

幾何数理工学ノート

位相幾何：ホモロジー

平井広志

東京大学工学部 計数工学科 数理情報工学コース

東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻

`hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp`

協力：池田基樹（数理情報学専攻 D1）

位相空間から群への対応として，基本群は「2次元の穴」が検出できるものだった．基本群は非可換で，その計算は一般には難しい．一方，ホモロジー群は「高次元の穴」を検出できる可換群である．計算は比較的容易で，計算機との相性も良い．

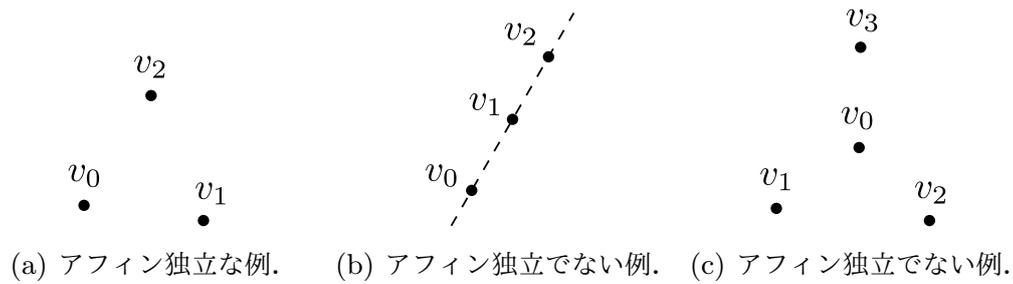


図 1: \mathbb{R}^2 におけるアフィン独立性.

7 単体的ホモロジー

7.1 単体

定義 7.1. $v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ がアフィン独立

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{def}}{\iff} \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i = 0, \sum_{i=0}^k \lambda_i = 0 \text{ なら } \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0 \\ &\iff \begin{pmatrix} v_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_1 \\ 1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} v_k \\ 1 \end{pmatrix} \text{ が一次独立} \\ &\iff v_1 - v_0, v_2 - v_0, \dots, v_k - v_0 \text{ が一次独立.} \end{aligned}$$

\mathbb{R}^2 におけるアフィン独立な点やアフィン独立でない点の例を図 1 に示す.

定義 7.2 (単体 (simplex)). k 次元単体ないし k -単体 $\stackrel{\text{def}}{\iff}$ アフィン独立な

$v_0, v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ によって

$$\text{conv}\{v_0, v_1, \dots, v_k\} = \left\{ \sum_{i=0}^k \lambda_i v_i \mid \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1, \lambda_i \geq 0 \right\}$$

と書けるもの (ただし conv は凸包).

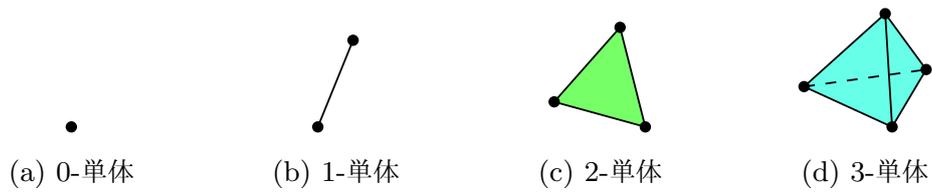


図 2: 単体の例.

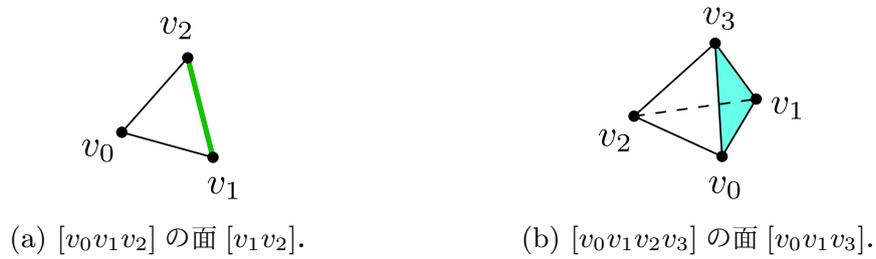


図 3: 単体の面の例.

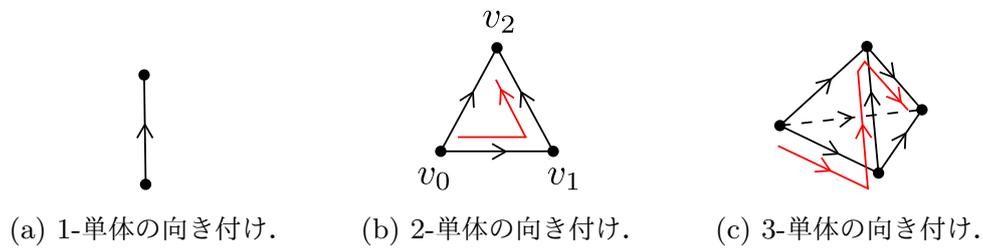


図 4: 向き付けられた単体の例.

単体の例を図 2 に示す. 頂点 v_0, v_1, \dots, v_k を持つ単体を $[v_0v_1 \cdots v_k]$ と書く. $[v_0v_1 \cdots v_k]$ の面 $[v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k]$ は, v_i を除いた単体 $[v_0 \cdots v_{i-1}v_{i+1} \cdots v_k]$ のことをいう (図 3). 単体の頂点に順番を指定したものを, 向き付けられた単体という (図 4). 以下, $[v_0v_1 \cdots v_k]$ には $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow v_2 \rightarrow \cdots \rightarrow v_k$ の順で向きが付けられているものとする. 面にも自然に向きが誘導される. 例えば, 面 $[v_0 \cdots v_{i-1}v_{i+1} \cdots v_k]$ の向きは $v_0 \rightarrow v_1 \rightarrow \cdots v_{i-1} \rightarrow v_{i+1} \rightarrow \cdots \rightarrow v_k$ となる.

7.2 単体的複体

定義 7.3 (単体的複体 (simplicial complex)). 単体的複体 K とは, \mathbb{R}^N の有限個の単体の集合で, 次を満たすものである:

- K の任意の単体の任意の面も K に属する.
- K の任意の2つの単体 σ, σ' に対して, $\sigma \cap \sigma' \neq \emptyset$ なら, $\sigma \cap \sigma'$ は, σ, σ' それぞれの面である.

K のすべての単体の和集合を $|K|$ とかく. $|K|$ は \mathbb{R}^N の部分集合である.

位相空間 X に対して, $|K|$ が X と同相となる単体的複体 K を X の単体分割という.

注意 7.4. 単体的複体 K は各単体 σ に対してその頂点集合を対応させることで有限集合 V 上の部分集合族 $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ として組合せ的に扱える. これは抽象的単体的複体の概念を導く. $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ が抽象的単体的複体とは, $X \subseteq Y \in \mathcal{F}$ ならば $X \in \mathcal{F}$ となることをいう. 単体的複体から, 抽象的単体的複体が得られることは明らかだろう. 例えば, 図 5 の単体的複体は, 単体をなす頂点集合の族

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{c} \{0, 1, 2\}, \\ \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \\ \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \emptyset \end{array} \right\} \subseteq 2^{\{0,1,2,3,4\}}$$

によって表される. 逆に抽象的単体的複体を単体的複体として実現することも可能

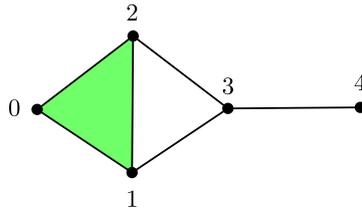


図 5: 抽象的単体的複体の例.

である. それを \mathcal{F} の幾何学的実現という. 例えば, $V = \{1, 2, \dots, N\}$ として, 抽象単体 $F \subseteq \{1, 2, \dots, N\}$ に対して, \mathbb{R}^N の単体 σ_F を

$$\sigma_F := \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid \sum_{i=1}^N x_i = 1, x_i \geq 0 \ (i \in V), x_i = 0 \ (i \notin F) \right\}$$

と定めると, $K := \{\sigma_F \mid F \in \mathcal{F}\}$ は, \mathbb{R}^N の単体的複体で \mathcal{F} をその抽象的単体的複体としてもつ.

抽象的単体的複体は組合せ的な対象からも自然に現れる. それらに対し, 幾何学的実現を通して, 位相幾何的な手法をもちいることで元の対象を研究することができる. 代表的な例をあげる:

クリーク複体: $G = (V, E)$ を無向グラフとして, $\mathcal{F} \subseteq 2^V$ をすべてのクリークから集合族とする. ここでクリークとは, その任意の頂点間が枝で結ばれているような頂点部分集合のことである. \mathcal{F} は抽象的単体複体であり, G のクリーク複体と呼ばれる. クリーク複体は, フラッグ複体とも呼ばれる.

順序複体: P を半順序集合として, $\mathcal{F} \subseteq 2^P$ を互いに比較可能な部分集合からなる集合族とする. \mathcal{F} は抽象的単体複体であり, P の順序複体と呼ばれる.

これから述べる (単体的) ホモロジーは, 単体的複体の組合せ構造, すなわち,

その抽象的単体複体の構造のみによって決まる。

無限個の単体からなる単体的複体を使いたいときや、 \mathbb{R}^N のなかで実現することが不自然な（できない）場合もあり、その場合は、必要な単体たちを先に用意しておいて直和と貼り合わせ（商位相）を用いて、共通の面で貼り合わさっているという条件を表現して、単体的複体や単体分割を導入することもできる。

7.3 ホモロジー群

群 G の積が可換であるとき、 G は可換群あるいはアーベル群という。このとき、積 \cdot を $+$ で表し、単位元を 0 、逆元は、マイナスをつけて表し、 $y + (-x)$ は $y - x$ のように書く。また、 $x + x + y + x + y$ は、 $3x + 2y$ のように書く。アーベル群 G, G' の直和 $G \oplus G'$ は、 (x, x') ($x \in G, y \in G'$) からなり、 $(x, x') + (y, y') := (x + x', y + y')$ を積演算とするアーベル群である。 $(0, 0)$ が単位元である。 H, H' を G の部分群とする。もし、 G の任意の元 x 、部分群 H, H' の元 $y \in H, z \in H'$ によって、一意に

$$x = y + z$$

と表されるとき、 G は、 H と H' の直和 $G = H \oplus H'$ と同型である。 r 次元整数ベクトルの集合 \mathbb{Z}^r は、アーベル群であるが、 \mathbb{Z} たちの r 個の直和である。

K を単体的複体とする。これから、 K にアーベル群を対応させる。 K の各単体には、任意に向きをつけておく。

定義 7.5. k -単体たちの形式的整数結合

$$\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \sigma_{\alpha}$$

を k -チェインとよぶ。ここで、 α は k -単体のインデックスを表して、 σ_{α} は k -単体、係数 μ_{α} は整数である。

この表現では、 σ_{α} は集合ではなく、1つの記号あるいは不定元としてみる。具体的には、図5の単体複体の1-チェインの1つは、

$$3[01] + 0[02] + 0[12] + 1[23] + (-5)[31] + (-1)[43]$$

である。係数がゼロのところや係数が1, -1のところは、省略して、次のように書く：

$$3[01] + [23] - 5[31] - [43].$$

また、係数を指定すれば決まるので、整数ベクトル

$$(3 \ 0 \ 0 \ 1 \ -5 \ -1)$$

という見方をしてもよい。ここで α はベクトルのインデックスとなる。(もしも、 K が無限集合のときは、「0でない係数をもつ k -単体は有限個」と条件をつける。)

すべての k -チェインからなる集合を $C_k = C_k(K)$ で表し、 k -チェイン群という。実際、 C_k は、次の演算 $+$ で、群になる：

$$\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \sigma_{\alpha} + \sum_{\alpha} \nu_{\alpha} \sigma_{\alpha} := \sum_{\alpha} (\mu_{\alpha} + \nu_{\alpha}) \sigma_{\alpha}.$$

C_k はアーベル群である。チェインを整数ベクトルとしてみると整数ベクトルの足し算に他ならない。単位元は、ゼロベクトル (= すべての係数がゼロのチェイン) で、逆元は、すべての係数にマイナスをかけると得られる。あきらかに $C_k \simeq \mathbb{Z}^{c_k}$ である。ここで、 c_k は、 k -単体の個数 (有限個)。 k はゼロ以上を考えているが、便宜的に $C_{-1} = \{0\}$ (単位元だけからなる群) とする。

チェインの表現において、もしも単体 σ_α の向きをかえたときは、以下のルールで、符号が変わるものとする：

$$[v_0 v_1 \cdots v_i \cdots v_j \cdots v_k] = -[v_0 v_1 \cdots v_j \cdots v_i \cdots v_k]$$

例えば、

$$3[01] + [23] - 5[31] - 3[43] = 3[01] + [23] + 5[13] + 3[34]$$

である。これは、well-defined である。なぜなら、置換を互換の積で表現するときの互換の数の偶奇は、表現の仕方のよらずきまるからである。向きが偶置換で移りあう2つの向き付け単体 (単体としては同一) は、「同じ向きをもつ」といって、チェインの表現においては、同一のものとして扱う。向きは2種類あることになる。 C_k には、向きの異なる単体に対応するチェインも入っていると考える。したがって、

$$3[234] + [243] - 2[423] = 0$$

のように計算される。

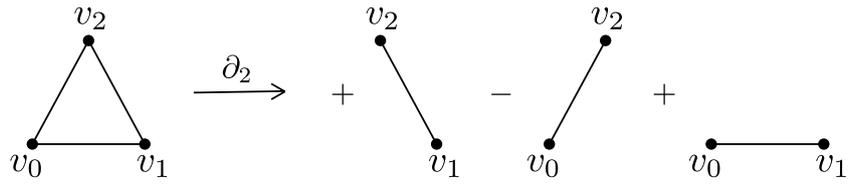


図 6: 境界作用素

定義 7.6. 境界作用素 $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$ を, k -単体 $[v_0 v_1 \cdots v_k]$ に対し

$$\partial_k [v_0 v_1 \cdots v_k] := \sum_{i=0}^k (-1)^i [v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k]$$

と定義する (図 6). k -チェインに対しては

$$\partial_k \left(\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \sigma_{\alpha} \right) := \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \partial_k \sigma_{\alpha}$$

と定義する.

∂_k は C_k から C_{k-1} への準同型写像になる. すなわち, $\partial_k(z+z') = \partial_k(z) + \partial_k(z')$

である.

補題 7.7. $C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} C_{k-2}$ の合成 $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ ($k \geq 1$).

証明. k -単体 $\sigma_{\alpha} = [v_0 v_1 \cdots v_k]$ に対し,

$$\partial_k(\sigma_{\alpha}) = \sum_{i=0}^k (-1)^i [v_0 v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k]$$

であるから,

$$\begin{aligned}
\partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma_\alpha) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_{k-1}[v_0 v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k] \\
&= \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j:j < i} (-1)^j [v_0 \cdots \hat{v}_j \cdots \hat{v}_i \cdots v_k] + \sum_{j:j > i} (-1)^{j-1} [v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_k] \right) \\
&= \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} [v_0 \cdots \hat{v}_j \cdots \hat{v}_i \cdots v_k] - \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} [v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_k] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

結局 $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$. □

よって

$$\begin{aligned}
\cdots \rightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0, \\
\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots)
\end{aligned}$$

なる列が得られた. これをチェイン複体という. $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ より $\text{Im } \partial_k \subseteq \text{Ker } \partial_{k-1}$ となる. $\text{Ker } \partial_k$ の元を $(k-)$ サイクルという.

定義 7.8. 2つのサイクル $z, z' \in \text{Ker } \partial_k$ がホモローグ ($z \sim z'$ と書く) $\stackrel{\text{def}}{\iff} z - z' \in \text{Im } \partial_{k+1}$.

補題 7.9. \sim は同値関係.

\sim による同値類をホモロジー類という.

証明. $z - z' \in \partial_{k+1} u$ なら, $z' - z \in \partial_{k+1}(-u)$ である (対称律). $z \sim z' \sim z''$ とすると $z - z', z' - z'' \in \text{Im } \partial_{k+1}$ であるから, ある $u, u' \in C_{k+1}$ があって, $z - z' = \partial_{k+1} u,$

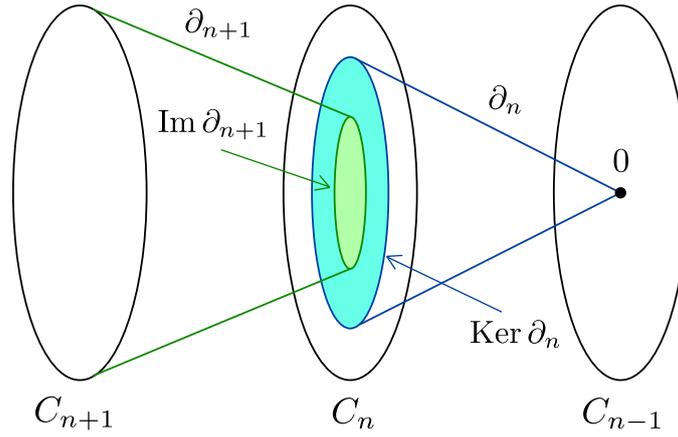


図 7: $\text{Ker } \partial_n$ と $\text{Im } \partial_{n+1}$ の包含関係.

$z' - z'' = \partial_{k+1} u'$ なので, $z - z'' = (z - z') + (z' - z'') = \partial_{k+1}(u + u') \in \text{Im } \partial_{k+1}$. \square

定義 7.10 (ホモロジー群). ホモロジー類の集合

$$H_k(K) := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1} = \{[z] \mid z \in \text{Ker } \partial_k\}$$

をホモロジー群という (図 7). 和は

$$[z] + [z'] := [z + z']$$

と定義され (well-defined), 単位元は $\text{Im } \partial_{k+1}$ である.

Well-defined を確認する: $z \simeq u, z' \simeq u'$ なら, $z - u = \partial_{k+1} c, z' - u' = \partial_{k+1} c'$ なので, $(z + z') - (u + u') = \partial_{k+1}(c + c')$ である. これは, $z + z' \simeq u + u'$ を表している. なお, 群の言葉をつかうと, H_k は, 部分群 $\text{Ker } \partial_k$ の部分群 $\text{Im } \partial_{k+1}$ に対する剰余群である.

定理 7.11. 2つの単体的複体 K, L について, もしも, $|K| = |L|$ なら, すべての

k について $H_k(K) \simeq H_k(L)$ が成り立つ。したがって、単体分割をもつ位相空間 X に対しては、 X のホモロジー群が、単体分割のとり方によらず決まる。

この定理から、位相空間のホモロジー群は、位相不変量であることがわかる。より強くホモトピー不変量である。上の定理は、次節で、簡単な場合を証明する。

以下では、ホモロジー群のいくつかの基本的性質をみる。 $|K|$ が (弧状) 連結のとき、 K は (弧状) 連結という。なお、(有限個の単体からなる) 単体的複体においては、連結性と弧状連結性は等価となる (注意 **TODO**)。

補題 7.12. K が弧状連結なら、 $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}$ 。

証明. まず、すべての 0-単体がホモローグであることをしめす。 $u, v \in K$ を 0-単体とすると、 $|K|$ のなかで u, v はパスで結ばれる。このパスは、つねに 1-単体によって変形できる。したがって、「 u, v をつなぐ」1-単体の列 $[x_0x_1], [x_1x_2], \dots, [x_{k-1}x_k] \in K$, $x_0 = u, x_k = v$, が存在する。ここで、1-チェーン $p := [x_0x_1] + [x_1x_2] + \dots + [x_{k-1}x_k]$ に境界作用素 ∂_1 を作用させると

$$\partial_1 p = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_k - x_{k-1}) = v - u.$$

すなわち、 $u - v \in \text{Im } \partial_1$, u と v はホモローグとなる。よって、頂点 u を 1 つ決めると、 H_0 の任意のホモロジー類は、

$$\left[\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} [v_{\alpha}] \right] = \left(\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \right) [u]$$

と表せる。ゆえに $H_0 \simeq \mathbb{Z}[u]$ である。ここで、 $[u]$ はゼロとホモローグではないこ

とに注意する．なぜなら，写像 $\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} [v_{\alpha}] \mapsto \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \in \mathbb{Z}$ を $\text{Im } \partial_1$ の元 ($[u'] - [v']$ の和の形でかける) に作用させると，ゼロになるが $[u]$ に作用させると 1 になる．これは， $[u] \neq 0$ を表している．よって， $H_0 \simeq \mathbb{Z}[u] \simeq \mathbb{Z}$. □

$|K|$ の弧状連結成分に入っている単体は， K の部分単体的複体になるが，これも K の弧状連結成分と呼ぶことにする．

命題 7.13. K の弧状連結成分を K_1, K_2, \dots, K_r とすると，

$$H_k(K) \simeq H_k(K_1) \oplus H_k(K_2) \oplus \cdots \oplus H_k(K_r).$$

特に， $H_0(K) \simeq \mathbb{Z}^r$.

証明. まず， $C_k(K) \simeq C_k(K_1) \oplus C_k(K_2) \oplus \cdots \oplus C_k(K_r)$ に注意する．また， $\partial_k C_k(K_i) \subseteq C_{k-1}(K_i)$ も明らかである． $z_1 + z_2 + \cdots + z_r$ ($z_i \in C_k(K_i)$) と $z'_1 + z'_2 + \cdots + z'_r$ ($z'_i \in C_k(K_i)$) がホモロークであること，それぞれの i について， $z_i - z'_i \in \partial_{k+1} C_{k+1}(K_i)$ となることは同値である．このことから主張がわかる． □

命題 7.14. K を弧状連結な単体的複体とし，頂点 (0-単体) の個数を n ，枝 (1-単体) の個数を m とすると， $\text{Ker } \partial_1 \simeq \mathbb{Z}^{m-n+1}$ ．特に， K が 1 次元なら， $H_1(K) = \text{Ker } \partial_1 \simeq \mathbb{Z}^{m-n+1}$.

証明. K の 1 次元部分複体を連結グラフとみて，閉路 $[x_0 x_1], [x_1 x_2], \dots, [x_k x_0]$ に

対して、チェイン $z = [x_0x_1] + [x_1x_2] + \cdots + [x_kx_0]$ を考えると、

$$\partial_1 z = (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \cdots + (x_0 - x_k) = 0$$

である。すなわち、閉路に対するチェインは、サイクルである ($\text{Ker } \partial_1$ に入る)

K の全域木 T をひとつ固定する。 T の枝数は、 $n - 1$ である。 T に入っていない枝 e_i ($i = 1, 2, \dots, m - n + 1$) に対して、閉路 c_i を、 e_i の端点を結ぶ T 上の (一意な) パスに e_i を追加した閉路とする。この閉路に対応するチェインを z_i とおく。ただし、 K での枝 $[uv]$ の向きと閉路の向きが逆のときは、 $[uv]$ の係数は -1 とする。すると、準同型写像 $\mathbb{Z}^{m-n+1} \rightarrow \text{Ker } \partial_1$

$$(\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{m-n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{m-n+1} \mu_i z_i$$

が定義される。これが全単射になることを示そう。単射性は、 e_i の係数が μ_i になることからわかる。全射性を示すために以下を示す。

- $z \in \text{Ker } \partial_1$ がゼロ $\Leftrightarrow z$ の各 e_i の係数がゼロ。

逆は明らかなので \Leftarrow を示せばよい。条件から z で非ゼロな係数を持ちうるのは、 T の枝のみである。すると T の次数が 1 の頂点につながっている枝の係数もゼロでなくてはならない。その枝の除いた木グラフにおいても次数が 1 の頂点につながっている枝の係数もゼロである。これを繰り返すとすべての係数がゼロであることがわかる。

すると、任意の $z \in \text{Ker } \partial_1$ に対し、 $z' := z - \sum_{i=1}^{m-n+1} \mu_i z_i$ (μ_i は、 z における e_i

の係数) とおくと z' の各 e_i の係数がゼロになるので, $z' = 0$, $z = \sum_{i=1}^{m-n+1} \mu_i z_i$.

これは, 上の写像が全射であることを示している. □

1次元でない場合は, $c \in \text{Ker } \partial_1$ が閉路から来ていたとしても, それが, 2次元面の境界になっていたとしたら, 0 にホモログである. したがって, H_1 の元は, 面の境界にならない閉路, すなわち, 2次元の空間の穴, を表しているといえるだろう. 高次元の場合も, おおざっぱにはそういう見方をしてもよいだろう (よくないかも).

基本群との関係では, H_1 は, π_1 を可換化 (アーベル化) したものである.

定理 7.15. K を弧状連結な単体的複体とすると, $H_1(K)$ は基本群 $\pi_1(|K|)$ の可換化である.

群の可換化について説明する. 群 G に対して, 交換子群 $[G, G]$ は, $xyx^{-1}y^{-1}$ とかける元から生成される正規部分群である. その剰余群 $G/[G, G]$ は, $xyx^{-1}y^{-1}$ の形をした元を単位元としてみなして得られる群で, その中では, $xy = yx$ が成り立ち, $G/[G, G]$ はアーベル群である. これを G の可換化という.

問題 7.1. これを証明せよ.

命題 7.16. ディスク D^n のホモロジー群 H_k は以下で与えられる:

$$H_k = \begin{cases} 1 & \text{if } k = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

証明. $n \geq 1$ として, D^n は, n -単体 $[v_0 v_1 \cdots v_n]$ のその面たちで単体分割されてい

るとしよう. この単体分割を Δ^n とかく. $k \geq 1$ のとき, $z \in \text{Ker } \partial_k$ に対して, ある $u \in \text{Im } \partial_{k+1}$ が存在して $\partial_k u = z$ となることを示す. すると, $\text{Ker } \partial_k = \text{Im } \partial_{k+1}$ で, $H_k = \text{Im } \partial_{k+1} / \text{Ker } \partial_k = 0$ となる. $H_0 = \mathbb{Z}$ についてはすでにみた.

k -単体 $\sigma = [v_0 v_1 \dots v_k]$ とそれに含まれない頂点 v に対して $k+1$ -単体 $v * \sigma := [v v_0 v_1 \dots v_k]$ を定義する. そして, 頂点 v が出てこない k -チェイン $z = \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \sigma_{\alpha}$ に対しても, $v * z := \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} v * \sigma_{\alpha}$ と定義する.

$k \geq 1$ とし, v を任意の頂点とする. 任意の k -チェイン $z \in C_k(\Delta^n)$ は,

$$z = z' + v * y$$

とかける. ここで, z' は v が出てこない k -チェインで, y は v が出てこない $k-1$ -チェインである. いま, $z \in \text{Ker } \partial_k$ として, ∂_k を作用させると

$$0 = \partial_k z' + y - v * \partial_{k-1} y$$

を得る. $\partial_k z' + y$ は v を含まないので,

$$\partial_k z' + y = 0$$

でなくてはならない. さて, $u := v * z' \in C_{k+1}(\Delta^n)$ とおく. Δ^n は任意の頂点部分集合を頂点とする単体をもつので, 確かに u はチェインである. そして, u に ∂_{k+1} を作用させると

$$\partial_{k+1} u = \partial_{k+1} v * z' = z' - v * \partial_k z' = z' + v * y = z$$

を得る.

□

2つの単体的複体 K, L に、何らかの関係があるとき、各 k について、準同型写像 $\varphi_k : C_k(K) \rightarrow C_k(L)$ が自然に得られることがある。そんな φ_k たちが

$$\partial_k \circ \varphi_k = \varphi_{k-1} \circ \partial_k \quad (1)$$

を満たすとき、 $\{\varphi_k\}$ をチェイン写像という。インデックス k を省略して、単に $\varphi : C_k(K) \rightarrow C_k(L)$ とかく。次の図式が可換である、という風にも説明される。

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C_{k+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(K) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(K) & \longrightarrow \\ & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & \\ \longrightarrow & C_{k+1}(L) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(L) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(L) & \longrightarrow \end{array}$$

矢印は写像を表しているが、ある群からある群へ矢印にしたがって写像を合成して得られる写像は、矢印のたどり方によらない、ということである。

典型的な例は、 K が L の部分複体であるときである。このとき、すべての k に対して、 $C_k(K)$ は $C_k(L)$ の部分群で、包含写像 $\iota : C_k(K) \rightarrow C_k(L)$ は、チェイン写像となる。それは、 $\partial_k C_k(K) \subseteq C_{k-1}(K)$ からすぐわかる。チェイン写像は、ホモロジー間の準同型写像を誘導する。

補題 7.17. $\varphi : C_k(K) \rightarrow C_k(L)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) がチェイン写像なら、写像

$$\varphi_{\#} : H_k(K) \rightarrow H_k(L)$$

$$[z] \mapsto [\varphi(z)]$$

が well-defined で、準同型となる。

証明. Well-defined: z と z' がホモローグなら $[\varphi(z)]$ と $[\varphi(z')]$ がホモローグとなることいえばよい. $z - z' = \partial_{k+1}u$ ($u \in C_{k+1}$) と, (1) から,

$$\varphi(z) - \varphi(z') = \varphi \partial_{k+1}(u) = \partial_k \varphi(u)$$

が得られる. これは, $[\varphi(z)]$ と $[\varphi(z')]$ がホモローグであることをしめしている.

準同型性: $[\varphi(z + z')] = [\varphi(z) + \varphi(z')] = [\varphi(z)] + [\varphi(z')]$. 最後の等式は, + の定義より. □

7.4 特異ホモロジー

ここでは, (単体分割をもつとはかぎらない) 一般の位相空間にホモロジーを導入する方法 (特異ホモロジー論) を紹介する. 特異ホモロジーは, 定義に基づいて計算すること困難であるが, 位相不変性・ホモトピー不変性の証明は比較的容易である. さらに単体分割をもつ空間に対しては, 単体分割から得られる単体的ホモロジーと一致する.

定義 7.18. 向き付けられた k -単体から位相空間 X への連続写像 $\sigma : [v_0 v_1 \cdots v_n] \rightarrow X$ を, 特異 k -単体という.

σ は連続でありさえすればよいので, 図 8 のものも特異 k -単体になる. 特異 k -単体 $\sigma : [v_0 v_1 \cdots v_k] \rightarrow X$ の面 $\sigma|_{[v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k]}$ は特異 $k-1$ -単体になる.

定義 7.19. 特異 k -単体の形式的整数結合 $\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \sigma_{\alpha}$ (有限個の α を除いて $\mu_{\alpha} = 0$) のことを特異 k -チェインという.

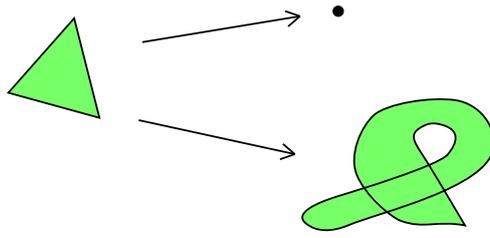


図 8: 特異 n -単体の例.

特異 k -チェイン全体の集合を $C_k(X)$ で表す. これは和

$$\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \alpha_{\alpha} + \sum_{\alpha} \mu'_{\alpha} \sigma_{\alpha} := \sum_{\alpha} (\mu_{\alpha} + \mu'_{\alpha}) \sigma_{\alpha}$$

のもとでアーベル群 (可換群) になる.

定義 7.20. 境界作用素 $\partial_k : C_k(X) \rightarrow C_{k-1}(X)$ を, 特異 k -単体 $\sigma : [v_0 v_1 \cdots v_k] \rightarrow$

X に対し

$$\partial_k \sigma := \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma|_{[v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k]}$$

と定義する (図 6). 特異 k -チェインに対しては

$$\partial_k \left(\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \sigma_{\alpha} \right) := \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \partial_k \sigma_{\alpha}$$

と定義する.

∂_k は $C_k(X)$ から $C_{k-1}(X)$ への準同型写像になる.

補題 7.21. $C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} C_{k-2}$ の合成 $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$.

証明. $\sigma_\alpha : [v_0 v_1 \cdots v_k] \rightarrow X$ に対し,

$$\partial_k(\sigma_\alpha) = \sum_{i=0}^k (-1)^i \sigma_\alpha|_{[v_0 v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k]}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \partial_{k-1} \circ \partial_k(\sigma_\alpha) &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \partial_{k-1}(\sigma_\alpha|_{[v_0 v_1 \cdots \hat{v}_i \cdots v_k]}) \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i \left(\sum_{j:j < i} (-1)^j \sigma_\alpha|_{[v_0 \cdots \hat{v}_j \cdots \hat{v}_i \cdots v_k]} + \sum_{j:j > i} (-1)^{j-1} \sigma_\alpha|_{[v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_k]} \right) \\ &= \sum_{0 \leq j < i \leq k} (-1)^{i+j} \sigma_\alpha|_{[v_0 \cdots \hat{v}_j \cdots \hat{v}_i \cdots v_k]} - \sum_{0 \leq i < j \leq k} (-1)^{i+j} \sigma_\alpha|_{[v_0 \cdots \hat{v}_i \cdots \hat{v}_j \cdots v_k]} \\ &= 0. \end{aligned}$$

結局 $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$. □

よって

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_3} C_2 \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0, \\ \partial_{n-1} \circ \partial_k = 0 \quad (k = 1, 2, \dots) \end{aligned}$$

なる列が得られた. これをチェイン複体という. $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$ より $\text{Im } \partial_k \subseteq \text{Ker } \partial_{k-1}$ となる. $\text{Ker } \partial_k$ の元を $(k-)$ サイクルという.

例 7.1. 1-サイクルの例を図 9a に示す. 1-サイクルは $[v_0 v_1] + [v_1 v_2] + \cdots + [v_k v_0]$

と表されるので, 境界作用素 ∂_1 によって

$$[v_1] - [v_0] + [v_2] - [v_1] + \cdots + [v_0] - [v_k] = 0$$

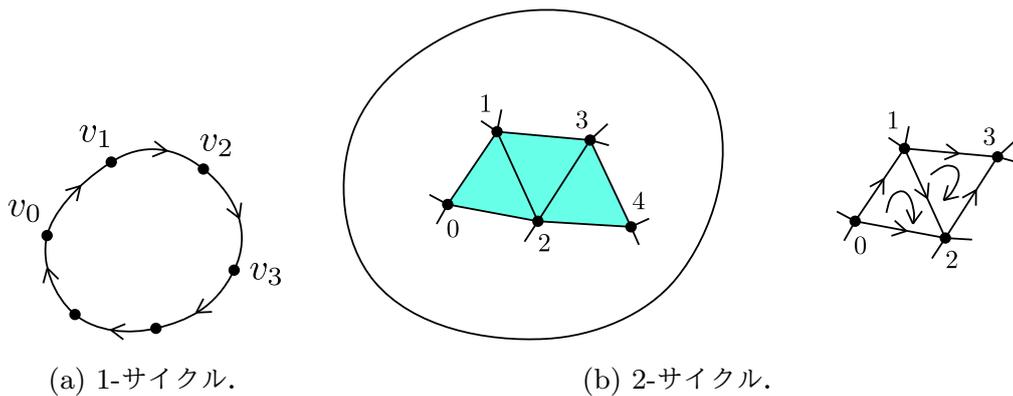


図 9: サイクルの例.

と写される. 図 9b は 2-サイクルの例であり, 単体たちが境界のない向き付け可能な面をなしている. 単体の向きと面の向きが逆の場合は -1 が掛かることに注意すると,

$$\cdots + [012] - [123] + \cdots \xrightarrow{\partial_2} \cdots + [12] - [12] + \cdots = 0$$

となる.

定義 7.22. 2つのサイクル $z, z' \in \text{Ker } \partial_n$ がホモローグ ($z \sim z'$ と書く) $\stackrel{\text{def}}{\iff} z - z' \in \text{Im } \partial_{n+1}$.

補題 7.23. \sim は同値関係.

\sim による同値類をホモロジー類という.

証明. $z \sim z' \sim z''$ とすると $z - z', z' - z'' \in \text{Im } \partial_{n+1}$ であるから, $z - z'' = (z - z') + (z' - z'') \in \text{Im } \partial_{n+1}$. □

ホモローグのイメージを図 10 に示す. 図 10a は 1-単体で結ばれる 2 頂点であ

となる：

$$\begin{array}{ccccccc}
 \longrightarrow & C_{k+1}(K) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(K) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(K) & \longrightarrow \\
 & \downarrow i & & \downarrow i & & \downarrow i & \\
 \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(X) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(X) & \longrightarrow
 \end{array}$$

前と同様にして $i_{\#} : H_n(K) \rightarrow H_n(X)$ が誘導される．実はこれが同型写像になる（証明は難しい）．

定理 7.25. $i_{\#} : H_n(K) \rightarrow H_n(X)$ は同型写像である．

問題 7.2. 証明せよ．

このことから， $H_n(K)$ は， X のみによって決まり，単体分割のとり方によらないことがわかる．

$\varphi : X \rightarrow Y$ を位相空間 X, Y を結ぶ連続写像， $\sigma : [v_0 v_1 \cdots v_k] \rightarrow X$ を X の k -単体とすると， $\varphi \circ \sigma : [v_0 v_1 \cdots v_k] \rightarrow Y$ は Y の k -単体になる．ここから $\varphi : C_k(X) \rightarrow C_k(Y)$ が

$$\varphi \left(\sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \sigma_{\alpha} \right) := \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \varphi(\sigma_{\alpha})$$

と誘導される．

補題 7.26. $\varphi \circ \partial_k = \partial_k \circ \varphi$ ．

証明. 任意の X の k -単体 σ について $\varphi \circ \sigma$ が Y の k -単体であるから,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \partial_k)(\sigma) &= \varphi \left(\sum (-1)^i \sigma|_{[v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_k]} \right) \\ &= \sum (-1)^i \varphi \circ \sigma|_{[v_0 \dots \hat{v}_i \dots v_k]} \\ &= \partial_k(\varphi \circ \sigma). \end{aligned}$$

□

補題から,

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & C_{k+1}(X) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(X) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(X) & \longrightarrow \\ & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & \\ \longrightarrow & C_{k+1}(Y) & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & C_k(Y) & \xrightarrow{\partial_k} & C_{k-1}(Y) & \longrightarrow \end{array}$$

が可換になる. よって, 以前やったように

$$\varphi_{\#}([z]) := [\varphi(z)]$$

で, 準同型写像 $\varphi_{\#} : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ が well-defined である.

補題 7.27. (1) $X \xrightarrow{\varphi} Y \xrightarrow{\varphi'} Z$ のとき, $\varphi'_{\#} \circ \varphi_{\#} = (\varphi' \circ \varphi)_{\#}$.

(2) $\mathbf{1}_{\#} = \mathbf{1}$.

証明. (1) は

$$(\varphi' \circ \varphi)_{\#}([z]) = [\varphi' \circ \varphi(z)] = \varphi'_{\#}([\varphi(z)]) = \varphi'_{\#} \circ \varphi_{\#}([z]).$$

より従う. (2) は明らか.

□

定理 7.28. 位相空間 X, Y が同相ならば $H_k(X) \simeq H_k(Y)$.

証明. $\varphi : X \rightarrow Y$ を同相写像とすると, 前の補題から $\varphi_{\#}^{-1} \circ \varphi_{\#} = \mathbf{1}$, $\varphi_{\#} \circ \varphi_{\#}^{-1} =$

$\mathbf{1}$. □

実はさらに強く次のことが言える.

定理 7.29. 位相空間 X, Y がホモトピー同値ならば $H_k(X) \simeq H_k(Y)$.

証明 (スケッチ). X と Y の間のホモトピー同値写像を $f : X \rightarrow Y$, $g : Y \rightarrow X$

とすると $g \circ f \simeq \text{id}_X$, $f \circ g \simeq \text{id}_Y$ である. ここから $(g \circ f)_{\#} = \text{id}_{H_k(X)}$ を示せば

よい. すると, $g_{\#} \circ f_{\#}$ と $f_{\#} \circ g_{\#}$ が全単射であることから $f_{\#}$ と $g_{\#}$ の全単射性

を得る.

$g \circ f$ と id_X の間のホモトピーによって, サイクル z は連続的にサイクル $g \circ f(z)$

になる (図 11). $n = 2$ の場合, サイクルの軌跡が作る筒を図 12 のように単体たち

で表すことができるので, $z \sim g \circ f(z)$ となる. よって $(g \circ f)_{\#}([z]) = [z]$.

一般の n の場合は, サイクル $z = \sum_{\alpha} \mu_{\alpha} \sigma_{\alpha}$ の各単体 σ_{α} に対して, 図 13 のよ

うにプリズムを 1 次元上がった単体に分割する. □

問題 7.3. きちんと証明せよ.

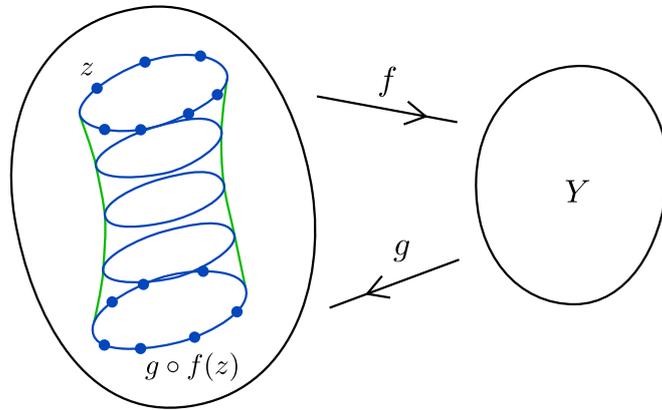


図 11: サイクルの軌跡.

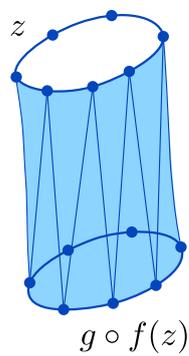


図 12: サイクルの筒の単体分割.

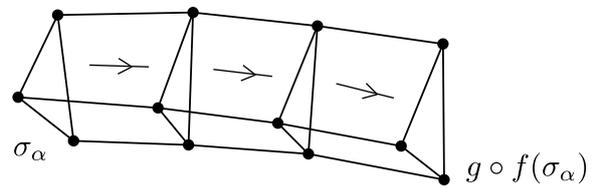


図 13: 単体のなすプリズムの分割.