幾何数理工学ノート
位相幾何：基本群

平井広志
東京大学工学部 計数工学科 数理情報工学コース
東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻
hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp
協力：池田基樹（数理情報学専攻 D1）

5 基本群

目標とするのは，位相空間から群への写像で，2 つの空間がホモトピー同値ならば対応する群が同型となるような写像の構成である．群の復習から始める．群 $(G, \cdot)$ とは，以下の条件を満たす集合 G と演算 $\cdot$ の組のことをいう：

- 単位元 $e \in G$ の存在：$e \cdot x = x \cdot e = x$ $(\forall x \in G)$.
- 結合律：$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$.
- 逆元の存在：$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

群 G から G' への写像が**準同型**とは，

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) \quad (x, y \in G)$$

を満たすことである．G と G' が**同型**とは，G と G' の間に準同型全単射写像が存在することである．このとき逆写像も準同型になる．実際，φ の準同型性から

$$\varphi(\varphi^{-1}(a \cdot b)) = a \cdot b = \varphi(\varphi^{-1}(a)) \cdot \varphi(\varphi^{-1}(b)) = \varphi(\varphi^{-1}(a) \cdot \varphi^{-1}(b))$$

が成り立ち，φ の全単射性から $\varphi^{-1}(a \cdot b) = \varphi^{-1}(a) \cdot \varphi^{-1}(b)$ を得る．

X を位相空間とする．$[0, 1]$ から X への連続写像を**パス**と呼んでいたことを思い出す．

定義 5.1 ((パスの) ホモトピー)**.** **パスのホモトピー**とは，連続写像の族 $\{f_t : [0, 1] \to X\}_{t \in [0,1]}$ で以下の条件を満たすもの（図 1）：

- $\forall t \in [0, 1],\ f_t(0) = x_0,\ f_t(1) = x_1$
- $F : [0, 1] \times [0, 1] \to X$ を $F(s, t) := f_t(s)$ と定義すると，F は連続.

定義 5.2. 2 つのパス f', f'' をつなぐホモトピー f_t（$f_0 = f',\ f_1 = f''$）が存在するとき，f' と f'' は**ホモトープ**といい，$f' \simeq f''$ で表す.

以前と同様に次が示される.

命題 5.3. $\simeq$ は同値関係.

パス f の $\simeq$ による同値類を f の**ホモトピー類**といい，$[f]$ で表す.

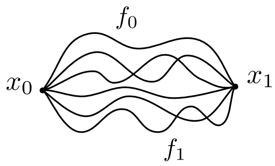

図 1: パスのホモトピー．

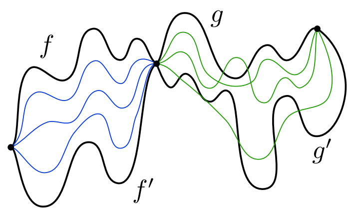

図 2: パスの積のホモトピー．

定義 5.4 (パスの積 (合成))**.** $f, g : [0,1] \to X$ を，$f(1) = g(0)$ を満たすパスとする．次で定義されるパス $f \cdot g : [0,1] \to X$ を f と g の**合成**という：

$$f \cdot g(s) := \begin{cases} f(2s) & (0 \leq s \leq 1/2), \\ g(2s-1) & (1/2 \leq s \leq 1). \end{cases}$$

注意 5.5. $f \simeq f'$, $g \simeq g'$ なら $f \cdot g \simeq f' \cdot g'$．実際，$(f \cdot g)_t := f_t \cdot g_t$ とおけば（$\{f_t\}, \{g_t\}$ はそれぞれ f と f'，g と g' を繋ぐホモトピー（図 2)），これは $f \cdot g$ と $f' \cdot g'$ を繋ぐホモトピーになる．

定義 5.6. x_0 を基点とする**ループ** (loop) とは，パス $f : [0,1] \to X$ で $f(0) = f(1) = x_0$ を満たすもの．

$x_0 \in X$ に対し，

$$\pi_1(X, x_0) := \{[f] \mid f\text{:}x_0 \text{ を基点とするループ }\}$$

と定義する．$\pi_1(X, x_0)$ に積 $\cdot$ を

$$[f] \cdot [g] := [f \cdot g]$$

で定義すると，これは well-defined である．実際 $f \simeq f'$, $g \simeq g'$ とすると，先の注意より $f \cdot g \simeq f' \cdot g'$ が成り立つ．また，ループの合成も x_0 を基点とするループであるから，積 $\cdot$ は $\pi_1(X, x_0)$ の上での二項演算となる．

命題 5.7. $\pi_1(X, x_0)$ は積 $\cdot$ の下で群になる．

$\pi_1(X, x_0)$ を x_0 を基点とする X の**基本群** (fundamental group) という．

証明. まず準備として，$\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ を満たすような連続写像 $\varphi : [0,1] \to [0,1]$ について，$[f \circ \varphi] = [f]$ が成り立つことに注意する．実際，ホモトピーを $(f \circ \varphi)_t := f \circ ((1-t)\varphi + t\mathbf{1}_{[0,1]})$ と定義すると，$f \circ \varphi$ と f を繋ぐホモトピーになる．

単位元の存在：定数関数 $c : [0,1] \to X$ を $c(s) = x_0$ $(s \in S)$ で定義すると，$[c]$ が単位元になる．実際，任意のループ f について $c \cdot f$ を考えると，$\varphi : [0,1] \to [0,1]$ を

$$\varphi(s) := \begin{cases} 0 & (0 \leq s \leq 1/2), \\ 2(s - 1/2) & (1/2 \leq s \leq 1) \end{cases}$$

と定義すれば (図 3)，$f \simeq f \circ \varphi = c \cdot f$ より $[f] = [c \cdot f] = [c] \cdot [f]$ となる．$[f] = [f] \cdot [c]$ も同様に示される．

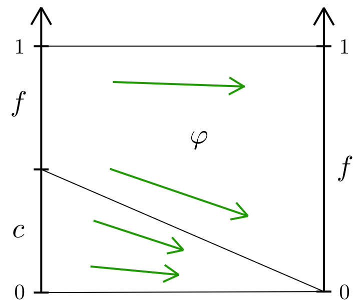

図 3: 単位元の存在の証明．

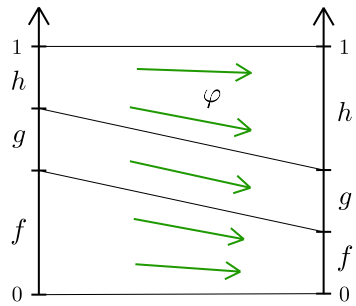

図 4: 結合律の証明．

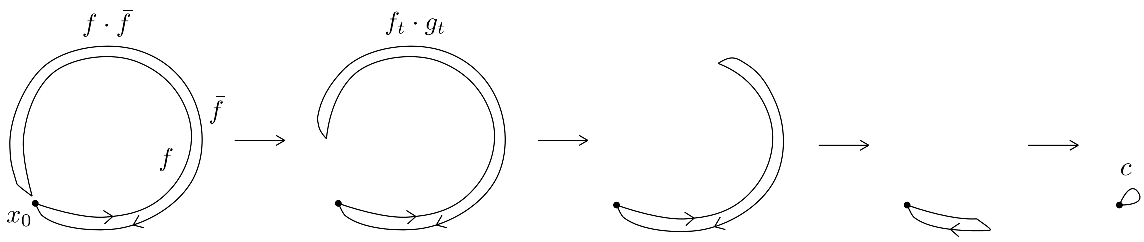

図 5: 逆元の存在の証明．

結合律：任意のループ f, g, h について $[f \cdot (g \cdot h)] = [(f \cdot g) \cdot h]$ を示せばよい．$\varphi : [0,1] \to [0,1]$ を

$$\varphi(s) := \begin{cases} s/2 & (0 \le s \le 1/2), \\ s - 1/4 & (1/2 \le s \le 3/4), \\ 2s - 1 & (3/4 \le s \le 1) \end{cases}$$

と定義すれば（図 4），$(f \cdot (g \cdot h)) \circ \varphi = (f \cdot g) \cdot h$ となる．よって $[f \cdot (g \cdot h)] = [(f \cdot g) \cdot h]$．

逆元：$f : [0,1] \to X$ に対し，$\bar{f} : [0,1] \to X$ を $\bar{f}(s) := f(1-s)$ とすると，$[\bar{f}]$ が $[f]$ の逆元になる．実際，$f_t : [0,1] \to X$ $(t \in [0,1])$ を

$$f_t(s) := \begin{cases} f(s) & (0 \le s \le t), \\ f(t) & (t \le s \le 1), \end{cases}$$

$g_t : [0,1] \to X$ $(t \in [0,1])$ を

$$g_t(s) := \begin{cases} f(t) = \bar{f}(1-t) & (0 \le s \le 1-t), \\ f(1-s) = \bar{f}(s) & (1-t \le s \le 1) \end{cases}$$

とおくと，$f_t \cdot g_t$ は $f \cdot \bar{f}$ と c を繋ぐホモトピー（図 5）．よって $[f] \cdot [\bar{f}] = [c]$．$[\bar{f}] \cdot [f] = [c]$ も同様に示される．

$\square$

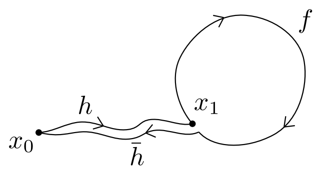

図 6: 基点の取り換え.

$\pi_1(X, x_0)$ は基点を x_0 に定めたときの群構造である．$x_0, x_1 \in X$ を $x_0 \neq x_1$ とし，基点 x_0 の基本群と基点 x_1 の基本群の関係を調べる．x_0 から x_1 へのパス $h : [0,1] \to X$, $h(0) = x_0$, $h(1) = x_1$ の存在を仮定し，$\bar{h} : [0,1] \to X$ を x_1 から x_0 へのパス $\bar{h}(s) := h(1-s)$ と定義する．f を x_1 を基点とするループとすると，$h \cdot f \cdot \bar{h}$ は x_0 を基点とするループになる（図 6）．$f \simeq f'$ なら $h \cdot f \cdot \bar{h} \simeq h \cdot f' \cdot \bar{h}$ が成り立つ．実際，f と f' を繋ぐホモトピーを f_t とすると，$h \cdot f_t \cdot \bar{h}$ は $h \cdot f \cdot \bar{h}$ と $h \cdot f' \cdot \bar{h}$ を繋ぐホモトピーになる．したがって $\beta_h : \pi_1(X, x_1) \to \pi_1(X, x_0)$ を

$$\beta_h([f]) = [h \cdot f \cdot \bar{h}]$$

と定義すると，β_h は well-defined である．

命題 5.8. β_h は $\pi_1(X, x_1)$ から $\pi_1(X, x_0)$ への同型写像.

証明. 準同型性：$f, g \in \pi_1(X, x_1)$ とすると

$$\beta_h([f] \cdot [g]) = [h \cdot f \cdot g \cdot \bar{h}] = [h \cdot f \cdot \bar{h} \cdot h \cdot g \cdot \bar{h}] = [h \cdot f \cdot \bar{h}] \cdot [h \cdot g \cdot \bar{h}] = \beta_h([f]) \cdot \beta_h([g]).$$

全単射：$\beta_{\bar{h}} : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, x_1)$ を考える．$f \in \pi_1(X, x_1)$ とすると

$$\beta_{\bar{h}}(\beta_h([f])) = \beta_{\bar{h}}([h \cdot f \cdot \bar{h}]) = [\bar{h} \cdot h \cdot f \cdot \bar{h} \cdot h] = [f]$$

であるから，$\beta_{\bar{h}} \circ \beta_h = \mathbf{1}$ が成り立つ．$\beta_h \circ \beta_{\bar{h}} = \mathbf{1}$ も同様に成り立つ．よって β_h と $\beta_{\bar{h}}$ は互いに逆写像の関係にあるので，β_h は全単射. □

特に，X が弧状連結のときは基点によらず基本群が決まる．（つまり，任意の基点 $x_0, x_1 \in X$ について $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1)$ となる．）これを $\pi_1(X)$ と書く．

例 5.1. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ を凸集合とすると，任意のループ f は定数ループ c とホモトープである．よって $\pi_1(X)$ は単位元 e のみを含む群 $\{e\}$ になる．同様に，X が可縮（1 点とホモトピー同値）なら $\pi_1(X) = \{e\}$．実際，$Y = \{y\}$ への連続写像 $f : X \to Y$ と連続写像 $g : Y \to X$ で，$g \circ f \simeq \mathbf{1}_X$ を満たすものが存在するので，X から $g(y)$ への変形レトラクションが存在する．$\pi_1(X) = \{e\}$ のとき，基本群が**自明** (trivial) などという．

定義 5.9. X が**単連結** (simply connected) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ 弧状連結かつ $\pi_1(X) = \{e\}$.

命題 5.10. X が単連結 $\Leftrightarrow \forall x, y \in X$ と x から y へのパス f, g について $f \simeq g$.

証明. $(\Leftarrow)$．f を x_0 を基点とするループ，g を x_0 を基点とする定数ループとすると，f, g を $x = y = x_0$ をつなぐパスをみることにより，$f \simeq g$ となる．つまり，X は単連結.
$(\Rightarrow)$ $f \cdot \bar{g}$ はループなので，$\pi_1(X) = \{e\}$ より $f \simeq f \cdot \bar{g} \cdot g \simeq e \cdot g \simeq g$. □

位相空間 X, Y がホモトピー同値のときに，$\pi_1(X)$ と $\pi_1(Y)$ が同型であることを見る．

定義 5.11. $\varphi : X \to Y$ を連続写像，$y_0 = \varphi(x_0)$ とする．$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(X, y_0)$ は

$$\varphi_*([f]) = [\varphi \circ f]$$

と定義される．

補題 5.12. φ_* は well-defined で準同型．

証明. $f \simeq f'$ とすると f と f' を繋ぐホモトピー f_t が存在し，$\varphi \circ f_t$ は $\varphi \circ f$ と $\varphi \circ f'$ を繋ぐホモトピーになる．よって $\varphi \circ f \simeq \varphi \circ f'$ で，φ_* は well-defined．また，$f, g \in \pi_1(X, x_0)$ とすると

$$\varphi_*([f] \cdot [g]) = \varphi_*([f \cdot g]) = [\varphi \circ (f \cdot g)] = [(\varphi \circ f) \cdot (\varphi \circ g)] = [\varphi \circ f] \cdot [\varphi \circ g] = \varphi_*([f]) \cdot \varphi_*([g])$$

より φ_* は準同型． □

補題 5.13.

(1) $\varphi : X \to Y$, $\phi : Y \to Z$ に対し $(\phi \circ \varphi)_* = \phi_* \circ \varphi_*$.
(2) $(\mathbf{1}_X)_* = \mathbf{1}_{\pi_1(X,x_0)}$.

証明. (1) 任意のループ f について，

$$(\phi \circ \varphi)_*([f]) = [\phi \circ \varphi(f)] = \phi_*([\varphi(f)]) = \phi_* \circ \varphi_*([f]).$$

(2) 明らか． □

まず，X と Y が同相の場合に基本群が同型であることを示す．

定理 5.14. $\varphi : X \to Y$ を同相写像，$x_0 \in X$ とすると，$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ は同型写像．

証明. $\varphi^{-1} \circ \varphi = \mathbf{1}_X$ から $(\varphi^{-1})_* \circ \varphi_* = \mathbf{1}_{\pi_1(X,x_0)}$．同様に $\varphi_* \circ (\varphi^{-1})_* = \mathbf{1}_{\pi_1(Y,\varphi(x_0))}$．よって φ_* は全単射なので同型写像． □

系 5.15. $\pi_1(X) \not\simeq \pi_1(Y)$ なら X と Y は同相でない．

定理 5.16. $\varphi : X \to Y$ をホモトピー同値写像，$x_0 \in X$ とすると，$\varphi_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, \varphi(x_0))$ は同型写像．

証明. 定義より連続写像 $\phi : Y \to X$ が存在して，$\phi \circ \varphi \simeq \mathbf{1}_X$，$\varphi \circ \phi \simeq \mathbf{1}_Y$ を満たす．$\phi \circ \varphi$ と $\mathbf{1}_X$ を繋ぐホモトピーを ρ_t とする．パス $h : [0,1] \to X$ を

$$h(s) := \rho_s(x_0) \quad (s \in [0,1])$$

と定義すると，$\phi_* \circ \varphi_* = \beta_h$ が成り立つ．これは，任意の x_0 を基点とするループ f について，$\phi \circ \varphi(f)$ と $h \cdot f \cdot \bar{h}$ がホモトープであることを言えばよい．パス $h_t : [0,1] \to X$ $(t \in [0,1])$ を

$$h_t(s) := \begin{cases} h(s) & (0 \leq s \leq t), \\ h(t) & (t \leq s \leq 1) \end{cases}$$

とおき，$\psi_t : [0,1] \to X$ $(t \in [0,1])$ を $\psi_t := h_t \cdot (\rho_t \circ f) \cdot \bar{h}_t$ とすれば，ψ_t が $\phi \circ \varphi(f)$ と $h \cdot f \cdot \bar{h}$ を繋ぐホモトピーとなる（図 7）．よって命題 8 より $\phi_* \circ \varphi_* = \beta_h$ は同型写像であり，ϕ_* は全射，φ_* は単射．同様に $\varphi_* \circ \phi_*$ も同型写像なので，φ_* は全射，ϕ_* は単射．よって φ_* は全単射． □

6 基本群の例

最初に球面 S^n $(n \geq 2)$ を考える．

定理 6.1. $\pi_1(S^n) = \{e\}$ $(n \geq 2)$. つまり 2 次元以上の球面は単連結．

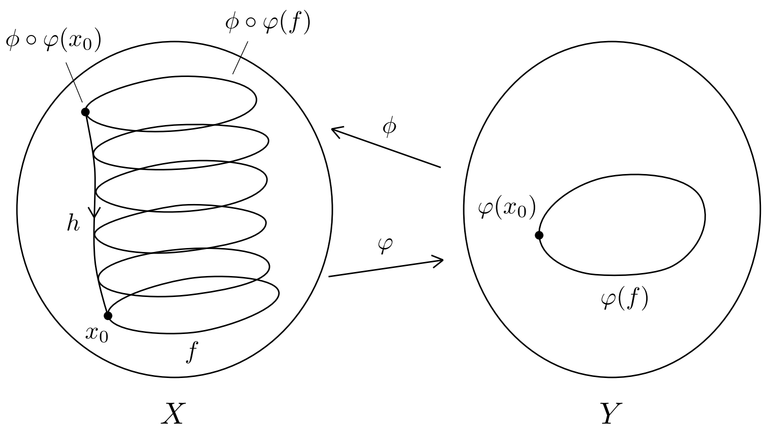

図 7: $\phi\circ\varphi(f)$ と $h\cdot f\cdot\bar{h}$ のホモトープ性.

証明. f を S^n の基点 x_0 の任意のループとして，f が 1 点にホモトピー同値にであることを示す．$y\in S^n\setminus\{x_0\}$ を任意にとる．もしも，$y\notin f([0,1])$ なら，$S^n\setminus\{y\}$ は $\mathbb{R}^n$ と同相なので，f を $\mathbb{R}^n$ のループと見ると 1 点にホモトピー同値.

そうでない場合を考える．y を含む十分小さな開球（と S_n との交わり）B を考える．$x_0\notin B$ としてよい．$f^{-1}(B)$ は，$[0,1]$ の互いに交わらない開区間の和集合である（無限和かもしれない）．1 つの開区間 (t,t') をとる．$f(t)$ と $f(t')$ をつなぐ f の部分パスをホモトピーでずらすことで，f を $f'\simeq f$ であって，$f'([t,t'])\cap B=\emptyset$ となるパス f' に変形できる．もしも，$f^{-1}(B)$ を構成する開区間が有限個であれば，f を y を含まないパス f' に変形できて，$f\simeq f'\simeq 1$ 点 となる．

しかし，$f^{-1}(B)$ は，無限個の開区間からなっているかもしれない．$f^{-1}(\{y\})$ を考えると，連続性より，$[0,1]$ の閉集合でありコンパクトである．$f^{-1}(B)$ を構成する開区間は，$f^{-1}(\{y\})$ の開被覆とみることができる．したがって，有限個の開区間を選ぶことで $f^{-1}(\{y\})$ を被覆できる．それらの開区間に対して，上に述べたずらしをおこなうことで，f を y を含まないように変形できる． □

S^1 の基本群はどうなるだろうか？　ループ f が S^1 を n 回「まわり」，ループ g が S^1 を m 回「まわる」とすれば，このとき $f\cdot g$ は S^1 を $n+m$ 回「まわる」ことになる $(n,m\in\mathbb{Z})$．このように，ループに対してそれが S^1 をまわった回数を対応させる写像 $\pi_1(S^1)\to\mathbb{Z}$ を考えると，これは同型写像のように思われる．

定理 6.2. $\pi_1(S^1)\simeq\mathbb{Z}$.

証明. $S^1=\{(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)\mid 0\le t\le 1\}$ とし，ループの基点をしては，$(0,1)$ を考える．上でのべた n 回まわるループ f_n は，$f_n(s)=(\cos 2\pi ns,\sin 2\pi ns)$ とかける．スピードの変換と $f_{-n}\cdot f_n\simeq e$ に注意すると，以下がわかる．

$$f_n\cdot f_m\simeq f_{n+m}.$$

したがって，$n\mapsto[f_n]$ が同型写像（すなわち，$\pi_1(S^1)\simeq\mathbb{Z}$）になるには，以下がいえればよい．

(a) $n\neq m$ なら $f_n\not\simeq f_m$.
(b) 任意のループ f に対して，ある $n\in\mathbb{Z}$ が（一意に）存在して，$f\simeq f_n$.

全射 $p:\mathbb{R}\to S^1$ を $t\mapsto(\cos 2\pi t,\sin 2\pi t)$ で定義する．$p^{-1}(\{(0,1)\})=\mathbb{Z}$ に注意する．このとき，以下が成り立つ：

(1) S^1 のループ f（基点 $(0,1)$）に対して，$\mathbb{R}$ の 0 を始点とするパス $\tilde{f}$ が一意に存在して $p\circ\tilde{f}=f$ となる．$\tilde{f}$ を f のリフトという．$\tilde{f}$ の終点は整数 m である．

(2) S^1 のパスのホモトピー $\{f_t\}$ に対して，$\mathbb{R}$ の 0 を始点とするパスのホモトピー $\{\tilde{f}_t\}$ が一意に存在して，$p \circ \tilde{f}_t = f_t$ となる．

ここで，$p^{-1}(\{(0,1)\})$ が離散位相空間 $\mathbb{Z}$ なので，$\tilde{f}_t$ の終点は t によらず，ある一定の整数 m をとることに注意する．

(1)，(2) は次節において，より一般的な枠組み（被覆空間）のもと証明する．(1)，(2) を仮定して，(a), (b) を示す．まず，f_n のリフト $\tilde{f}_n$ を考えてみる．それは，0 から n まで，一定のスピードすすむパスであることに注意する．S^1 の任意のループ f をとる．f のリフト $\tilde{f}$ は，0 からある整数 m までのパスである．$\mathbb{R}$ は単連結なので $\tilde{f} \simeq \tilde{f}_m$，すなわち $\tilde{f}$ と $\tilde{f}_n$ をつなぐホモトピー $\{\tilde{f}_t\}$ が存在する．すると，$\{p \circ \tilde{f}_t\}$ は，S^1 において f と f_m をつなぐホモトピーであり，(b) $f \simeq f_m$ がいえる．

(a) については，$f_n \simeq f_m$ なら，その間のホモトピー $\{f_t\}$ のリフト $\{\tilde{f}_t\}$ は，$\tilde{f}_n$ と $\tilde{f}_m$ の間のホモトピーで，上で注意したように終点は一定の値をとらなければならない．つまり，$n = m$. □

定理 6.3 (直積の基本群)**.** $\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$.

証明. f を基点が (x_0, y_0) であるような $X \times Y$ のループとすると，$f : [0,1] \to X \times Y$ なので，

$$f = (g, h),\ g : [0,1] \to X,\ g(0) = g(1) = x_0,$$
$$h : [0,1] \to Y,\ h(0) = h(1) = y_0$$

と表せる．すなわち g, h は X, Y 上のループ．$[f]$ を $([g],[h])$ に写す写像 $\varphi : \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \to \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0)$ は well-defined で（ホモトピーは $f_t = (g_t, h_t)$），準同型写像になる．逆写像 φ^{-1} は $\varphi^{-1}([g],[h]) = [(g,h)]$ と自然に定義される．すなわち φ は全単射. □

系 6.4 (トーラスの基本群)**.** $\pi_1(T^2) \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

証明. $T^2 = S^1 \times S^1$ より. □

X と Y の wedge 和 $X \vee Y$ は $X \vee Y := (X \coprod Y)/x \sim y$ と定義されていたことを思い出す．すると，$\pi_1(X)$ と $\pi_1(Y)$ を「繋げる」ことで $\pi_1(X \vee Y)$ が得られそうに思える．

準備として，群の自由積 (free product) を導入する．群 G, G' の自由積 $G * G'$ は，

$$G * G' := \{g_1 g_2 \cdots g_n \mid n \geq 0,\ g_i \in G \text{ or } G',\ g_i \neq e\}$$

と定義される．ただし，$g_1 \cdots g_i g_{i+1} \cdots g_n$ が $g_i, g_{i+1} \in G$ または $g_i, g_{i+1} \in G'$，および $g_i \cdot g_{i+1} = h$ を満たすなら $g_1 \cdots h \cdots g_n$ と同一視する（$h = e$ なら h を除く）．$G * G'$ 上の積 $\cdot$ を列の連結として定義する．すなわち

$$(g_1 g_2 \cdots g_n) \cdot (h_1 h_2 \cdots h_m) := g_1 g_2 \cdots g_n h_1 h_2 \cdots h_m.$$

命題 6.5. $(G * G', \cdot)$ は群．単位元は空列.

証明は自明ではない．$G * G'$ は，一般に非可換群である．

問題 6.1. 証明せよ．

定理 6.6. $\pi_1(X \vee Y) \simeq \pi_1(X) * \pi_1(Y)$.

特に，基本群は非可換になりえることに注意する（例えば $\pi_1(S^1 * S^1) = \mathbb{Z} * \mathbb{Z}$).

系 6.7. $\pi_1(S^1 \vee S^1 \cdots \vee S^1) \simeq \mathbb{Z} * \mathbb{Z} * \cdots * \mathbb{Z}$.

問題 6.2. 上の定理は Seifert–van Kampen の定理と呼ばれるものの特殊ケースである．これについて調べ（証明して）いろいろな空間・曲面の基本群を計算せよ．