

# 幾何数理工学ノート

## 位相幾何：ホモロジーの計算

平井広志

東京大学工学部 計数工学科 数理情報工学コース

東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻

`hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp`

協力：池田基樹（数理情報学専攻 D1）

## 8 ホモロジーの計算

### 8.1 2次元複体のホモロジーの計算

ここでは、トーラスや射影平面といった2次元の（複体構造をもつ）空間のホモロジーの計算を実際やってみる。一般に単体複体を愚直につくると構成する単体の数が多くなってしまい手計算ではたいへんである（計算機で計算する方法は次節で述べる）。実際、トーラスを単体分割を考えると、一見、2個の単体でできるようにみえるが、これは単体複体でない。なぜなら、同じ頂点を2度つかう単体があるからである。もっと細かく分割することで単体分割が得られる。

そこで、2次元単体複体の条件をゆるめて、多角形をつかうこともゆるす複体の構造を導入して、それに対しホモロジーを導入する。そして、それは、細分して得られる単体複体のホモロジーと同型になることをしめす。その後、具体的な例を計算する。

セル複体の定義を思い出して、次のようにして、空間を構成する。

0: 有限集合  $V$  を用意する。  $V$  の各元を頂点と呼ぶ。  $V$  には離散位相をいれる。

1: 1次元ディスク  $D^1$  からなる有限集合  $E$  を用意する。  $E$  の各元を枝と呼ぶ。

各枝  $e \in E$  をその境界（端点）から、  $V$  への連続写像  $\varphi_e$  によって、貼り合わせてグラフ  $G$  を構成する：

$$G := (V \coprod_{e \in E} e) / x \sim \varphi_e(x).$$

グラフ  $G$  を  $(V, E)$  とも書いて、通常のグラフのようにも扱う。

2: 2次元ディスク  $D^2$  の集合  $F$  を用意する。  $F$  の各元を面と呼ぶ。 各面  $f$  をその境界から  $G$  への局所同相写像  $\varphi_f$  によって、境界にそって  $G$  に貼り合わせる：

$$(G \coprod_{f \in F} f) / x \sim \varphi_f(x).$$

このようにして得られる2次元のセル複体を  $(V, E, F)$  とかく。ステップ1では位相的なグラフの構成である（図1）。1次元単体的複体との違いは、同じ端点集合をもつ枝が2つ以上あってもよいこと（平行枝）、両端点と同じ枝（ループ）をゆるしている点である。ステップ2では、グラフにいくつかの閉路を指定して、それ

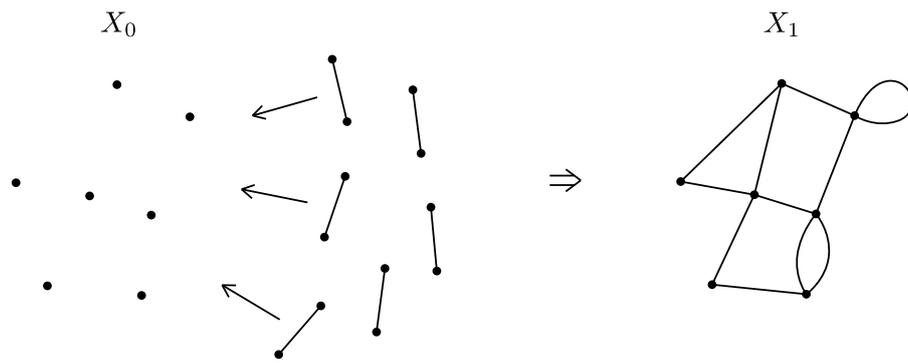


図 1: グラフの構成

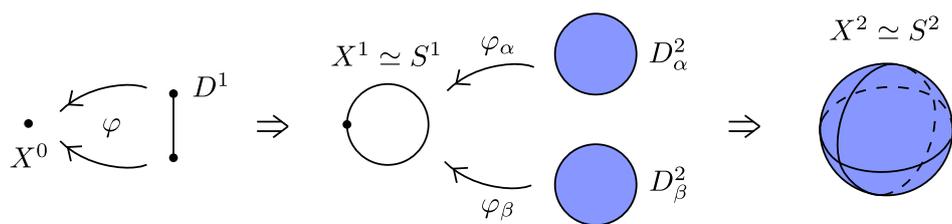


図 2: 球面の構成

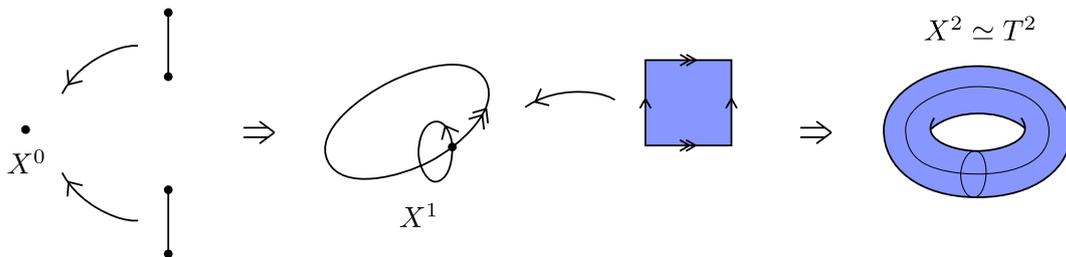


図 3: トーラスの構成

らの閉路を境界としてもつようにディスクをつめている．閉路は，同じ枝や頂点を何度用いてもよい．もしも，ループや平行枝が存在せず，3つの枝からなる閉路に対し，それを境界してもつ面高々1個の場合は，2次元単体的複体と同一視できる．図2, 3に，トーラスと球面の構成を示した．単体的複体に比べ少ない個数で構成されている点に注意する．

枝の端点が  $u, v$  で向きが  $u \rightarrow v$  のとき， $[uv]$  のようにあらわすものとする．ループは  $[uu]$  となる．平行枝  $e, e'$  は同じ  $[uv]$  になるが，混乱がおきないように注

意して扱う。面については、対応する閉路のまわる向きを「向き」として考えて、  
枝を  $e_0 \rightarrow e_1 \rightarrow \cdots \rightarrow e_k \rightarrow e_0$  とまわるとき、

$$(e_0 e_1 \cdots e_k)$$

とあらわすことにする。ただし、各  $e_i$  はサイクルの向きを向いているのものとする。  
さらにどこを始点、終点とするかにはよらないものとする。すなわち、

$$(e_1 e_2 \cdots e_k e_0) = (e_0 e_1 \cdots e_k).$$

単体的複体のときと同様に、0-チェイン群  $C_0$  は、頂点の整数結合、1-チェイン群  $C_1$  は、枝の整数結合、2-チェイン群  $C_2$  は、面の整数結合の群とする。向きについては、 $[uv] = -[vu]$  ( $u \neq v$ )、 $f = -f'$  ( $f$  と  $f'$  がまわる向きが違うとき) とする。  
境界作用素  $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$  ( $k = 0, 1, 2$ ) は、

$$\partial_0([v]) := 0,$$

$$\partial_1([uv]) := [v] - [u],$$

$$\partial_2((e_0 e_1 \cdots e_k)) := e_0 + e_1 + \cdots + e_{k-1} + e_k$$

と定義して線形的に拡張する。すると、 $\partial_{k-1} \partial_k = 0$  ( $k = 1, 2$ ) である。実際、

$$\partial_1 \partial_2(e_0 e_1 \cdots e_k) = \partial_1(e_0 + e_1 + \cdots + e_k) = 0.$$

最後の等式は、 $e_i$  の終点と  $e_{i+1}$  の始点が等しいことからわかる。以上より、同様に、ホモロジー群  $H_0 := C_0 / \text{Im } \partial_1$ ,  $H_1 := \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2$ ,  $H_2 := \text{Ker } \partial_2$  を定義す

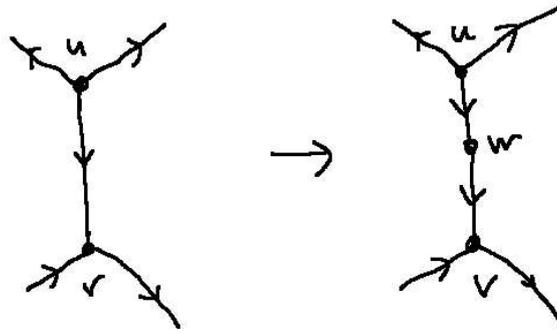


図 4: 枝の細分

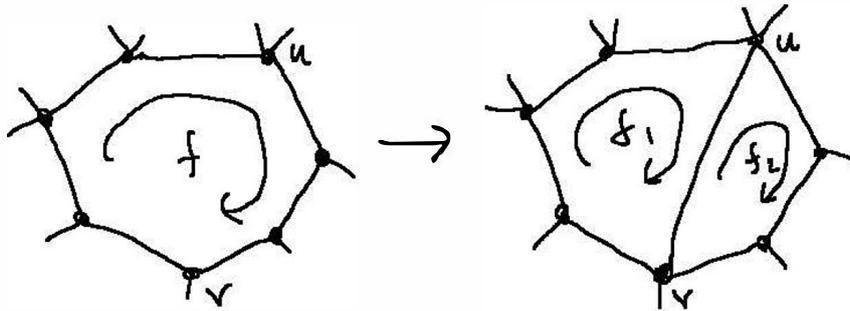


図 5: 面の細分

る. 細分操作に対する不変性を証明する.

補題 8.1. ホモロジー群  $H_n$  ( $n = 0, 1, 2$ ) は, 以下の操作で不変である:

枝の細分: 枝  $e = [uv]$  を, 新しい点  $w$  を追加して 2 つの枝  $[uw], [wv]$  に置き換える (図 4)

面の細分: 面  $(e_0 e_1 \cdots e_k)$  を, その中の頂点  $u, v$  を結ぶ新しい枝  $e = [uv]$  を追加して, 図 5 のように 2 つの面に置き換える.

証明. 面細分操作後のチェイン群を  $C'_k$ , 境界作用素を  $\partial'_k$ , ホモロジー群  $H'_k$  とかく. すると  $C_0 = C'_0, C_1 \subseteq C'_1$  である. 面  $f$  が新しい枝  $[uv]$  によって, 2 つの面

$f_1, f_2$  に分割されたとする.  $f_1$  と  $f_2$  の向きは,  $f$  の向きから誘導されるものにとる. このとき  $u, v$  が現れる順が  $f_1$  と  $f_2$  では逆になる.  $f$  を  $f_1 + f_2$  に置き換える写像  $C_2 \rightarrow C'_2$  を考え,  $C_0 \rightarrow C'_0$  は恒等写像,  $C_1 \rightarrow C'_1$  は包含写像を考える. それぞれは, 準同型写像で  $\varphi: C_k \rightarrow C'_k$  とかくと,

$$\partial'_k \circ \varphi = \varphi \circ \partial_k \quad (1)$$

が成り立つ. (**TODO:** 可換図式を追加する) 実際  $\partial'_k \circ \varphi(f) = \partial'_2(f_1 + f_2) = (\dots + [uv]) + ([vu] + \dots) = \partial_2(f) = \varphi \circ \partial_2(f)$ . なので,  $\varphi_\# : H_k \rightarrow H'_k$  が well-defined となる. 実際,  $c \simeq c'$  なら,  $c = c' + \partial_{k+1}u$  ( $\exists u \in H_{k+1}$ ) なので,  $\varphi(c) = \varphi(c') + \varphi\partial_{k+1}u = \varphi(c) = \varphi(c') + \partial'_{k+1}\varphi(u)$  となり,  $\varphi(c) \simeq \varphi(c')$ , つまり,  $[\varphi(c)] = [\varphi(c')]$ .

$\varphi_\#$  が,  $k = 0, 1, 2$  で同型であることをしめす.

$n = 0$  について:  $\text{Im } \partial_1 = \text{Im } \partial'_1$  をしめせばよいが,  $\partial'_1[uv] = [v] - [u]$  は,  $f_2$  の周を構成する枝たちから  $[vu]$  を除いたもの  $\partial_1$  の像としてかけることから従う.

$n = 1$  について: 単射性を示す.  $\varphi_\#([z]) = 0$  とすると, これは,  $\varphi(z) = z = \partial'_2 w$  を意味している.  $z$  のなかでは,  $[uv]$  の係数は, ゼロなので,  $w$  のなかの  $f_1, f_2$  の係数は同じでなければならない. つまり,  $w$  は  $\mu(f_1 + f_2)$  を項としてもつ. この項を  $\mu f$  でおきかえるチェイン  $w' \in C_2$  を考えると,  $z = \partial_2 w'$  となる. これは,  $[z] = 0$  を表している. 全射性:  $[z] \in H'_1$  をとったとき, もしも  $z$  のなかで  $[uv]$  の係数がゼロなら,  $[z] \in H_1$  とみなせる. そうでないとする,  $[uv]$  は,  $f_2$  の周の一部なので,  $[uv]$  以外の周の枝のチェインとホモロークである.  $[uv]$  をそのチェイン

におきかえて得られるチェイン  $z'$  は,  $[z'] = [z]$  となり,  $[z']$  のなかで  $[uv]$  の係数がゼロとなる.

$n = 2$  について:  $H_2 = \text{Ker } \partial_2 \subseteq C_2$ ,  $H'_2 = \text{Ker } \partial'_2 \subseteq C_2$  なので,  $\varphi_{\#} = \varphi$  と思っていい. そのことと定義から  $\varphi_{\#}$  の単射性は明らかである.  $z \in H'_2 = \text{Ker } \partial_2$  をとる.  $\partial'_2 z = 0$  なので,  $[uv]$  の係数は, ゼロ, したがって,  $z$  のなかで  $f_1, f_2$  の係数は, 同じで  $\mu(f_1 + f_2)$  のようになっている. これを  $\mu f$  におきかえたチェイン  $z' \in C_2$  に対して,  $\varphi_{\#}(z') = z$  となる.

枝細分の場合も同様に示せる:  $[w]$  の係数がゼロのときは,  $[vw], [wv]$  の係数が同じでなくてはいけなくて... □

**問題 8.1.** 枝細分の場合を証明せよ.

**定理 8.2.** 2次元単体的複体で分割される空間  $X$  のホモロジー群は, 単体分割の取り方によらず決まる.

**証明.** 2つの単体分割に対し, 細分操作を繰り返すことで共通の細分がえられるので, それらのホモロジー群は等しい.  $X$  が2次元単体的複体で分割されたとすると, 他の単体分割も2次元である. それは,  $\mathbb{R}^2$  と  $\mathbb{R}^k$  ( $k \geq 3$ ) が同相になりえないことからわかる. □

この証明のやり方は, 一般の場合に通用しそうである. 実際, 2つの単体分割が共通細分が存在すれば, それらのホモロジー群は等しくなる. しかし, 意外に思えるが, 共通細分が存在しないような2つの単体分割をもつ4次元多様体が存在するそうである.

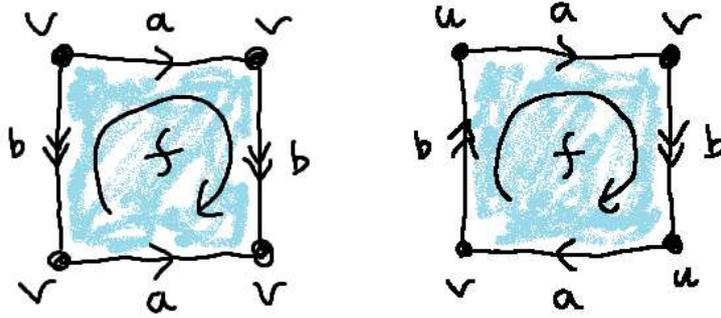


図6: トーラス (左) と射影平面 (右) に対する複体

問題 8.2. これについて調べよ.

例 8.1 (トーラス  $S^1 \times S^1$ ). 図6のように複体構造をつくる. すると

$$C_0 = \mathbb{Z}[v],$$

$$C_1 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b,$$

$$C_2 = \mathbb{Z}f$$

である.  $H_0 = \mathbb{Z}$  は, もうわかっているので,  $H_1 = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2$  と  $H_2 = \text{Ker } \partial_1$  をきめる. まず,  $\partial_2 f = a + b - a - b = 0$  なので,  $\text{Im } \partial_2 = 0$ , そして,  $\text{Ker } \partial_1 = C_2 \simeq \mathbb{Z}$  を得る. さらに,  $\partial_1 a = \partial_1 b = [v] - [v] = 0$  から,  $H_1 = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = C_2 \simeq \mathbb{Z}^2$  を得る. ゆえに,

$$H_k = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^2 & \text{if } k = 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる.

例 8.2 (球面  $S^2$ ). 図2のように, 1つのループ  $e = [vv]$  にそって, 2つのディスク

ク  $f, f'$  を貼りあわせることで、球面  $S^2$  の複体構造を得る。すると

$$C_0 = \mathbb{Z}[v],$$

$$C_1 = \mathbb{Z}e,$$

$$C_2 = \mathbb{Z}f + \mathbb{Z}f'$$

である。  $\partial_1 e = [v] - [v] = 0$  なので、  $\text{Ker } \partial_1 = C_1$  であるが、  $\partial_2 f = \partial_2 f' = e$  なので、  $\text{Ker } \partial_1 = \text{Im } \partial_2$ 。つまり、  $H_1 = 0$ 。また、  $\mu f + \mu' f' \in \text{Ker } \partial_2 \Leftrightarrow \mu + \mu' = 0$ 。したがって、  $H_2 = \text{Ker } \partial_2 = \mathbb{Z}(f - f') \simeq \mathbb{Z}$ 。ゆえに、

$$H_k = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 0, 2, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。

**例 8.3** (射影平面  $P^2$ )。図 6 のように複体構造をつくる。すると

$$C_0 = \mathbb{Z}[u] + \mathbb{Z}[v],$$

$$C_1 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b,$$

$$C_2 = \mathbb{Z}f$$

である。  $\partial_2 f = a + b + a + b = 2(a + b) (\neq 0)$  なので、  $H_2 = \text{Ker } \partial_2 = 0$ 。また、  $\text{Im } \partial_2 = 2\mathbb{Z}(a + b)$  がわかる。さらに  $\partial_1(\mu a + \mu' b) = \mu([v] - [u]) + \mu'([u] - [v]) = (\mu - \mu')([u] - [v])$  より、  $\mu a + \mu' b \in \text{Ker } \partial_1 \Leftrightarrow \mu = \mu'$  と  $\text{Ker } \partial_1 = \mathbb{Z}(a + b)$  がわ

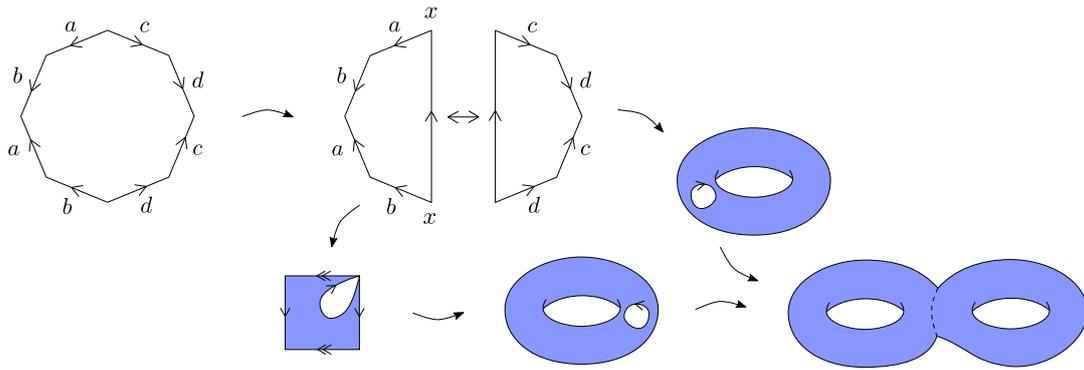


図 7: ダブルトーラス

かる. よって,  $H_1 = \text{Ker } \partial_1 / \text{Im } \partial_2 = \mathbb{Z}(a+b) / 2\mathbb{Z}(a+b) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ . ゆえに,

$$H_k = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 0, \\ \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} & \text{if } k = 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる. この結果は,  $\pi_1(P^2) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  と整合している.

**例 8.4** (ダブルトーラス). 2つ穴のトーラス (ダブルトーラス) のホモロジー群を計算しよう. 複体としては, 図 7 のようにとり, 面  $f$  は時計方向にまわる向きが付いているとする. また, 頂点は, すべて同一の  $[v]$  になることに注意する.

$$C_0 = \mathbb{Z}[v],$$

$$C_1 = \mathbb{Z}a + \mathbb{Z}b + \mathbb{Z}c + \mathbb{Z}d,$$

$$C_2 = \mathbb{Z}f.$$

$\partial_2 f = -a + c + d - c - d + b + a - b = 0$  より,  $H_2 = \text{Ker } \partial_2 = C_2 \simeq \mathbb{Z}$  と  $\text{Im } \partial_2 = 0$

を得る。また、どの枝  $e$  もループなので、 $\text{Ker } \partial_1 = C_1 \simeq \mathbb{Z}^4$ 。以上より、

$$H_k = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 0, 2, \\ \mathbb{Z}^4 & \text{if } k = 1, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

となる。

**問題 8.3.**  $k$  個の穴を持つトーラスのホモロジー群を計算せよ。

## 8.2 スミス標準形による方法

ここでは、計算機上で実行できるホモロジー群の計算の仕方を解説する。

**定義 8.3** (自由アーベル群).  $G$  をアーベル群とする (単位元は  $0$  で表す).  $e \in G$  の  $n$  個の足し算を  $ne = e + e + \dots + e$  で表す.  $r$  個の元  $e_1, \dots, e_r \in G$  が存在して、任意の  $g \in G$  が一意に  $g = \sum_i n_i e_i$  ( $n_i \in \mathbb{Z}$ ) と書けるとき、 $G$  を自由アーベル群 (あるいは自由  $\mathbb{Z}$  加群) という. このとき、 $G \simeq \mathbb{Z}^r$  で、 $r$  を  $G$  のランク、 $e_1, \dots, e_r$  のことを  $\mathbb{Z}$  基底という.

**定義 8.4** (ユニモジュラ行列). 正方整数行列  $Q \in \mathbb{Z}^{r \times r}$  がユニモジュラ  $\stackrel{\text{def}}{\iff} \det Q = \pm 1$

$\iff e_1, e_2, \dots, e_r$  が  $\mathbb{Z}$  基底なら

$$e'_i = \sum_j Q_{ij} e_j \quad (i = 1, \dots, r)$$

も  $\mathbb{Z}$  基底. つまりユニモジュラ行列は自由アーベル群の基底変換行列.



これらはユニモジュラ行列で書ける. 実際, それぞれ行列

$$\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & -1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & & \ddots & \\ & 1 & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & c & \cdots & 1 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}$$

を左右から掛けることで表現できる．例を用いて証明する．

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} -3 & 4 & 4 \\ -2 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} &\xrightarrow{(i)(ii)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -3 & 4 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} && \text{絶対値最小のゼロでない要素を 11 成分へ} \\
 &\xrightarrow[\text{2行}+2\times\text{1行}]{(iii)} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 1 & 0 & 12 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} && \text{1行, 1列の } a_{11} \text{ で割り切れないものを余りにする} \\
 &\xrightarrow{(i)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 2 & -2 & 4 \\ 4 & -4 & 4 \end{pmatrix} && \text{絶対値の最小値が減少するので 11 成分へ} \\
 &\xrightarrow{(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -20 \\ 0 & -4 & -44 \end{pmatrix} && \text{1行, 1列は } a_{11} \text{ で割り切れるので割り切って 0 に} \\
 &\xrightarrow{(i)(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -20 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} && a_{11} \text{ で右下ブロックが割り切れるなら, 同様に変換} \\
 &\xrightarrow{(i)(iii)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} && 
 \end{aligned}$$

もし右下のブロックに  $a_{11}$  で割り切れない要素があれば，その要素を 1 行（列）に移動して  $a_{11}$  で割った余りにすると絶対値減少．これを 11 成分へ移動して繰り返す．一意性について（**TODO**）． □

補題 8.6.  $AB = O$  ならユニモジュラ行列  $P, Q, R$  が存在して

$$PAQ = \begin{bmatrix} O & O \\ O & \Pi \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}BR = \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

とできる. ここで,  $\Pi$  は,  $A$  の単因子を対角に持つ正方対角行列で,  $\Lambda$  は,  $B$  の単因子を対角に持つ正方対角行列である.

証明. まず  $A$  をスミス標準形

$$PA\tilde{Q} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & \Pi \end{bmatrix}$$

にする.  $AB = O$  より

$$\tilde{Q}^{-1}B = \begin{bmatrix} * \\ O \end{bmatrix}$$

となる.  $\tilde{Q}^{-1}B$  (の非ゼロブロック) をスミス形にする.

$$\begin{bmatrix} S & O \\ O & I \end{bmatrix} \tilde{Q}^{-1}BR = \begin{bmatrix} \Lambda & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

ここで,  $PA\tilde{Q}$  の最初のゼロ列の個数は,  $\Lambda$  のサイズ以上であることに注意すると

$$PA\tilde{Q} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & \Pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & O \\ O & \Pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S^{-1} & O \\ O & I \end{bmatrix}$$

である. よって,  $Q := \tilde{Q} \begin{bmatrix} S^{-1} & O \\ O & I \end{bmatrix}$  とすればよい. □

$K$  を単体的複体とする.  $k$ -単体の個数を  $c_k (< \infty)$  とおく.  $C_k$  を  $k$ -チェイン

( $k$ -単体の整数結合) 全体とする. これはランク  $c_k$  の自由アーベル群であり,  $\mathbb{Z}^{c_k}$  と同型になる. 特に,  $k$ -単体  $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{c_k}$  は  $C_k$  の  $\mathbb{Z}$  基底である.

境界作用素  $\partial_k : C_k \rightarrow C_{k-1}$  は  $\mathbb{Z}^{c_k} \rightarrow \mathbb{Z}^{c_{k-1}}$  と見なせ, 行列表示できる. つま  
り,  $\sigma_i = [v_0 v_1 \cdots v_k]$  が

$$\partial_k \sigma_i = \sum_{j=0}^k (-1)^j [v_0 \cdots \hat{v}_j \cdots v_k] = \pi_{i_0} - \pi_{i_1} + \pi_{i_2} - \cdots + \pi_{i_k}$$

( $\pi_{i_j} = [v_1 \cdots \hat{v}_j \cdots v_k]$ ) となるなら,  $\partial_k$  は写像

$$\sum_{j=1}^{c_k} t_j \sigma_j = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \cdots \ \sigma_{c_k}] \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{c_k} \end{bmatrix} \mapsto \sum_{j=1}^{c_k} t_j \partial_k \sigma_j = [\pi_1 \ \pi_2 \ \cdots \ \pi_{c_{k-1}}] \begin{matrix} i_0 & 1 \\ i_1 & -1 \\ i_2 & 1 \\ \vdots & \vdots \end{matrix} \begin{matrix} i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \vdots \\ t_{c_k} \end{bmatrix}$$

と見なせる.

以上を利用して  $H_k = \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$  を計算する.  $C_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} C_k \xrightarrow{\partial_k} C_{k-1}$ ,  
 $\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$  であった.  $C_{k+1}$  の基底を  $\rho_1, \dots, \rho_{c_{k+1}}$ ,  $C_k$  の基底を  $\sigma_1, \dots, \sigma_{c_k}$ ,  
 $C_{k-1}$  の基底を  $\pi_1, \dots, \pi_{c_{k-1}}$  とし, これに対する行列表示を考えると,

$$[\partial_k][\partial_{k+1}] = 0$$

となる。補題 8.6 より, ユニモジュラ行列  $P, Q, R$  が存在して

$$P[\partial_k]Q = \begin{bmatrix} O & O \\ O & \Pi_k \end{bmatrix}, \quad Q^{-1}[\partial_{k+1}]R = \begin{bmatrix} \Pi_{k+1} & O \\ O & O \end{bmatrix}$$

と書ける。  $\Pi_k$  は,  $[\partial_k]$  の単因子を対角に持つ正方対角行列で, サイズを  $h_k$  とする。すると,  $P[\partial_k]Q$  の最初のゼロ列の個数は,  $c_k - h_k$  で,  $h_{k+1}$  以上である。  $\partial_k$  が

$$[\sigma_1 \cdots \sigma_{c_k}] \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{c_k} \end{bmatrix} \mapsto [\pi_1 \cdots \pi_{c_{k-1}}] \begin{bmatrix} \partial_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{c_k} \end{bmatrix}$$

という写像で,  $\partial_{k+1}$  が

$$[\rho_1 \cdots \rho_{c_{k+1}}] \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{c_{k+1}} \end{bmatrix} \mapsto [\sigma_1 \cdots \sigma_{c_k}] \begin{bmatrix} \partial_{k+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_{c_{k+1}} \end{bmatrix}$$

という写像であったことを思い出す。  $C_{k+1}, C_k, C_{k-1}$  の基底を

$$\begin{aligned} [\rho'_1 \cdots \rho'_{c_{k+1}}] &= [\rho_1 \cdots \rho_{c_{k+1}}]R^{-1}, \\ [\sigma'_1 \cdots \sigma'_{c_k}] &= [\sigma_1 \cdots \sigma_{c_k}]Q, \\ [\pi'_1 \cdots \pi'_{c_{k-1}}] &= [\pi_1 \cdots \pi_{c_{k-1}}]P^{-1} \end{aligned}$$

に変換すると,  $\partial_{k+1}$  と  $\partial_k$  はそれぞれ

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \rho'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'_1 \\ \vdots \\ s'_{c_{k+1}} \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \sigma'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Pi_{k+1} & O \\ O & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s'_1 \\ \vdots \\ s'_{c_{k+1}} \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \sigma'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t'_1 \\ \vdots \\ t'_{c_k} \end{bmatrix} &\mapsto \begin{bmatrix} \pi'_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & O \\ O & \Pi_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t'_1 \\ \vdots \\ t'_{c_n} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

となる. すると,

$$\begin{aligned} \text{Ker } \partial_k &= \mathbb{Z}\sigma'_1 + \mathbb{Z}\sigma'_2 + \cdots + \mathbb{Z}\sigma'_{h_{k+1}} + \cdots + \mathbb{Z}\sigma'_{c_k - h_k}, \\ \text{Im } \partial_{k+1} &= \alpha_1\mathbb{Z}\sigma'_1 + \alpha_2\mathbb{Z}\sigma'_2 + \cdots + \alpha_{h_{k+1}}\mathbb{Z}\sigma'_{h_{k+1}} \end{aligned}$$

である. ここで,  $\alpha_1|\alpha_2|\cdots|\alpha_{h_{k+1}}$  は,  $[\partial_{k+1}]$  の単因子で,  $c_k - h_k \geq h_{k+1}$  に注意する. したがって, ホモロジー群  $H_k = \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$  は, 以下のようになる.

$$\begin{aligned} H_k &= (\mathbb{Z}/\alpha_1\mathbb{Z})\sigma'_1 + \cdots + (\mathbb{Z}/\alpha_{h_{k+1}}\mathbb{Z})\sigma'_{h_{k+1}} + \mathbb{Z}\sigma'_{h_{k+1}+1} + \cdots + \mathbb{Z}\sigma'_{c_k - h_k} \\ &\simeq \mathbb{Z}/\alpha_1\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\alpha_{l+1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\alpha_{h_{k+1}}\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}^{c_k - h_k - h_{k+1}}. \end{aligned}$$

ここで,  $\alpha_1 = \cdots = \alpha_{l-1} = 1 < \alpha_l$  としており,  $\mathbb{Z}/\mathbb{Z} = 0$  に注意する.  $\mathbb{Z}/\alpha_l\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\alpha_{l+1}\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}/\alpha_{h_{k+1}}\mathbb{Z}$  をねじれ成分と呼ぶ.  $\text{rank } H_k := c_k - h_k - h_{k+1}$  と定義する.

以上より,  $[\partial_k]$  ( $k = 0, 1, \dots$ ) のスミス標準形を求めれば  $H_k$  を決定できることが分かった.

定義 8.7 (オイラー標数 (Euler characteristic)).

$$\chi(X) := \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k c_k.$$

命題 8.8.  $\chi(X) = \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k \text{rank } H_k(X)$ .

証明.  $\sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k (c_k - h_k - h_{k+1}) = \sum_{k=0}^{\dim X} (-1)^k c_k$ . □

注意 8.9. ホモロジー群は位相不変量であり複体構造には依存しない. したがって, オイラー標数も複体には依存せず決まる.

定理 8.10 (オイラーの多面体定理). 多面体の面の個数を  $F$ , 辺の個数を  $E$ , 点の個数を  $V$  とすると  $F - E + V = 2$ .

定理 8.11 (平面グラフ). 平面グラフ (平面に枝の交差なしで描けるグラフ) の有界面の個数を  $F$ , 枝の個数を  $E$ , 点の個数を  $V$  とすると  $F - E + V = 1$ .

### 8.3 完全系列による方法

上に述べた方法は, いったん単体的複体が与えられると (計算機の上で) ホモロジー群が計算できる. 一方で, 理論的に計算したい・証明したいときには不便である. 例えば, すべての  $n$  について球面  $S^n$  のホモロジー群を知りたい, といった場合である. ここでは, そのような場合につかえる計算法・証明法を紹介する.

アーベル群の列  $\dots, A_{k+1}, A_k, A_{k-1}, \dots$  と各インデックス  $k$  に対する準同型写像  $\partial_k : A_k \rightarrow A_{k-1}$  の組で,

$$\partial_k \circ \partial_{k+1} = 0$$

をみたすものをチェイン複体という。チェイン複体は、

$$\cdots \rightarrow A_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} A_k \xrightarrow{\partial_k} A_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots$$

のように書かれる。チェイン複体にたいして、ホモロジー群  $H_k = H_k(A)$  を

$$H_k := \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$$

と定義する。単体的複体  $K$  は、チェイン複体  $C_k(K), \partial_k$  を定め、このホモロジー群の定義は、上述のもとと一致する。ここでは、単体的複体に対応しているとは限らない一般のチェイン複体を考える。

完全系列とは、チェイン複体であって、すべての（定義される）インデックス  $k$  で

$$\text{Ker } \partial_k = \text{Im } \partial_{k+1}$$

となるものである。いいかえるとすべてのホモロジー群が  $H_k = 0$  ということである。定義から以下がわかる。

**補題 8.12.** (i)  $A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$  が完全系列なら、 $f$  は全射。

(ii)  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B$  が完全系列なら、 $f$  は単射。

(iii)  $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \rightarrow 0$  が完全系列なら、 $f$  は同型写像。特に、 $A$  と  $B$  は同型。

これからやろうとしているのは、(iii) をもとにしたホモロジー群のシステムティックな計算法である。

チェイン複体  $\cdots \rightarrow A_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} A_k \xrightarrow{\partial_k} A_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots$  からチェイン複体

$\cdots \rightarrow B_{k+1} \xrightarrow{\partial_{k+1}} B_k \xrightarrow{\partial_k} B_{k-1} \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots$  へのチェイン写像とは, 準同型写像

$\varphi : A_k \rightarrow B_k \ (\forall k)$  の組で, 以下の図式が可換となるものである.

$$\begin{array}{ccccccc} \longrightarrow & A_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & A_k & \xrightarrow{\partial_k} & A_{k-1} & \longrightarrow \\ & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & & \downarrow \varphi & \\ \longrightarrow & B_{k+1} & \xrightarrow{\partial_{k+1}} & B_k & \xrightarrow{\partial_k} & B_{k-1} & \longrightarrow \end{array}$$

単体的複体のときの議論と同様にして, 準同型写像  $\varphi_{\#} : H_k(A) \rightarrow H_k(B)$  が定義される.

**定理 8.13.**  $A_k, B_k, C_k$  をチェイン複体とし,  $\varphi : A_k \rightarrow B_k$ ,  $\phi : B_k \rightarrow C_k$  がチェイン写像で,

$$0 \rightarrow A_k \rightarrow B_k \rightarrow C_k \rightarrow 0 \quad (\forall k)$$

が完全であるとする. このとき, 完全系列

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(C) \rightarrow H_k(A) \rightarrow H_k(B) \rightarrow H_k(C) \rightarrow H_{k-1}(A) \rightarrow \cdots$$

が存在する.

証明はどんな教科書にもものっている.

**問題 8.4.** これを調べよ.

ここでは, これを用いてホモロジー群がどうやって計算されるかデモンストレーションする.

**例 8.5** (マイヤー・ビートリス完全系列, 球面のホモロジー群).  $K$  を単体的複体,

$L, M$  を  $K$  の部分複体で,  $K = L \cup M$  となるものとする. このとき, チェイン複体の短完全系列が存在する:

$$0 \rightarrow C_k(L \cap M) \rightarrow C_k(L) \oplus C_k(M) \rightarrow C_k(K) \rightarrow 0$$

ここで,  $C_k(L \cap M) \rightarrow C_k(L) \oplus C_k(M)$  は, 包含写像  $z \mapsto (z, z)$  で,  $C_k(L) \oplus C_k(M) \rightarrow C_k(K)$  は,  $(z, z') \mapsto z - z'$  である. したがって, ホモロジー群の完全系列

$$\cdots \rightarrow H_{k+1}(K) \rightarrow H_k(L \cap M) \rightarrow H_k(L) \oplus H_k(M) \rightarrow H_k(K) \rightarrow H_{k-1}(L \cap M) \rightarrow \cdots$$

が存在する. これをマイヤー・ビートリス完全系列という.

さて,  $S^n$  を  $n$  次元球面とすると, 上半球面  $S_+^n$  と下半球面  $S_-^n$  の和集合としてかけ, その交わり  $S_+^n \cap S_-^n$  は,  $n-1$  次元球面  $S^{n-1}$  である.  $S_+^n, S_-^n$  はそれぞれ  $n$  次元ディスクと同相である. したがって, 完全系列

$$\cdots \rightarrow H_k(S^{n-1}) \rightarrow H_k(D^n) \oplus H_k(D^n) \rightarrow H_k(S^n) \rightarrow H_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow H_{k-1}(D^n) \oplus H_{k-1}(D^n) \rightarrow \cdots$$

を得る. ここで,  $H_k(D^n) = 0$  ( $n \geq k \geq 1$ ) であったことを思い出すと完全系列

$$0 \rightarrow H_k(S^n) \rightarrow H_{k-1}(S^{n-1}) \rightarrow 0 \quad (n, k \geq 2) \quad (2)$$

を含んでいる. 特に,  $H_k(S^n) \simeq H_{k-1}(S^{n-1})$  ( $n, k \geq 2$ ) である. このことから,

$$H_k(S^n) = H_{k-1}(S^{n-1}) = \cdots = H_1(S^{n-k})$$

を得る.  $H_1(S^1) = \mathbb{Z}$  から,  $H_n(S^n) = \mathbb{Z}$  ( $n \geq 1$ ). さらに,  $H_1(S^m) = 0$  ( $m \geq 2$ ) に注意する. それは,  $S^m$  ( $m+1$ -単体の境界) の 1次元部分複体に対応するグラフは, 完全グラフで  $\text{Ker } \partial_1$  を生成するサイクルの基底として, 2-単体の境界からなるもの ( $\text{Im } \partial_2$  の元) がとれるからである. したがって,

$$H_k(S^n) = \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{if } k = 0, n, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

となる.

なお, (2) においては,  $k = 0$  のとき,  $H_0(D^n) = \mathbb{Z}$  から, 短完全系列

$$0 \rightarrow H_1(S^{n+1}) \rightarrow H_0(S^n) \rightarrow \mathbb{Z} \quad (n \geq 1)$$

を得るが, ここから ( $H_0(S^n) = \mathbb{Z}$  をもちいて) ただちに  $H_1(S^{n+1}) = 0$  が導かれるわけではない (導けるけれど).

連結な複体には対しては 0 次ホモロジー群が 0 になってくれると, このような計算が簡明になる. 0 次ホモロジー群を修正した簡約ホモロジー群  $\tilde{H}_k$  という概念あって,  $H_0 = \tilde{H}_0 \oplus \mathbb{Z}$  が成り立つ.

## 8.4 付録：有限生成アーベル群の構造定理

$G$  をアーベル群とする.  $e \in G$  の  $n$  個の足し算を  $ne = e + e + \cdots + e$  で表す. 有限個の元  $e_1, e_2, \dots, e_m \in G$  があって任意の元  $g$  が  $g = \sum_i n_i e_i$  と表せる (表し方はユニークでなくてよい) とき,  $G$  を有限生成という.

定理 8.14 (有限生成アーベル群の構造定理).  $G$  を有限生成アーベル群とすると,

$$G \simeq \mathbb{Z}^r \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_2} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_k}$$

と書ける. このとき  $\alpha_1 \mid \alpha_2 \mid \cdots \mid \alpha_k$  で,  $\mathbb{Z}_n = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$  は  $n$  次巡回群. さらに  $r, \alpha_1, \dots, \alpha_k$  は一意に定まる.

$\mathbb{Z}^r$  以外の  $\mathbb{Z}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{\alpha_k}$  をねじれ部分群,  $r$  を  $G$  の階数 (ランク) という.

補題 8.15. 自由アーベル群の部分群は, 自由アーベル群である.

単体的複体の場合,  $\text{Ker } \partial_k$  は, 自由アーベル群  $C_k$  の部分群であるので, 自由アーベル群で基底が存在する. そのことから, ホモロジー群  $H_k = \text{Ker } \partial_k / \text{Im } \partial_{k+1}$  は, それらの基底のホモロジー類から生成されるので有限生成である.

証明.  $M$  を自由アーベル群とすると

$$M = \mathbb{Z}e_1 \oplus \mathbb{Z}e_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_n \quad (e_1, e_2, \dots, e_n \text{ は } \mathbb{Z}\text{-基底})$$

である.  $N \subseteq M$  を部分加群とする.  $N$  が自由であることを  $M$  のランク  $n$  に関する帰納法で証明する.  $n = 1$  のときは,  $N$  は  $\mathbb{Z}e_1 \simeq \mathbb{Z}$  の部分群. よって,  $N$  は  $\alpha \in \mathbb{Z}$  によって  $N = \mathbb{Z}\alpha e_1$  と書くことができ, 基底  $\alpha e_1$  の自由アーベル群である. 次に

$$M' := \mathbb{Z}e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}e_{n-1}$$

$$N' := N \cap M'$$

とおくと、 $N'$  は  $M'$  の部分群で、帰納法の仮定より自由アーベル群。  $U \subseteq \mathbb{Z}$  を

$$x \in U \stackrel{\text{def}}{\iff} \exists u \in N' : xe_n + u \in N$$

で定義する。このとき、 $U$  は  $\mathbb{Z}$  の部分群になる。実際、 $x, y \in U$  なら  $\exists u, v \in N'$  で  $xe_n + u, ye_n + v \in N$  となるから、 $(x+y)e_n + (u+v) \in N$  である。したがって  $\exists \alpha \in \mathbb{Z}$  で  $U = \mathbb{Z}\alpha$  と書ける。特に  $\exists u \in N'$ 、 $\alpha e_n + u \in N$ 。次の主張を示せば補題が証明される。

**主張.**  $N = \mathbb{Z}(\alpha e_n + u) \oplus N'$ 。よって  $N$  は自由で  $\text{rank } N \leq \text{rank } M$ 。

まず  $N = \mathbb{Z}(\alpha e_n + u) + N'$  を示す。  $\supseteq$  は明らかなので  $\subseteq$  を示す。  $w \in N$  とすると  $w = x_1 e_1 + \cdots + x_{n-1} e_{n-1} + x_n e_n$  とかけ、 $x_1 e_1 + \cdots + x_{n-1} e_{n-1} \in N'$  となる。特に  $x_n \in U$  であり、 $x_n = k\alpha$  と書ける。よって、 $u \in N'$  より

$$w = k(\alpha e_n + u) + x_1 e_1 + \cdots + x_{n-1} e_{n-1} - ku \in \mathbb{Z}(\alpha e_n + u) + N'$$

が成り立つ。さらに  $\mathbb{Z}(\alpha e_n + u) \cap N' = \{0\}$  なので、 $k(\alpha e_n + u) + v = k'(\alpha e_n + u) + v'$  なら  $k = k'$ 、 $v = v'$ 。よって  $N = \mathbb{Z}(\alpha e_n + u) \oplus N'$ 。  $\square$

**定理 8.14 の証明.**  $e_1, e_2, \dots, e_m$  を  $G$  の生成系とする。  $\varphi : \mathbb{Z}^m \rightarrow G$  を  $\varphi(z) := \sum_{i=1}^m z_i e_i$  とおくと、 $\varphi$  は全射。補題 8.15 より、 $\text{Ker } \varphi$  は自由。よって整数  $n \geq 0$  と  $\sigma : \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}^m$  が存在して、 $\sigma$  は  $\mathbb{Z}^n$  から  $\text{Ker } \varphi$  への同型写像になるようにできる。すると

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}^n \xrightarrow{\sigma} \mathbb{Z}^m \xrightarrow{\varphi} G \longrightarrow 0$$

