幾何数理工学ノート
位相空間：定義と例

平井広志
東京大学工学部 計数工学科 数理情報工学コース
東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻
hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp
協力：池田基樹（数理情報学専攻 D1）

2 位相空間

2.1 位相空間の定義

X を非空な集合とする．X に位相（topology）を入れることで「空間」にすることができる．ここで，位相を入れるとは，X の開集合系を指定することである．

定義 2.1. 次の (O1–3) を満たす X の部分集合族 $\mathfrak{O} \subseteq 2^X$ を X の**開集合系**という：

(O1) $X \in \mathfrak{O},\ \emptyset \in \mathfrak{O}$.

(O2) $O_1, O_2, \ldots, O_k \in \mathfrak{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k \in \mathfrak{O}$.

(O3) 任意の $\lambda \in \Lambda$ について $O_\lambda \in \mathfrak{O}$ ならば，$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$（$\Lambda$ は任意の集合）.

$\mathfrak{O}$ に含まれる集合 $O \in \mathfrak{O}$ を**開集合**という．

開集合系 $\mathfrak{O}$ が指定された集合 X を位相空間という．開集合系を明示して $(X, \mathfrak{O})$ と表すこともある．

例 2.1. $\mathfrak{O} = 2^X$ を**離散位相**，$\mathfrak{O} = \{\emptyset, X\}$ を**密着位相**という．距離空間 (X, d) に対し

$$\mathfrak{O} := \{O \subseteq X \mid \forall x \in O,\ \exists \epsilon > 0,\ N(x;\epsilon) \subseteq O\}$$

と定義すると，すでに見たように $\mathfrak{O}$ は開集合系である．

定義 2.2. $A \subseteq X$ とする．

- A の**内部** $A^\circ := \bigcup \{O \in \mathfrak{O} \mid O \subseteq A\}$ $(\in \mathfrak{O})$（A に含まれる最大の開集合）.

- $x \in X$ が A の**内点** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} x \in A^\circ$.

X の開集合の補集合を**閉集合**という．閉集合全体の集合（閉集合系）$\mathfrak{A}$ は以下の条件 (A1–3) を満たす．

(A1) $X \in \mathfrak{A},\ \emptyset \in \mathfrak{A}$.

(A2) $F_1, F_2, \ldots, F_k \in \mathfrak{A}$ ならば $F_1 \cup F_2 \cup \cdots \cup F_k \in \mathfrak{A}$.

(A3) 任意の $\lambda \in \Lambda$ について $F_\lambda \in \mathfrak{A}$ ならば，$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} F_\lambda \in \mathfrak{A}$（$\Lambda$ は任意の集合）.

定義 2.3. $A \subseteq X$ とする.

- A の**閉包** $\overline{A} := \bigcap \{F \in \mathfrak{A} \mid A \subseteq F\}$ $(\in \mathfrak{A})$（A を含む最小の閉集合）.
- $x \in X$ が A の**触点** $\overset{\text{def}}{\iff} x \in \overline{A}$.

定義 2.4. N $(\subseteq X)$ が x の**近傍** $\overset{\text{def}}{\iff} x \in N^\circ \iff \exists O \in \mathfrak{O},\ x \in O \subseteq N$.

N が開集合のとき**開近傍**という．x の近傍全体を $\mathcal{N}(x) \subseteq 2^X$ で表す.

X への位相の与え方には，開集合系以外にも様々なものが考えられる．これまで見たように，開集合系を定めると以下の集合族や写像が得られる.

1. (A1–3) を満たす閉集合系 $\mathfrak{A}$.
2. 各 $A \subseteq X$ に A° を対応させる写像 $2^X \to 2^X$（開核作用子）.
3. 各 $A \subseteq X$ に $\overline{A}$ を対応させる写像 $2^X \to 2^X$（閉包作用子）.
4. 各点 $x \in X$ に $\mathcal{N}(x)$ を対応させる写像 $X \to 2^{2^X}$.

2–4 の写像はそれぞれ特定の性質を満たす．例えば，閉包作用子 $\tau : 2^X \to 2^X$ は

- $\tau(\emptyset) = \emptyset$.
- $A \subseteq \tau(A)$.
- $\tau(A \cup B) = \tau(A) \cup \tau(B)$.
- $\tau(\tau(A)) = \tau(A)$.

を満たす．逆にこれらの集合族や写像のいずれか 1 つを決めると，(O1–3) を満たす開集合系が自然に定まる．例えば閉包作用子 τ からは $\mathfrak{A} = \{A \subseteq X \mid \tau(A) = A\}$ として閉集合系 $\mathfrak{A}$ が定まり，全ての閉集合の補集合を取ると開集合系が得られる．この開集合系のもとで定義される閉包作用子は τ と一致することが確かめられる．詳細は演習で扱う.

2.2 連続写像・同相写像

$(X, \mathfrak{O}_X)$, $(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間とする．X の閉集合系を $\mathfrak{A}_X$，Y の閉集合系を $\mathfrak{A}_Y$ で表す.

定義 2.5. 写像 $f : X \to Y$ が $x \in X$ で**連続**

$$\overset{\text{def}}{\iff} \text{任意の } f(x) \text{ の近傍 } N \text{ について，} f^{-1}(N) \text{ は } x \text{ の近傍.}$$

距離空間の場合，連続性は次のように言い換えられる．

$$\begin{aligned} f \text{ が } x \in X \text{ で連続} &\iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ d_X(x,y) < \delta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) < \epsilon \\ &\iff \forall \epsilon > 0,\ \exists \delta > 0,\ N(x;\delta) \subseteq f^{-1}(N(f(x);\epsilon)) \\ &\iff f(x) \text{ の任意の近傍の逆像は } x \text{ の近傍.} \end{aligned}$$

定理 2.6. 以下は同値.

(1) f は X の各点で連続.

(2) $\forall O \in \mathfrak{O}_Y,\ f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$.

(3) $\forall F \in \mathfrak{A}_Y,\ f^{-1}(F) \in \mathfrak{A}_X$.

証明. (1) $\Rightarrow$ (2)　$O \in \mathfrak{O}_Y$ に対し，$x \in f^{-1}(O)$ を任意に取る（存在するなら，しないなら $f^{-1}(O) = \emptyset \in \mathfrak{O}_X$ で OK）．O は $f(x)$ の（開）近傍であるから，(1) より x の開近傍 $O_x \subseteq f^{-1}(O)$ が存在する．すると

$$f^{-1}(O) = \bigcup_{x \in f^{-1}(O)} \{x\} \subseteq \bigcup_{x \in f^{-1}(O)} O_x \subseteq f^{-1}(O)$$

であるから，上の式は全て等号で成り立つ．各 O_x は開集合であるから，その無限和 $f^{-1}(O)$ も開集合.
(2) $\Rightarrow$ (3)　$F \in \mathfrak{A}_Y$ とすると $Y - F \in \mathfrak{O}_Y$ で，(2) より $f^{-1}(Y - F) \in \mathfrak{O}_X$．$f^{-1}(Y-F) = X - f^{-1}(F)$ より $f^{-1}(F) \in \mathfrak{A}_X$.
(3) $\Rightarrow$ (2)　$O \in \mathfrak{O}_Y$ とすると $Y - O \in \mathfrak{A}_Y$ で，(3) より $f^{-1}(Y - O) \in \mathfrak{A}_X$．$f^{-1}(Y-O) = X - f^{-1}(O)$ より $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$.
(2) $\Rightarrow$ (1)　$x \in X$ と $f(x)$ の近傍 N を任意に取る．N の内部を $O := N^\circ$ とおくと $f(x) \in O$．(2) より $f^{-1}(O) \in \mathfrak{O}_X$ であり，$x \in f^{-1}(O) \subseteq f^{-1}(N)$ となる．したがって，$f^{-1}(N)$ は x の近傍.　□

定義 2.7.

$$f : X \to Y \text{ が**連続**} \overset{\text{def}}{\iff} \text{定理 2.6 の (1) から (3) のどれかの条件を満たす.}$$

$$f : X \to Y \text{ が**同相**} \overset{\text{def}}{\iff} f \text{ が全単射で連続，かつ逆写像 } f^{-1} \text{ が連続.}$$

X と Y の間に同相写像があるとき，X と Y は**同相**，**位相同型**といい，$X \simeq Y$ などと表す.

演習 2.1. 全単射連続写像で同相でないものの例を与えよ.

定義 2.8 (位相の強弱)**.** X 上の 2 つの位相 $\mathfrak{O}, \mathfrak{O}'$ について，

$$\mathfrak{O} \text{ は } \mathfrak{O}' \text{ より**弱い位相**（} \mathfrak{O}' \text{ は } \mathfrak{O} \text{ より**強い位相**）} \overset{\text{def}}{\iff} \mathfrak{O} \subseteq \mathfrak{O}'.$$

$\mathfrak{O}$ が $\mathfrak{O}'$ より弱い位相であるとき，関数 $f : X \to Y$ は $\mathfrak{O}$ で連続ならば $\mathfrak{O}'$ でも連続となる.

2.3　位相の構成

定義 2.9 (誘導位相)**.** X を集合，$(Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間，$f : X \to Y$ を任意の写像とする．このとき，f によって誘導される**誘導位相**を

$$\mathfrak{O}_X := \{f^{-1}(O) \mid O \in \mathfrak{O}_Y\}$$

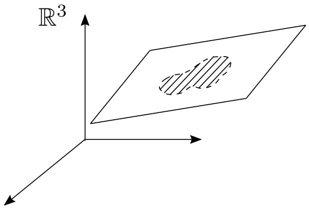

図 1: $\mathbb{R}^3$ の平面上にある集合．相対位相では内点になる点も，$\mathbb{R}^3$ の集合としては内点でない．

と定義すると，$(X, \mathfrak{O}_X)$ は位相空間になる（$f^{-1}(O \cup O') = f^{-1}(O) \cup f^{-1}(O')$ および $f^{-1}(O \cap O') = f^{-1}(O) \cap f^{-1}(O')$ に注意する）．

$\mathfrak{O}_X$ は f を連続にするような最小の位相である．

定義 2.10 (相対位相)**.** $(X, \mathfrak{O}_X)$ を位相空間，$Z \subseteq X$ を X の部分集合とする．このとき

$$\mathfrak{O}_Z := \{O \cap Z \mid O \in \mathfrak{O}_X\}$$

とおくと，$(Z, \mathfrak{O}_Z)$ は位相空間になる．$(Z, \mathfrak{O}_Z)$ を $(X, \mathfrak{O}_X)$ の**部分空間**，**部分位相空間**という．なお，閉集合系 $\mathfrak{A}_Z$ は，

$$\mathfrak{A}_Z = \{F \cap Z \mid F \in \mathfrak{A}_X\}$$

となることに注意する（$Z - O \cap Z = Z \cap (X - O)$ より）．

Z の相対位相は，自然な単射 $Z \hookrightarrow X$ による誘導位相と一致する．$Z \subseteq X$ の**相対的内点**は Z の相対位相による位相空間での内点のことをいう（図 1）．

定義 2.11 (直積位相)**.** $(X, \mathfrak{O}_X), (Y, \mathfrak{O}_Y)$ を位相空間とする．直積 $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X,\ y \in Y\}$ に位相を与えるとき，単純に

$$\mathfrak{B} := \{O \times O' \mid O \in \mathfrak{O}_X,\ O' \in \mathfrak{O}_Y\}\ (\subseteq 2^{X \times Y})$$

と定義しただけでは $\mathfrak{B}$ は開集合の条件 (O3) を満たすとは限らない．そこで，$\mathfrak{B}$ が**生成する**位相を

$$\mathfrak{O}_X \divideontimes \mathfrak{O}_Y := \{\textstyle\bigcup_{W \in \mathfrak{B}'} W \mid \mathfrak{B}' \subseteq \mathfrak{B}\}$$

と定義すると，$(X \times Y, \mathfrak{O}_X \divideontimes \mathfrak{O}_Y)$ は位相空間になる．これを X と Y の**直積位相**という．3 つ以上の位相空間に対する直積位相も同様に定義される．

例 2.2. $\mathbb{R}^2$ において，d_2 の下での x の ϵ-近傍（$\epsilon > 0$）は d_∞ の下での ϵ'-近傍（$\epsilon' > 0$）を含む．よって，$\mathbb{R}^2$ の開集合は d_∞ の近傍たちの和集合で書ける．d_∞ の下での ϵ'-近傍はちょうど，上の定義で $X = Y = \mathbb{R}$ と取ったときの $\mathfrak{B}$ の元である．したがって，$\mathbb{R}^2$ の位相は $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の直積位相と等しい（図 2）．

定義 2.12 (位相空間の直和)**.** 集合の族 X_i $(i \in \Lambda)$ に対して，**直和** $\coprod_{i \in \Lambda} X_i$ は，

$$\coprod_{i \in \Lambda} X_i := \bigcup_{i \in \Lambda} X_i \times \{i\}$$

で定義される．さて，各 X_i に位相 $\mathfrak{O}_\mathrm{i}$ が入っているとすると，直和 $\coprod_{i \in \Lambda} X_i$ にも自然に位相が入る：

$$O \subseteq \coprod_{i \in \Lambda} X_i \text{が開} \overset{\text{def}}{\iff} O = \bigcup_{i \in \Lambda} O_i \times \{i\}\ (\exists O_i \in \mathfrak{O}_\mathrm{i}) \text{ とかける．}$$

X_i たちが同じ空間，例えば $\mathbb{R}^n$，に入っているとき，$\coprod_{i \in \Lambda} X_i$ と，$\bigcup_{i \in \Lambda} X_i$ に違いに注意する．直和は，交わりを持たないようにばらばらに和をとったというイメージである．

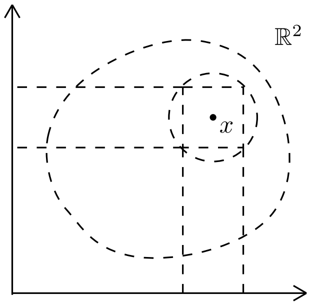

図 2: $\mathbb{R}^2$ が $\mathbb{R}$ と $\mathbb{R}$ の直積位相に等しいことの説明.

2 つの位相空間 X, Y を貼り合わせて位相空間を作ることを考える．これは次のような手順で行われる．まず X と Y の直和 $X \sqcup Y$ を考え，次に同一視したい点たちを同値関係 $\sim$ で同一視し，商集合 $(X \sqcup Y)/\sim$ を考える．商集合には商位相と呼ばれる位相を入れる．

定義 2.13 (商位相)**.** $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間，$\sim$ を X 上の同値関係とする．（同値関係とは，次の 3 つの性質

- $x \sim x$.
- $x \sim y \Rightarrow y \sim x$.
- $x \sim y,\ y \sim z \Rightarrow x \sim z$.

を満たす二項関係のことである．）X の $\sim$ による商集合 $X/\sim$ を考えると，各元 $x \in X$ にその同値類 $[x]$ を対応させる自然な射影 $\varphi : X \to X/\sim$ が定義される．この射影を用いて

$$\mathfrak{O}/\sim := \{H \subseteq X/\sim \mid \varphi^{-1}(H) \in \mathfrak{O}\}$$

と定義すると，$(X/\sim, \mathfrak{O}/\sim)$ は位相空間になる．これを**商位相**という．実際，(O1) は明らかに成り立ち，(O2,3) は $\varphi^{-1}(H \cup H') = \varphi^{-1}(H) \cup \varphi^{-1}(H')$ および $\varphi^{-1}(H \cap H') = \varphi^{-1}(H) \cap \varphi^{-1}(H')$ から従う．

あとで出てくる単体複体という位相空間は，いくつかの（ユークリッド空間の）単体たちを貼り合わせて構成されるが，形式的には，直和＋商空間の構成が用いられる（例 2.4）．

以下は，連続関数の貼り合わせに関する補題で，以降よく使われる．

命題 2.14 (Pasting Lemma)**.** X, Y を位相空間，$A, B \subseteq X$ を $X = A \cup B$ を満たす閉集合とし，X からの相対位相が入っている．また，$f : A \to Y$ と $g : B \to Y$ を連続写像とする．このとき，もし $f(x) = g(x)$ $(\forall x \in A \cap B)$ ならば，関数 $h : X \to Y$ を

$$h(x) := \begin{cases} f(x) & \text{if } x \in A, \\ g(x) & \text{if } x \in B \end{cases}$$

と定義（well-defined）すると h は連続になる．

証明. $C \subseteq Y$ を閉集合とすると，$h^{-1}(C) = f^{-1}(C) \cup g^{-1}(C)$．$f$ と g はそれぞれ連続なので，$f^{-1}(C)$ と $g^{-1}(C)$ はそれぞれ A と B における閉集合．相対位相の定義より，$f^{-1}(C)$ と $g^{-1}(C)$ は共に X の閉集合で，$h^{-1}(C)$ は X の閉集合． □

命題 2.15. 写像 $f : A \to X \times Y$ が $a \in A$ を $(f_1(a), f_2(a))$ に写す写像だとすると，

$$f \text{ が連続} \iff f_1 : A \to X \text{ と } f_2 : A \to Y \text{ が共に連続.}$$

証明. 自然な射影 $\pi_1 : X \times Y \to X,\ \pi_2 : X \times Y \to Y$ を

$$\pi_1((x, y)) = x,\ \pi_2((x, y)) = y$$

と定義すると，π_1, π_2 は連続．f_1 と f_2 は $f_1 = \pi_1 \circ f,\ f_2 = \pi_2 \circ f$ と表される．

($\Rightarrow$)　f_1, f_2 は連続写像同士の合成で表されるので，これらも連続である（確かめよ）．

($\Leftarrow$)　まず $U \subseteq X, V \subseteq Y$ を共に開集合とすると，

$$f^{-1}(U \times V) = f_1^{-1}(U) \cap f_2^{-1}(V)$$

は開集合になることに注意する．$O \subseteq X \times Y$ を開集合とすると

$$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \times V_\lambda \quad (U_\lambda \subseteq X,\ V_\lambda \subseteq Y : \text{開集合})$$

と表される．よって

$$f^{-1}(O) = f^{-1}(\textstyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \times V_\lambda) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(U_\lambda \times V_\lambda)$$

は開集合．　□

補題 2.16.　(1) 連続関数 $f : X \to Y,\ g : Y \to Z$ に対して，合成 $g \circ f : X \to Z$ は，連続である．

(2) 連続関数 $f : X \to Y$ と部分集合 $A \subseteq X$ に対し，f の A への制限 $f|_A : A \to Y$ は連続である．ここで A の位相は，X から相対位相．

証明. (1). 演習

(2). f の連続性より，Y の開集合 O に対して，$f^{-1}(O)$ は X の開集合である．よって，$(f|_A)^{-1}(O) = f^{-1}(O) \cap A$ なので，相対位相の定義から $(f|_A)^{-1}(O)$ は，A の開集合である．　□

TODO 連続関数に関する例題をもっと増やす．

2.4　位相空間の例

- $\mathbb{R}^n$: ユークリッド空間．位相はユークリッド距離から定義する．
- S^n : n 次元球面．以下のように定義される．位相は $\mathbb{R}^{n+1}$ からの相対位相で定義する（図 3）．

$$S^n := \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}.$$

- D^n : ディスク．以下のように定義される（図 3）．

$$D^n := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}.$$

  S^2 は D^2 の「縁」の同値関係による商位相空間と同相（図 4）．
- P^n : 射影空間．$\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ 上の同値関係

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \sim (y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}) \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha \in \mathbb{R},\ (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) = \alpha(y_1, y_2, \ldots, y_{n+1})$$

  によって

$$P^n := (\mathbb{R}^{n+1} - \{0\})/\!\sim$$

  と定義される．位相は $\mathbb{R}^{n+1}$ の相対位相と商位相で定義する．P^n について次のような同相関係が存在する（図 5, 6）．

$$\begin{aligned} P^n &\simeq S^n/\text{対蹠点を同一視} \\ &\simeq S^n_+/\text{対蹠点を同一視} \\ &\simeq D^n/\text{対蹠点を同一視}. \end{aligned}$$

- T^n : n 次元トーラス．以下のように定義される．位相は直積位相で定義する（図 7）．

$$T^n := S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1 \quad (n\text{ 個の } S^1 \text{ の直積}).$$

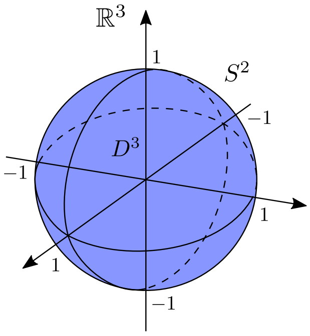

図 3: 球面 S^2 とディスク（球）D^3.

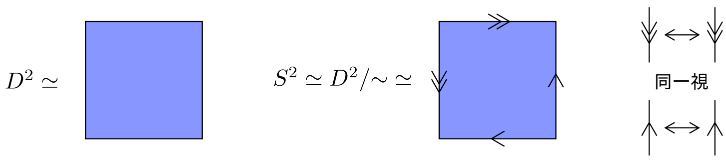

図 4: ディスク D^2 と球面 S^2 の関係.

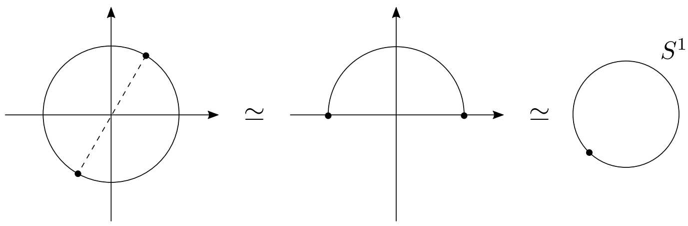

図 5: 射影空間 P^1.

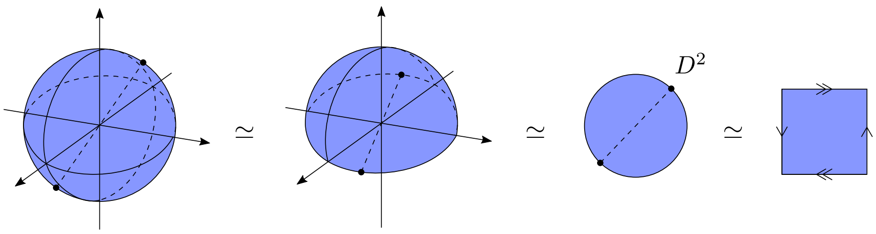

図 6: 射影空間 P^2.

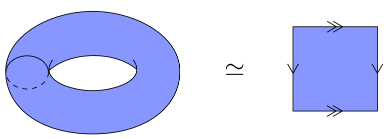

図 7: トーラス T^2.

(a) 帯.

(b) メビウスの帯.

図 8: 帯の例.

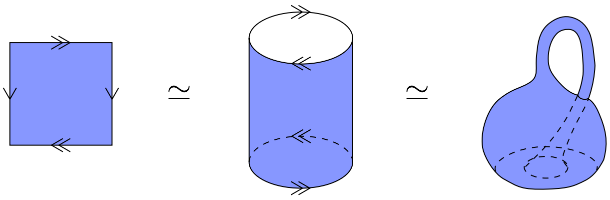

図 9: クラインの壺.

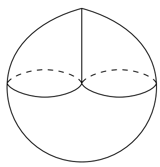

図 10: 射影空間 P^2 の $\mathbb{R}^3$ へのはめ込み.

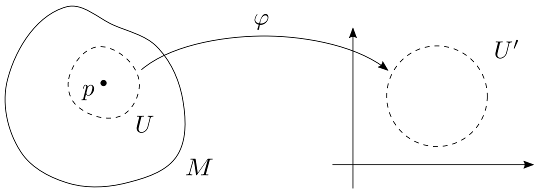

図 11: 多様体.

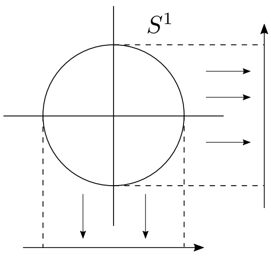

図 12: S^1 の座標近傍.

- 帯（図 8a），メビウスの帯（図 8b），クラインの壺（図 9）.

演習 2.2. P^2 の絵として図 10 のものをよく見かけるが，この意味を説明せよ.

定義 2.17. $(X, \mathfrak{O})$ がハウスドルフ空間 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $(X, \mathfrak{O})$ が位相空間で

$$\forall x, y \in X : x \neq y,\ \exists U \in \mathfrak{O},\ \exists V \in \mathfrak{O},\ x \in U,\ y \in V,\ U \cap V = \emptyset.$$

距離空間はハウスドルフ空間である.

例 2.3 (多様体 (manifold))**.** M が以下の条件を満たすとき，M を n **次元多様体**と呼ぶ（図 11）.

- M はハウスドルフ空間.
- 任意の $p \in M$ に対し，p を含む開集合 U と $\mathbb{R}^n$ の閉集合 U'，同相写像 $\varphi : U \to U'$ が存在する.

多様体の詳細は応用空間論で扱う．S^n, P^n, T^n は多様体の例である（例えば S^1 については図 12 を見よ）.

演習 2.3. 写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ に対し

$$\{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = 0\}$$

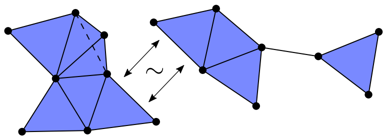

図 13: 単体複体.

が多様体となるのはどんなときか？

例 2.4 (単体複体 (simplicial complex))**.** 単体の集合を面に沿って貼り合わせて得られる空間を単体複体と呼ぶ．形式的には次のように定義される．S_λ $(\lambda \in \Lambda)$ を単体（位相空間）の集合とし，

$$X := \coprod_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (S_\lambda \times \{\lambda\})$$

と定義する．X 上に同値関係 $\sim$ を，単体同士の（面に沿った）貼り合わせによる同一視の関係として定義する．$K := X/\sim$ で定義される位相空間を**単体複体**という（図 13）．

TODO 群を用いた構成