が弧状連結} \iff A \text{ が連結}.$$

証明. $\Leftarrow$ だけ示せばよい．$x \in A$ を任意に取る．$O \subseteq A$ を x とパスで結ばれる点全体と定義する．まず O は開であることが分かる．実際，A が開集合なので，任意の $y \in O$ に対して $\delta > 0$ が存在して $N(y;\delta) \subseteq A$ となる．$N(y;\delta)$ 内の点 z と y は（$N(y;\delta)$ が凸集合なので）パスで結ぶことができ，pasting lemma より，x と z を結ぶパスが存在する（図 2)．よって $N(y;\delta) \subseteq O$ が成り立つ.

さらに，$A - O$ が開であることも言える．任意の $y \in A - O$ を取ると $\delta > 0$ が存在して $N(y;\delta) \subseteq A$ となる．$O \cap N(y;\delta) \neq \emptyset$ なら，$z \in O \cap N(y;\delta)$ を経由して x から y までのパスが作れる．これは $y \in A - O$ に反するので，結局 $N(y;\delta) \subseteq A - O$ であり，$A - O$ は開である.

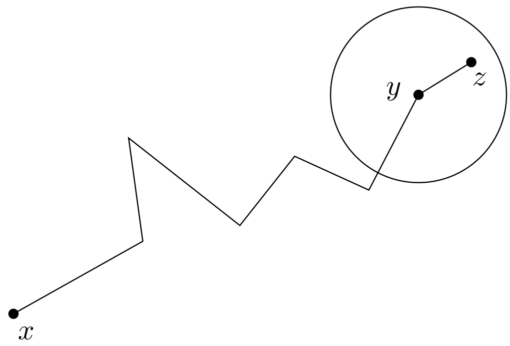

図 2: パスの延長.

A は連結で O は非空なので $A = O$ となる．すなわち全ての A の点同士は x を経由してパスで結ばれるので，A が弧状連結であることが言えた． □

命題 3.15. $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}^k$ $(k \geq 2)$ は同相でない.

証明. もしも同相写像 $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$ が存在したとする．すると，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して，φ は，$\mathbb{R} \setminus \{a\}$ から $\mathbb{R}^k \setminus \{\varphi(a)\}$ への同相写像を誘導する．しかし，$\mathbb{R} \setminus \{a\} = (-\infty, a) \cup (a, \infty)$ は，連結ではない．一方，$\mathbb{R}^k \setminus \{\varphi(a)\}$ は，弧状連結で，特に連結である．これは，連続写像が連結性を保存するという性質に矛盾する． □

3.3 その他の性質

命題 3.16. X, Y が連結ならば $X \times Y$ は（直積位相で）連結.

証明. 任意の $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ について $C_{(x,y)} = C_{(x',y')}$ が成り立つことを示せばよい．Y と $\{x\} \times Y$ は同相である．同相写像は，$y \mapsto (x, y)$ で与えられる（$\{x\} \times Y$ の開集合と Y の開集合は一対一に対応するので）．よって，Y の連結性から $\{x\} \times Y$ も連結になる．同様に，X の連結性から $X \times \{y'\}$ も連結である．し

たがって $(x,y) \sim (x,y') \sim (x',y')$ より $(x,y) \sim (x',y')$ が帰結される． □

命題 3.17. $A, B \subseteq X$ に対し $A \subseteq B \subseteq \overline{A}$ を仮定する．このとき，A が連結ならば B は連結．特に，連結集合の閉包は連結．

証明. $B' \subseteq B$ を（B の相対位相で）開かつ閉集合にとる．$B' = \emptyset$ か $B' = B$ が成り立つことを示せばよい．すると X の開集合 G, 閉集合 F で $B' = G \cap B = F \cap B$ を満たすものが存在する．$A \subseteq B$ より

$$A \cap B' = G \cap A = F \cap A$$

となるから，$A \cap B'$ は A において開かつ閉である．A の連結性より $A \cap B' = \emptyset$ か $A \cap B' = A$ となる．前者の場合は $G \cap A = \emptyset$ より $X - G \supseteq A$ となり，$X - G$ が閉なので $X - G \supseteq \overline{A}$ を得る．よって

$$B' = G \cap B \subseteq G \cap \overline{A} = \emptyset$$

より $B' = \emptyset$ となる．後者の場合は $F \supseteq A$ であり，F が閉なので $F \supseteq \overline{A} \supseteq B$ を得る．よって

$$B' = F \cap B = B$$

となる． □

系 3.18. 連結成分 C_x は閉集合．

開集合とはかぎらないという点に注意する．

命題 3.19. X, Y が弧状連結ならば $X \times Y$ が弧状連結.

証明. 任意の 2 点 $(x, y), (x', y') \in X \times Y$ について, (x, y) と (x, y') を結ぶ $\{x\} \times Y$ 内のパス, (x, y') と (x', y') を結ぶ $X \times \{y'\}$ 内のパスを繋ぐことで, (x, y) と (x', y') を結ぶパスが得られる. $\square$

演習 3.3. 上のいくつかの命題の「連結」を「弧状連結」に変えても成立するかどうか議論せよ.