幾何数理工学ノート
距離空間

平井広志
東京大学工学部 計数工学科 数理情報工学コース
東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻
hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp
協力：池田基樹（数理情報学専攻 D1）

0 準備

とばしてもよい．

0.1 集合と写像

集合 X の部分集合全体からなる集合（**べき集合**）を 2^X とかく．例えば，$X = \{a,b,c\}$ なら，$2^X = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,b,c\}\}$ である．

X, Y を集合，$f : X \to Y$ を写像とする．$x \in X$ の行き先が $f(x)$ であることを示す

$$x \mapsto f(x)$$

という書き方がある．この書き方で，写像 f を定義することがある．例：$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $x \mapsto 3x^2$ で定義する．

部分集合 $A \subseteq X$ に対する f の**像** $f(A)$ を

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\}$$

で定義する．$C \subseteq Y$ に対する**逆像** $f^{-1}(C)$ を

$$f^{-1}(C) := \{x \in X \mid f(x) \in C\}$$

とする．像と逆像に関して以下の性質がある（確かめよ）：

$$\begin{aligned}
f(A \cup B) &= f(A) \cup f(B), \\
f(A \cap B) &\subseteq f(A) \cap f(B), \\
f^{-1}(C \cup D) &= f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D), \\
f^{-1}(C \cap D) &= f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D), \\
f^{-1}(f(A)) &\supseteq A, \\
f(f^{-1}(C)) &\subseteq C.
\end{aligned}$$

f が**単射**であるとは，任意の異なる $x, y \in X$ に対して，$f(x) \neq f(y)$ となるときをいう．f は**全射**であるとは，任意の $z \in Y$ に対して，$f(x) = z$ となる $x \in X$ が存在するときをいう．いいかえると，$X = f^{-1}(Y)$ が成り立つときである．単射かつ全射のとき**全単射**という．このときは，任意の $z \in Y$ に対して，一意に

$x \in X$ が存在して，$f(x) = z$ となる．この x を $f^{-1}(z)$ と定義することで**逆写像** $f^{-1} : Y \to X$ が定義される．逆像との違いに注意する．

部分集合 $A \subseteq X$ に対して f の定義域を A に制限することで写像 $A \to Y$ が定義される．これを $f|_A : A \to Y$ とかく．

0.2 Inf と sup

$\mathbb{R}$ を実数の集合とする．$A \subseteq \mathbb{R}$ を空でない部分集合とする．もしも，$x \in A$ が，すべての $z \in A$ に対して，$x \geq z$（$x \leq z$）となるとき，x を A の**最大値**（**最小値**）といって，$\max A$（$\min A$）とかく．最大値，あるいは，最小値は，存在するとは限らない．

A の**上界**（**下界**）とは，任意の $z \in A$ に対して，$x \geq z$（$x \leq z$）となる $x \in \mathbb{R}$ 全体の集合のことである．このとき，A の上界には，それが空でなければ，必ず最小値が存在する．これを A の**最小上界**といって $\sup A$ とかく．$\sup A$ とは，A の上界の点 x であって，任意の $\epsilon > 0$ に対して，$x - \epsilon$ は A の上界の点でなくなるようなものである．A の上界が空のときは，$\sup A := \infty$ と定義する．もしも，$\max A$ が存在すれば，$\sup A = \max A$ である．同様に A の下界には，それが空でなければ，必ず最大値が存在する．これを A の**最大下界**といって $\inf A$ とかく．空のときは，$\inf A := -\infty$ と定義する．もしも，$\min A$ が存在すれば，$\inf A = \min A$ である．

例 0.1. $A = (a, b) \subseteq \mathbb{R}$ を開区間とすると，$\max A$ と $\min A$ は存在しないが，$\inf A = a, \sup A = b$ である．

なぜ，最小上界 sup，最大下界 inf が必ず存在するかというと，そもそも，実数とは，それらがいつも存在するように構成された数の体系だから，である．

問題 0.1. 実数の定義を与え，sup と inf がいつも存在することを示せ．

0.3 同値関係

集合 X 上の**同値関係**とは，2 項関係 $\sim$ であって，以下を満たすものである：

反射律: $x \sim x$.
対称律: $x \sim y$ なら $y \sim x$.
推移律: $x \sim y \sim z$ なら $x \sim z$.

ここで．x, y, z は X の任意の元．$x \sim y$ が成り立つとき，x と y は（$\sim$ のもとで）同値である，という．$x \in X$ の**同値類** $[x] \subseteq X$ とは，x と同値な元全体のなす集合である：

$$[x] := \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

推移律より，$[x] = [y]$ か $[x] \cap [y] = \emptyset$ が成り立つ．したがって，X は，同値類たちに分割される．これを X の**同値類分割**という．また，同値類のなす集合 $\subseteq 2^X$ を商集合といって，$X/\sim$ とかく．同値類 C 内の元 x を $C = [x]$ の**代表元**といったりする．写像 $X \ni x \mapsto [x] \in C/\sim$ を**自然な射影**という．

例 0.2. V をベクトル空間，$W \subseteq V$ を部分空間とする．2 項関係 $\sim$ を $u \sim v \Leftrightarrow u - v \in W$ で定義すると，これは V 上の同値関係である．対応する商集合を V/W とかく．$u \in V$ の同値類 $[u]$ は，$u + W = \{x + w \mid w \in W\}$ とかける．V/W にはベクトル空間の構造が入り，商ベクトル空間と呼ぶ．次の節の例 0.3 を参照せよ．

0.4 Well-defined について

定義を与えたとき，その定義が正しく定義されているか（**well-defined** か）は必ずしも自明ではなく確認を要するときがある．典型的なシチュエーションは，同値類上の演算を代表元をつかって定義する際に現れる．このときの well-defined のチェックは，その演算が代表元の取り方によらないことを示すことである．商ベクトル空間 V/W を例にとって説明する．

例 0.3. V/W がベクトル空間になることを示す．$C, D \in V/W$ の和 $C+D$ を以下で定義する：

$$C + D := [u+v] = u + v + W.$$

ここで，$u \in V$ は C の代表元，$v \in V$ は D の代表元である．つまり，$C = u + W,\ D = v + W$ である．また，定数倍は，$\alpha C := [\alpha u] = \alpha u + W$ と定義する．

このとき，この定義が well-defined であることを示そう．すなわち，代表元 u, v の取り方に依存せずに $C + D$ が決まることを示す．そのために，別の代表元 u', v' を考える．$C = u + W = u' + W$, $D = v + W = v' + W$ である．あるいは, $u \sim u'$, $v \sim v'$ ともかける．このとき, $u + u' \sim v + v'$ である．なぜなら, $u - u' \in W$, $v - v' \in W$, そして, W は部分ベクトル空間なので, $u + v - (u' + v') = (u - u') + (v - v') \in W$ となるからである．よって $C + D = [u+v] = [u' + v']$ が示され，代表元の取り方によらず，和の定義は well-defined であることがわかった．

問題 0.2. 定数倍の定義も well-defined であることを示せ．

例 0.4. いま，線形写像 $f : V \to V'$ があって，$W \subseteq \ker f$ とする．このとき，線形写像 $\tilde{f} : V/W \to V'$ が以下のように定義される：

$$[u] \mapsto f(u).$$

$\tilde{f} : V/W \to V'$ が well-defined であることを確認する．それには，$u \sim u'$ なら $f(u) = f(u')$，すなわち，同値類上で，f の値が等しいことをいえばよい．$u \sim u'$ から $u - u' \in W \subseteq \ker f$ なので $f(u) - f(u') = f(u - u') = 0$. また，$\tilde{f}$ の線形性は，f の線形性より従う（確認せよ）．

1 距離空間

まず距離空間から話を始める．

1.1 距離空間の定義

定義 1.1. X を空でない集合とする．実数値関数 $d : X \times X \to \mathbb{R}$ が次の性質を満たすとする：

(D1) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) \geq 0$ で $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.

(D2) $\forall x, y \in X,\ d(x,y) = d(y,x)$（対称性）．

(D3) $\forall x, y, z \in X,\ d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$（三角不等式）．

このとき d を**距離関数**，(X,d) の組を**距離空間**（metric space）という．d が明らかなときは省略して X を距離空間ということもある．

例 1.1 (n 次元ユークリッド空間)**.** X が n 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の場合，

$$d_2(x,y) := \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}, \quad d_1(x,y) := \sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|, \quad d_\infty(x,y) := \max_{1\le i\le n}|x_i-y_i|$$

と定義すると，d_2, d_1, d_∞ はいずれも距離関数になる．例えば d_2 の三角不等式は

$$\begin{aligned} d_2(x,z)^2 &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i+y_i-z_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)(y_i-z_i) \\ &\le \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2 + \sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2 + 2\sqrt{\left(\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2\right)} \\ &= \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-z_i)^2}\right)^2 = (d_2(x,y)+d_2(y,z))^2 \end{aligned}$$

と示される．ただし 3 行目の不等式はコーシー・シュワルツの不等式を用いた．

例 1.2. 区間 $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ 上の連続関数全体の集合を $C[a,b]$ で表す．$X = C[a,b]$ の場合，

$$d_2(f,g) := \sqrt{\int_a^b |f(t)-g(t)|^2 \,\mathrm{d}t}, \quad d_1(f,g) := \int_a^b |f(t)-g(t)| \,\mathrm{d}t, \quad d_\infty(f,g) := \sup_{t\in[a,b]}|f(t)-g(t)|$$

と定義すると，d_2, d_1, d_∞ はいずれも距離関数になる．例えば d_1 の三角不等式は

$$\begin{aligned} d_1(f,h) &= \int_a^b |f(t)-h(t)| \,\mathrm{d}t = \int_a^b |f(t)-g(t)+g(t)-h(t)| \,\mathrm{d}t \\ &\le \int_a^b (|f(t)-g(t)| + |g(t)-h(t)|) \,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^b |f(t)-g(t)| \,\mathrm{d}t + \int_a^b |g(t)-h(t)| \,\mathrm{d}t = d_1(f,g) + d_1(g,h) \end{aligned}$$

と示される．また，$d_1(f,g) = 0 \Leftrightarrow f = g$ は，もしある t について $f(t) \neq g(t)$ なら $|f(t)-g(t)| > 0$ で，連続性から $\epsilon > 0$ が存在して

$$|f(s)-g(s)| > 0 \quad (s \in [t-\epsilon, t+\epsilon])$$

となることから

$$\int_a^b |f(s)-g(s)| \,\mathrm{d}s \ge 2\epsilon \times \min_{t-\epsilon\le s\le t+\epsilon}|f(s)-g(s)| > 0$$

と示される．

例 1.3 (ハミング距離)**.** $X = \{0,1\}^n$ の場合，

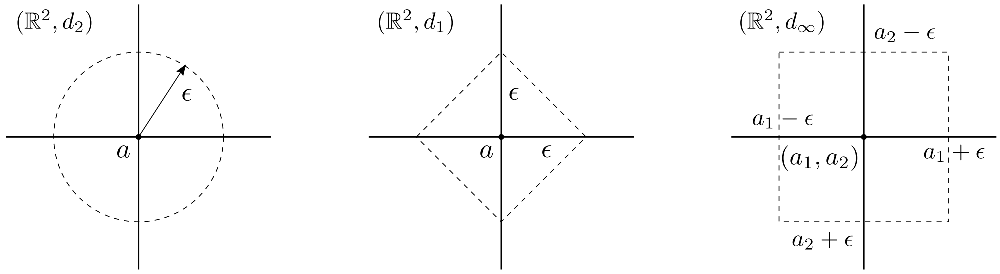
$$d_H(x,y) := \#\{i \mid x_i \neq y_i\}$$

と定義すると d_H は距離関数になる．

例 1.4. 無向グラフ $G = (X,E)$ の頂点集合 X 上に 2 変数関数 d_G を

$$d_G(x,y) := \{x \text{ から } y \text{ への最短路の長さ }\}$$

と定義すると，d_G は距離関数になる．実際，x から y への最短路と y から z への最短路を繋げると x から z へのパスとなるので，三角不等式が成り立つ．



(a) d_2 での ϵ-近傍.　(b) d_1 での ϵ-近傍.　(c) d_∞ での ϵ-近傍.

図 1: ユークリッド空間における ϵ-近傍.

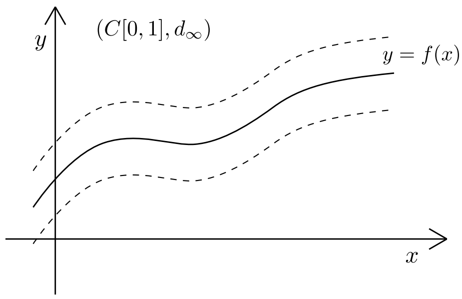


図 2: $(C[0,1], d_\infty)$ での ϵ-近傍.

1.2　開集合と閉集合

(X, d) を距離空間とする．点 $a \in X$ と実数 $\epsilon > 0$ について，a の **ϵ-近傍** $N(a;\epsilon)$ を

$$N(a;\epsilon) := \{x \in X \mid d(a,x) < \epsilon\}$$

と定義する．例えば $X = \mathbb{R}^2$ の距離 d_2, d_1, d_∞ のもとでの ϵ-近傍は図 1 のようになる．また，図 2 に $(X,d) = (C[0,1], d_\infty)$ の場合の ϵ-近傍を示す．

定義 1.2. $A \subseteq X$ を任意の X の部分集合とする．

- $x \in X$ が A の**内点** $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\epsilon > 0,\ N(x;\epsilon) \subseteq A$.

- A の**内部** $A^\circ := \{x \in X \mid \exists\epsilon > 0,\ N(x;\epsilon) \subseteq A\}$ $(\subseteq A)$（内点全体の集合）.

- $x \in X$ が A の**外点** $\overset{\text{def}}{\iff} \exists\epsilon > 0,\ N(x;\epsilon) \cap A = \emptyset$（$\Leftrightarrow$ A の補集合の内点）.

- A の**外部** $:= (X - A)^\circ$（外点全体の集合）.

- $x \in X$ が A の**境界点** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\epsilon > 0,\ N(x;\epsilon) \cap A \neq \emptyset,\ N(x;\epsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset$.

- A の**境界** $\partial A := X - A^\circ - (X - A)^\circ$（境界点全体の集合）.

- $x \in X$ が A の**触点** $\overset{\text{def}}{\iff} \forall\epsilon > 0,\ N(x;\epsilon) \cap A \neq \emptyset$.

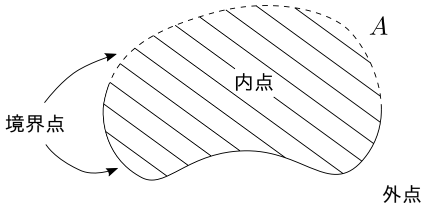


図 3: A の内部・境界・外部.

- A の**閉包** $\overline{A} := \{x \in X \mid \forall \epsilon > 0,\ N(x;\epsilon) \cap A \neq \emptyset\}$（触点全体の集合）.

X は任意の A の内部 A°，境界 ∂A，A の外部の直和になる（図 3）．また定義から $A^\circ \subseteq A \subseteq \overline{A}$，$\overline{A} = A^\circ \cup \partial A$ が成り立つ.

補題 1.3. $X - A^\circ = \overline{X - A}$

証明. $x \in X - A^\circ \Leftrightarrow x$ が A の内点でない $\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, N(x;\epsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset \Leftrightarrow x \in \overline{X - A}$. □

定義 1.4.

- $A \subseteq X$ が**開集合** $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in A,\ \exists \epsilon > 0,\ N(x;\epsilon) \subseteq A \quad \Longleftrightarrow A = A^\circ$.

- $A \subseteq X$ が**閉集合** $\overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall x \in X,\ [\forall \epsilon > 0,\ N(x;\epsilon) \cap A \neq \emptyset \Rightarrow x \in A] \quad \Longleftrightarrow A = \bar{A}$.

補題 1.5. 任意の $x \in X$ と $\epsilon > 0$ に対して $N(x;\epsilon)$ は開集合．つまり $N(x;\epsilon) = N(x;\epsilon)^\circ$.

証明. 任意の $y \in N(x;\epsilon)$ に対し $\delta := \epsilon - d(x,y) > 0$ とおくと，$N(y;\delta) \subseteq N(x;\epsilon)$ が成り立つ．実際，任意の $z \in N(y;\delta)$ に対し，三角不等式より

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) < d(x,y) + \delta = \epsilon$$

となるので，$z \in N(x;\epsilon)$ が成り立つ. □

命題 1.6. 任意の $A \subseteq X$ に対し，A° は開で，$\overline{A}$ は閉，すなわち，$(A^\circ)^\circ = A^\circ$ および $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$.

証明. 任意の $x \in A^\circ$ に対し，定義より $\epsilon > 0$ が存在して $N(x;\epsilon) \subseteq A$ となる．$N(x;\epsilon)$ は開集合なので，

$$N(x;\epsilon) = N(x;\epsilon)^\circ \subseteq A^\circ$$

となる．（$A \subseteq B$ ならば $A^\circ \subseteq B^\circ$ に注意する．）よって $x \in (A^\circ)^\circ$ が確かめられた.

$B := X - A$ とおくと，$A = X - B$ である．補題 1.3 より $\overline{A} = X - B^\circ$．そして $\overline{\overline{A}} = X - (B^\circ)^\circ = X - B^\circ = \overline{A}$. □

命題 1.7.

- A が開集合 $\Longleftrightarrow X - A$ が閉集合.

- A が閉集合 $\Longleftrightarrow X - A$ が開集合.

証明.

$$\begin{aligned} A \text{ が開集合でない} &\iff \exists x \in A,\ \forall \epsilon > 0,\ N(x;\epsilon) \not\subseteq A \\ &\iff \exists x \in A,\ \forall \epsilon > 0,\ N(x;\epsilon) \cap (X - A) \neq \emptyset \\ &\iff X - A \text{ の触点だが } X - A \text{ の元ではない } x \text{ が存在} \\ &\iff X - A \text{ は閉集合でない.} \end{aligned}$$

命題の 2 つ目は A と $X - A$ の役割を入れ替えれば 1 つ目から得られる. □

定義 1.8.

- **開集合系** := 開集合全体の集合．$\mathfrak{O}$ で表す.
- **閉集合系** := 閉集合全体の集合．$\mathfrak{A}$ で表す.

命題 1.9. 開集合系 $\mathfrak{O}$ は以下を満たす.

(1) $X \in \mathfrak{O},\ \emptyset \in \mathfrak{O}$.

(2) $O_1, O_2, \ldots, O_k \in \mathfrak{O}$ なら $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k \in \mathfrak{O}$.

(3) $O_\lambda \in \mathfrak{O}\ (\lambda \in \Lambda)$ なら $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$ （Λ は任意の集合).

証明. (1) は明らか.
(2) $x \in O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k$ とすると，各 $i = 1, \ldots, k$ について $\epsilon_i > 0$ が存在して $N(x;\epsilon_i) \subseteq O_i$ が成り立つ．よって $\epsilon := \min_{1\le i\le k} \epsilon_i$ とおくと，$N(x;\epsilon) \subseteq O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k$.
(3) $x \in \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ とすると，$x \in O_\lambda$ なる $\lambda \in \Lambda$ が存在する．すると $\epsilon > 0$ が存在して $N(x;\epsilon) \subseteq O_\lambda \subseteq \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$ となる. □

命題 1.10. 閉集合系 $\mathfrak{A}$ は以下を満たす.

(1) $X \in \mathfrak{A},\ \emptyset \in \mathfrak{A}$.

(2) $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathfrak{A}$ ならば $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \in \mathfrak{A}$.

(3) 任意の $\lambda \in \Lambda$ について $A_\lambda \in \mathfrak{A}$ ならば，$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$ （Λ は任意の集合).

証明. 命題 1.7 より $\mathfrak{A} = \{X - O \mid O \in \mathfrak{O}\}$ が成り立つことに注意すると，(1) は明らか.
(2) $A_i = X - O_i$ と書くと，

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = (X - O_1) \cup (X - O_2) \cup \cdots \cup (X - O_k) = X - (O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k)$$

であるから，命題 1.9 より $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \in \mathfrak{A}$.
(3) $A_\lambda = X - O_\lambda$ と書くと，

$$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} (X - O_\lambda) = X - \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda$$

であるから，命題 1.9 より $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$. □

(a) d_∞ での x の近傍を含む d_2 での近傍.　(b) d_2 での x の近傍を含む d_∞ での近傍.

図 4: ユークリッド空間の距離 d_2 と d_∞ が定める位相.

1.3　収束性・連続性

距離空間の言葉で，収束性や連続性といった概念が定義できる．

定義 1.11.

- 点列 $a_i \in X$ $(i = 1, 2, \dots)$ が $a \in X$ に**収束する**（$\lim_{i\to\infty} a_i = a$ と表す）:

$$\lim_{i\to\infty} a_i = a \overset{\text{def}}{\iff} \lim_{i\to\infty} d(a, a_i) = 0 \quad \text{(実数列としての収束)}.$$

- 関数 $f : X \to \mathbb{R}$ が $a \in X$ で**連続**

$$\overset{\text{def}}{\iff} \forall\epsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ [d(a, x) < \delta \Rightarrow |f(a) - f(x)| < \epsilon].$$

集合 X に異なる距離関数 d, d' を与えると，異なる距離空間 $(X, d), (X, d')$ が定義される．距離関数の違いにより，収束性や連続性に違いが生じるだろうか？　これを調べるために導入されるのが，**位相空間**の概念である．X に開集合系を与えることを，**空間に位相を与える**という．収束性や連続性は位相空間の言葉のみで定義することができ，開集合系が同じ距離空間ならば収束性や連続性も等価になる．

例 1.5. $(\mathbb{R}^n, d_2)$ と $(\mathbb{R}^n, d_\infty)$ が定義する開集合系は等しい（位相は等しい）．よって，収束性や連続性はどちらの距離空間で考えても等価になる．実際，ある実数 $C > 0$ が存在して任意の $x, y \in \mathbb{R}^n$ に対し $d_2(x, y) \le d_\infty(x, y)/C$ が成り立つ．集合 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ が d_2 の下で開だとすると，任意の $x \in A$ について $\epsilon > 0$ が存在して $N_2(x, \epsilon) \subseteq A$ となる．すると

$$N_\infty(x, C\epsilon) \subseteq N_2(x, \epsilon) \subseteq A$$

であるから，A は d_∞ の下でも開である．逆に d_∞ の下での開集合は，d_2 の下での開集合でもある（図 4).

例 1.6. $\mathbb{R}^n$ 上のノルム $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ とは，次の条件

- $\|v\| \ge 0,\ \|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0,$
- $\forall a \in \mathbb{R},\ \forall v \in \mathbb{R}^n,\ \|av\| = |a|\|v\|,$
- $\forall u, v \in \mathbb{R},\ \|u + v\| \le \|u\| + \|v\|$

を満たす関数のことである．ノルム $\|\cdot\|$ により $d(x, y) := \|x - y\|$ と定義すると，d は距離関数になる．d_2 はノルム $\|v\|_2 := \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2}$ から，d_∞ は $\|v\|_\infty := \max_{1\le i\le n}|v_i|$ からこのようにして得られる（d_1 も同様）．実は，**$\mathbb{R}^n$ 上のどんなノルムも定める位相は等しい**ことが知られている．一方，無限次元ではそうとも限らない（らしい）.

TODO: 有理数の集合 $\mathbb{Q}$ 上の絶対値から得られる位相とは異なる位相（p 進位相）について書く．