

# 幾何数理工学ノート

## 位相空間：コンパクト性

平井広志

東京大学工学部 計数工学科 数理情報工学コース

東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻

hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

協力：池田基樹（数理情報学専攻 D1）

### 4 コンパクト性

$(X, \mathfrak{D})$  を位相空間とし，部分集合  $A \subseteq X$  を考える．集合族  $\mathfrak{C} \subseteq 2^X$  が  $A \subseteq \bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C$  を満たすとき， $\mathfrak{C}$  を  $A$  の被覆という． $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{D}$  なら開被覆という．

**定義 4.1.**  $A \subseteq X$  がコンパクト  $\stackrel{\text{def}}{\iff} A$  の任意の開被覆  $\mathfrak{C}$  について， $A \subseteq O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_k$  を満たす有限部分開被覆  $O_1, O_2, \dots, O_k \in \mathfrak{C}$  が存在．

**定義 4.2.** 位相空間  $(X, \mathfrak{D})$  がコンパクト空間  $\stackrel{\text{def}}{\iff} X$  自体がコンパクト．

$A \subseteq X$  がコンパクトであることと， $(A, \mathfrak{D}_A)$  ( $\mathfrak{D}_A$  は相対位相) がコンパクトであることは同値である．

補題 4.3.  $A_1, A_2, \dots, A_k \subseteq X$  がコンパクトなら,  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  もコンパクト.

証明.  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  の任意の開被覆  $\mathfrak{C}$  は  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots, k$ ) の開被覆でもあるから,  $A_j \subseteq O_{j,1} \cup O_{j,2} \cup \dots \cup O_{j,k_j}$  を満たす有限部分開被覆  $O_{j,1}, O_{j,2}, \dots, O_{j,k_j} \in \mathfrak{C}$  が存在する.  $\{O_{j,i} \mid 1 \leq j \leq k, 1 \leq i \leq k_j\}$  は  $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k$  の有限開被覆になる. □

補題 4.4.  $(X, \mathfrak{D})$  がコンパクトなら, 閉集合  $A \in \mathfrak{A}$  はコンパクト.

証明.  $A$  の任意の開被覆  $\mathfrak{C}$  と  $\{X - A\}$  の和集合は  $X$  の開被覆なので,  $X$  のコンパクト性より,  $\mathfrak{C}$  の有限部分集合  $\mathfrak{C}'$  があって  $\mathfrak{C}' \cup \{X - A\}$  は,  $X$  の有限開被覆である. (正確にいうと,  $\mathfrak{C} \cup \{X - A\}$  の有限部分開被覆から,  $\{X - A\}$  を除いたものが  $\mathfrak{C}'$  である.) このとき,  $\mathfrak{C}'$  は,  $A$  の有限開被覆である. そうでないとすると,  $\mathfrak{C}' \cup \{X - A\}$  は,  $X$  を覆えない. □

補題 4.5.  $(X, \mathfrak{D})$  をコンパクトとする. 写像  $f: X \rightarrow Y$  が連続なら  $f(X)$  はコンパクト.

証明.  $\mathfrak{C}$  を  $f(X)$  の開被覆とすると,  $f^{-1}(\mathfrak{C}) := \{f^{-1}(O) \mid O \in \mathfrak{C}\} \subseteq \mathfrak{D}$  は  $X$  の開被覆になる. よって  $O_1, O_2, \dots, O_k \in \mathfrak{C}$  で  $f^{-1}(O_1) \cup f^{-1}(O_2) \cup \dots \cup f^{-1}(O_k) \supseteq X$  を満たすものが存在する.  $O_i \supseteq f(f^{-1}(O_i))$  より  $O_1 \cup O_2 \cup \dots \cup O_k \supseteq f(X)$  が成り立つ. □

補題 4.6.  $(X, d)$  を距離空間とする.  $A \subseteq X$  がコンパクトなら,  $A$  は有界な閉

集合.

ここで, 距離空間  $(X, d)$  の部分集合  $A$  が有界とは, 直径  $\delta(A) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in A\}$  が有界であることを意味する.

証明. 任意の  $x \in X$  に対し, 開集合族  $\{N(x; r) \mid r \in \mathbb{N}\}$  ( $\mathbb{N}$  は自然数全体の集合) は  $A$  の開被覆になる.  $A$  のコンパクト性から,  $r_1 < r_2 < \dots < r_k$  が存在して  $\{N(x; r_i)\}_{i=1,2,\dots,k}$  も  $A$  の開被覆になる. よって  $A \subseteq N(x; r_k)$  であり,  $\delta(A) \leq 2r_k$  となる. すなわち  $A$  は有界.

$X - A$  が開であることを示す. 任意の  $y \in X - A$  について,  $\{X - \overline{N(y; 1/r)} \mid r \in \mathbb{N}\}$  は  $A$  の開被覆になる.  $A$  のコンパクト性から,  $r_1 < r_2 < \dots < r_k$  が存在して  $\{X - \overline{N(y; 1/r_i)}\}_{i=1,2,\dots,k}$  も  $A$  の開被覆になる. したがって  $N(y; 1/r_k) \subseteq \overline{N(y; 1/r_k)} \subseteq X - A$  であり,  $X - A$  は開, すなわち  $A$  は閉となる.  $\square$

一般には逆は成り立たない.

演習 4.1. 有界閉集合がコンパクトにならない距離空間の例を挙げよ.

系 4.7.  $X$  をコンパクトな位相空間とする.  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  を連続とすると,  $\max_{x \in X} f(x)$ ,  $\min_{x \in X} f(x)$  が存在.

証明. 補題 4.5 より  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$  はコンパクトなので, 有界閉集合. 有界性より  $\sup_{x \in X} f(x)$  が存在. これは  $f(X) \subseteq \mathbb{R}$  の境界で,  $f(X)$  は閉なので,  $\sup_{x \in X} f(x) \in f(X)$ . (inf についても同様.)  $\square$

補題 4.8 (ルベグ数の補題).  $(X, d)$  をコンパクトな距離空間とする.  $\mathfrak{C}$  を開被覆

とすると,  $\delta > 0$  が存在して

$$\forall x \in X, \exists O \in \mathfrak{C}, N(x; \delta) \subseteq O$$

が成り立つ. この  $\delta$  を  $\mathfrak{C}$  に対するルベーク数という.

証明.  $X$  のコンパクト性から有限開被覆  $\{O_1, O_2, \dots, O_k\} \subseteq \mathfrak{C}$  が存在する.  $X$  上の関数を

$$f(x) := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k d(x, X - O_i) \quad (\text{ただし } d(x, X - O_i) = \inf_{y \in X - O_i} d(x, y))$$

と定義すると,  $f$  は連続になる (最後に示す). 任意の  $x \in X$  に対し  $x \in O_i$  なる  $O_i$  が存在する.  $O_i$  は開集合なので, ある  $\epsilon > 0$  があって,  $N(x; \epsilon) \subseteq O_i$ . これは,  $d(x, X - O_i) \geq \epsilon > 0$  なので,  $f(x) > 0$  が成り立つ. よって  $\delta := \min_{x \in X} f(x) > 0$  ( $\delta$  の存在は系 4.7 より) と定義すると,  $f$  の定義から任意の  $x \in X$  に対し

$$d(x, X - O_i) \geq \delta$$

を満たす  $O_i$  が存在する. この  $O_i$  は  $N(x; \delta) \subseteq O_i$  を満たす.

[ $f$  の連続性] 任意の集合  $Y \subseteq X$  について関数  $g : x \mapsto \inf_{y \in Y} d(x, y)$  が連続であることを言えばよい.  $\inf$  の定義から, 任意の  $x \in X$ ,  $\epsilon > 0$  に対し,  $z \in Y$  が存在して

$$(g(x) \leq) d(x, z) < g(x) + \epsilon/2$$

を満たす。また、任意の  $x' \in N(x; \epsilon/2)$  に対し、同様に  $z' \in Y$  が存在して

$$(g(x') \leq) d(x', z') < g(x') + \epsilon/2$$

を満たす。よって

$$\begin{aligned} g(x') &\leq d(x', z) \leq d(x', x) + d(x, z) \leq \epsilon/2 + d(x, z) < g(x) + \epsilon, \\ g(x) &\leq d(x, z') \leq d(x, x') + d(x', z') \leq \epsilon/2 + d(x', z') < g(x') + \epsilon \end{aligned}$$

となり、 $|g(x) - g(x')| < \epsilon$  を得る。すなわち  $g$  は連続。 □

**補題 4.9** (ハイネ・ボレルの被覆定理).  $\mathbb{R}$  の有界閉区間  $I = [a, b] \subseteq \mathbb{R}$  はコンパクト。

**証明.**  $a < b$  を仮定してよい (1点はずねにコンパクトなので).  $\mathfrak{C}$  を  $[a, b]$  の開被覆とする.  $I' \subseteq I$  を

$$I' := \{x \in I \mid \mathfrak{C} \text{ は } [a, x] \text{ の有限開被覆を含む}\}$$

と定義すると、 $a \in I'$  より  $I' \neq \emptyset$  である。よって  $c := \sup I' \leq b$  が存在する。このとき  $a < c$  となる (以下の議論をみるとわかる)。  $c = b$  を示すために、  $c < b$  を仮定する。  $C_0 \in \mathfrak{C}$  と  $\epsilon > 0$  の組で、  $c \in C_0$  および  $[c - \epsilon, c + \epsilon] \subseteq C_0$  を満たすものが存在する。  $c$  の定義より、有限の  $\mathfrak{C}' \subseteq \mathfrak{C}$  で  $[a, c - \epsilon] \subseteq \bigcup \mathfrak{C}'$  を満たすものがとれる。すると  $\{C_0\} \cup \mathfrak{C}'$  は  $[a, c + \epsilon]$  の有限開被覆になり、  $c$  の定義に反する。以上より  $c = b$  であり、  $b$  を含む開集合も存在するので  $b \in I'$ 。よって、  $I' = I$ 、すなわち

$I$  はコンパクトである.

□

**命題 4.10** (チコノフの定理 (有限版)). 位相空間  $X, Y$  がコンパクトなら  $X \times Y$  もコンパクト.

**証明.**  $X \times Y$  には直積位相

$$\mathfrak{D}_{X \times Y} = \{\bigcup \mathfrak{B} \mid \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{D}_X \times \mathfrak{D}_Y\}$$

が入っていることに注意する.  $X \times Y$  の開被覆

$$\mathfrak{C} := \{\bigcup \mathfrak{B}_\lambda \mid \mathfrak{B}_\lambda \subseteq \mathfrak{D}_X \times \mathfrak{D}_Y (\lambda \in \Lambda')\}$$

を任意にとる. 各  $\mathfrak{B}_\lambda$  の構成要素を展開することで, 一般性を失わず

$$\mathfrak{C} = \{U_\lambda \times V_\lambda \mid U_\lambda \in \mathfrak{D}_X, V_\lambda \in \mathfrak{D}_Y (\lambda \in \Lambda)\}$$

と仮定できる. 任意の  $x \in X$  について  $\{x\} \times Y \simeq Y$  はコンパクトだから, 有限の  $\Lambda(x) \subseteq \Lambda$  で  $\{x\} \times Y \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda(x)} U_\lambda \times V_\lambda$  を満たすものが存在する. このとき, 各  $\lambda \in \Lambda(x)$  について  $x \in U_\lambda$  を仮定できる. なぜなら,  $x \notin U_\lambda$  なら,  $U_\lambda \times V_\lambda$  は,  $\{x\} \times Y$  とは交わらないので,  $U_\lambda \times V_\lambda$  を除いても被覆であることはかわらないからである. すると

$$U_x := \bigcap_{\lambda \in \Lambda(x)} U_\lambda$$

は有限の積であるから開集合で,  $x \in U_x$  である. さらに

$$U_x \times Y \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda(x)} U_\lambda \times V_\lambda$$

が成り立つ.  $\{U_x\}_{x \in X}$  は  $X$  の開被覆であるから,  $X$  のコンパクト性から有限被覆  $U_{x_1} \cup U_{x_2} \cup \dots \cup U_{x_n} = X$  が存在する. すると

$$X \times Y = \bigcup_{1 \leq k \leq n} U_{x_k} \times Y \subseteq \bigcup_{1 \leq k \leq n} \bigcup_{\lambda \in \Lambda(x_k)} U_\lambda \times V_\lambda \subseteq X \times Y$$

であるから,  $X \times Y$  の有限開被覆が取れた. すなわち  $X \times Y$  はコンパクト.  $\square$

**命題 4.11.**  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  について,

$$X \text{ がコンパクト} \iff X \text{ が有界閉.}$$

**証明.**  $\Rightarrow$  は補題 4.6 で示した.  $X$  を有界閉とする. 有界性より  $X \subseteq [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \dots \times [a_n, b_n] \subseteq \mathbb{R}^n$  と書ける. 各  $[a_k, b_k]$  はコンパクト (補題 4.9) で, それらの直積はコンパクト (命題 4.10). よって  $X$  はコンパクト集合の部分閉集合なので, コンパクトである (補題 4.4).  $\square$

**例 4.1.** 線形計画法は一般に次のように表される.

$$\begin{aligned} & \text{Maximize } c^\top x \\ & \text{subject to } Ax \leq b. \end{aligned}$$

実行可能領域  $\{x \mid Ax \leq b\}$  は閉集合だから, さらにこれが有界であればコンパクト

トとなり，系 4.7 より最適解が存在する．

**演習 4.2.**  $\{x \mid Ax \leq b\}$  が有界でなくても， $\sup c^\top x < \infty$  なら最適解が存在する．

この事実を今まで勉強してきたことだけで証明できるか？

**命題 4.12.** 位相空間  $(X, \mathfrak{D})$  をハウスドルフ空間とする． $A \subseteq X$  をコンパクト， $x \in X - A$  とすると， $U, V \in \mathfrak{D}$  で  $A \subseteq U$ ， $x \in V$ ， $U \cap V = \emptyset$  を満たすものが存在．

**証明.** ハウスドルフ性から，任意の  $a \in A$  について  $U_a, V_a \in \mathfrak{D}$  が存在し， $a \in U_a$ ， $x \in V_a$ ， $U_a \cap V_a = \emptyset$  とできる． $\{U_a \mid a \in A\}$  はコンパクト集合  $A$  の開被覆なので，有限部分被覆  $U := U_{a_1} \cup U_{a_2} \cup \dots \cup U_{a_k} \supseteq A$  がとれる．任意の  $i = 1, 2, \dots, k$  について  $x \notin X - V_{a_i}$  なので， $x \notin \overline{U_{a_i}}$  が成り立つ．すると  $x \notin \overline{U} = \overline{U_{a_1}} \cup \overline{U_{a_2}} \cup \dots \cup \overline{U_{a_k}}$  であるから， $V := X - \overline{U}$  とおくと  $V$  は開集合で， $U \cap V = \emptyset$ ， $x \in V$  を満たす． □

**系 4.13.** 位相空間  $X$  をハウスドルフ空間， $A \subseteq X$  をコンパクトとすると， $A$  は閉集合．

**証明.** 上の命題より， $X - A$  の各点は  $X - A$  と排反な開近傍を持つ．よって  $X - A$  は開集合なので， $A$  は閉集合． □

**系 4.14.** 位相空間  $X$  をコンパクト， $Y$  をハウスドルフ空間， $f : X \rightarrow Y$  を全単射連続写像とすると， $f$  は同相写像．

**証明.** 任意の閉集合  $A \subseteq X$  について  $f(A)$  が閉集合であることを示す（このとき



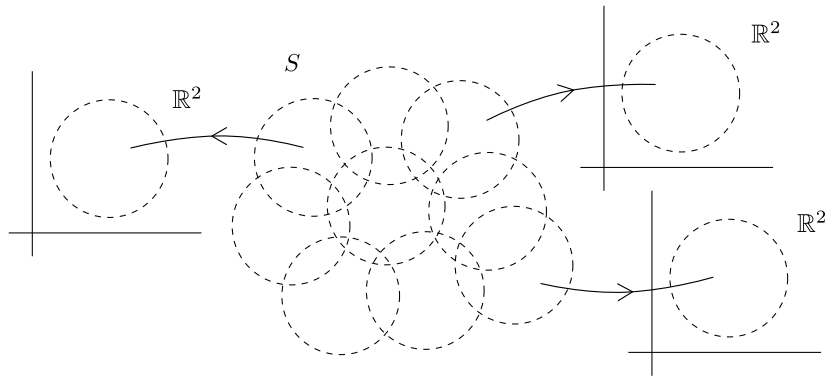


図 1: 閉曲面  $S$  を覆う座標近傍.

$f$  を閉写像という). コンパクト空間の閉集合はコンパクトなので (補題 4.4), 補題 4.5 より  $f(A)$  はコンパクト. よって  $f(A)$  は閉集合.  $\square$

**定義 4.15.** 位相空間  $X$  が局所コンパクト  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x \in X, x$  のコンパクトな近傍が存在.

$X$  がコンパクトなら局所コンパクトである (近傍として  $X$  自身が取れる).

コンパクトな 2 次元多様体のことを閉曲面という. 多様体の定義から, 閉曲面  $S$  の各点  $p \in S$  に対し,  $p$  を含む  $\mathbb{R}^2$  の開集合に同相な開集合が取れる (図 1). これを  $p$  の (2 次元) 座標近傍と呼ぶ.  $S$  のコンパクト性から, 有限個の 2 次元座標近傍で  $S$  を覆い尽くすことができる. 閉曲面の例としては, 球面  $S^2$ , トーラス  $S^1 \times S^1$ , 射影平面  $P^2$  といったものが挙げられる. 実際, 球面は  $\mathbb{R}^2$  の有界閉集合だからコンパクト, トーラスはコンパクト空間の直積だからコンパクト, 射影平面は  $P^2 \simeq S^2/\sim$  なので  $S^2$  の連続像でコンパクトである.

連結な閉曲面とはどんなものだろうか? 図 1 から分かるように, 連結な閉曲面は有限個の多角形を辺に沿って貼り合わせることで得られる. 多様体の定義から, 1 つの辺はちょうど 2 つの多角形の共通辺である. そこでどんどん多角形を貼り合

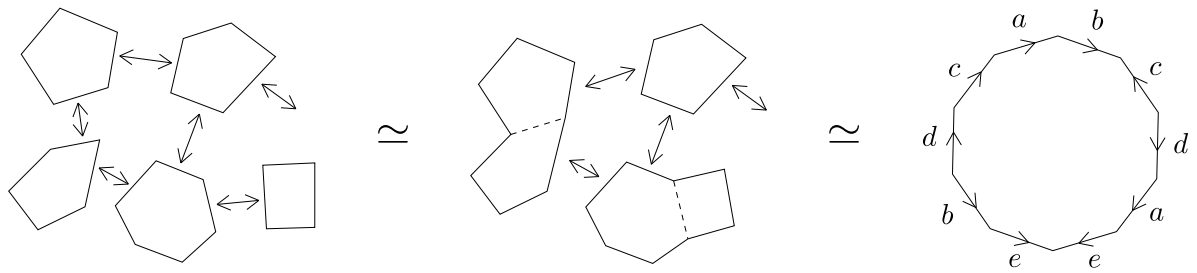


図 2: 多角形の貼り合わせによる閉曲面の構成.

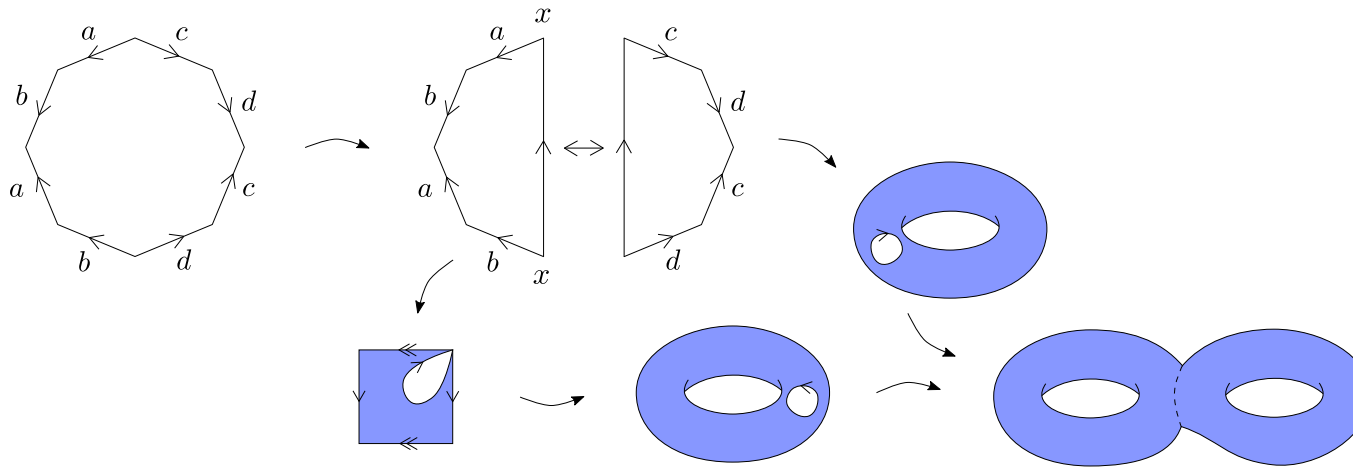


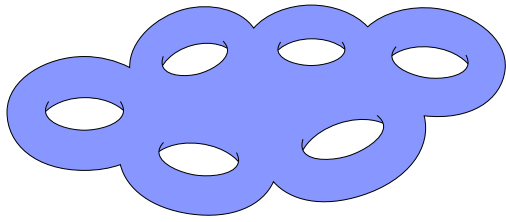
図 3: 2つのトーラスを繋げてできる閉曲面.

わせていくと、連結な閉曲面は1つの $2k$ 角形の各辺に貼り合わせの情報を入れたものと同相であることが分かる(図2). 例えば図3はトーラスを2つくっつけたような閉曲面となる.

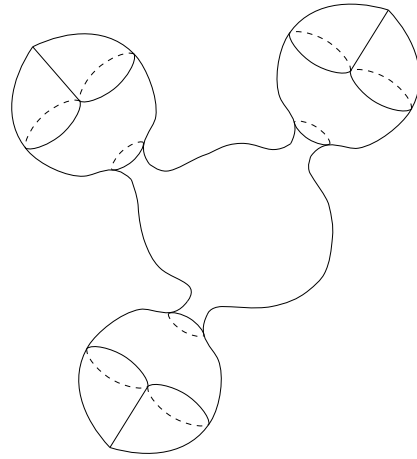
**定理 4.16** (連結閉曲面の分類定理). 連結な閉曲面は、次の2つのどちらかと同相である.

- 穴が $k$ 個の浮き輪(図4a).
- 射影平面を $k'$ 個取り付けたもの(図4b).

前者の場合の穴の個数 $k$ を種数(genus)という. 球の種数は0, トーラスの種数



(a) 穴が  $k$  個の浮き輪.



(b) 射影平面を  $k'$  個取り付けたもの.

図 4: 連結閉曲面の分類定理.

は 1 である.

**演習 4.3.** 上の定理を証明せよ.