R2 幾何数理工学 期末試験
90 minutes in 8:30–10:15, 2021/1/22
授業で証明した定理はつかってよい．

問題 1. トーラス $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ の被覆空間であって，互いに同相でないものを 3 つ与えよ．理由もつけること．

問題 2. 次の（抽象的）単体的複体 $\Delta \subseteq 2^{\{1,2,3,4\}}$ のホモロジー群を計算せよ．計算過程も記すこと．

$$\Delta = \{\{1,2,3\},\{2,3,4\},\{1,2\},\{1,3\},\{1,4\},\{2,3\},\{2,4\},\{3,4\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\emptyset\}.$$

問題 3. K を単体的複体，C_k をそのチェイン群，$\partial_k : C_k \to C_{k-1}$ を境界作用素とする $(k = 1, 2, \ldots)$．C^k と $\delta_k : C^k \to C^{k+1}$ $(k = 0, 1, \ldots)$ を

$$C^k := \{f : C_k \to \mathbb{Z} \mid f \text{ は加法群 } \mathbb{Z} \text{ への準同型 }\},$$
$$(\delta_k(f))(z) := f(\partial_{k+1}(z)) \quad (f \in C^k, z \in C_{k+1})$$

と定義する．

(1) C^k には自由アーベル群の構造が入り，δ_k は準同型で $\delta_k \circ \delta_{k-1} = 0$ を満たすことを示せ．
(2) $H^k := \operatorname{Ker}\delta_k / \operatorname{Im}\delta_{k-1}$ を ∂_k $(k = 1, 2, \ldots)$ の単因子を用いて表せ．

問題 4. V を $\mathbb{R}$ 上の n 次元ベクトル空間，$U \subseteq V$ を k 次元部分ベクトル空間とする．$e_1, e_2, \ldots, e_n$ を V の基底，$\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \ldots, \tilde{e}_k$ を U の基底，$e^1, e^2, \ldots, e^n$，$\tilde{e}^1, \tilde{e}^2, \ldots, \tilde{e}^k$ をそれぞれの双対基底とする．ここで，$\tilde{e}_j$ たちは，e_i たちによって，

$$\tilde{e}_j = \sum_{i=1}^{n} A^i_j e_i \quad (j = 1, 2, \ldots, k)$$

と表せるものとする．

(1) V 上の線形関数 $f \in V^*$ が

$$f = \sum_{i=1}^{n} f_i e^i$$

とかけるとする．f の定義域を U に制限して得られる U 上の線形関数 $f|_U \in U^*$ を f_i, $\tilde{e}^j$, A^i_j $(i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, k)$ を用いて表せ．

(2) V 上の k 次交代形式 $\omega \in V^* \wedge V^* \wedge \cdots \wedge V^*$ が

$$\omega = \sum_{1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n} \omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_k}$$

とかけるとする．ω の定義域を $U \times U \times \cdots \times U$ に制限して得られる U 上の k 次交代形式 $\omega|_U \in U^* \wedge U^* \wedge \cdots \wedge U^*$ を $\omega_{i_1 i_2 \cdots i_k} (1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n)$, $\tilde{e}^j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, $k \times n$ 行列 (A^i_j) の部分行列式を用いて表せ．

次ページに続く．

問題 5. この授業に対する感想，意見，要望を述べよ（減点することはありません）.

レポートについて

救済レポート（不可 $\to$ 可）:
講義ノートの問題，（解けなかった/過去の）試験問題（中間，期末）を解いてレポートにして提出.

優上狙いレポート:

例 1: 講義ノートの難しい問題を解いてレポートにして提出.
例 2: 講義に関連する話題を調べてレポートにして提出.
例 3: 講義中にやると効果的と思われるトポロジー・テンソルの題材を提出:
— 空間が変形レトラクトしていくアニメーションの作成，射影平面を 3 次元中に実現したオブジェクト (CG) の作成，タイトスパンの計算, etc.

締切 : 2021 年 1 月 31 日
提出先 : ITC-LMS