幾何数理工学ノート
位相幾何：ホモトピー

平井広志
東京大学工学部 計数工学科 数理情報工学コース
東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻
hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp
協力：池田基樹（数理情報学専攻 D1）

5 ホモトピー

2 つの位相空間 X, Y が「同じ形」をしているとはどういうことだろうか？ 1 つの答えは，X と Y が位相同型という意味である．例えば，よくドーナツとコーヒーカップはトポロジー的には区別できないと言われるが，これはこの 2 つが位相同型という意味である．別の答えとして考えられるのは，連続変形で移り合うという意味である．例えば図 1 に示すように，幅のある文字 A と円周 S^1 は連続的に変形し合うことができる．一方，円周からの連続変形では一点に移ることはできなさそうに思える（図 2）が，ディスク D^2 からならば一点に連続変形することができる（図 3）．明らかに一点とディスクは位相同型でない．よって「空間の連続変形」は位相同型とは異なる概念であることが分かる．以下では，このような空間同士の関係を定式化していく．

X, Y を位相空間とする．

定義 5.1 (ホモトピー)**.** 連続写像の族 $\{f_t : X \to Y\}_{t\in[0,1]}$ が**ホモトピー** $\overset{\text{def}}{\iff}$ $F : X \times [0,1] \to Y$ を

$$F(x,t) := f_t(x) \quad (x \in X,\ t \in [0,1])$$

とおくと F が連続.

連続写像 $g, h : X \to Y$ に対して $f_0 = g$，$f_1 = h$ なるホモトピー f_t が存在するとき，f_t は g と h を繋ぐホモトピー，g と h は**ホモトープ**（ホモトピック）といい，$g \simeq h$ と書く．図 4 にホモトープな写像の例を示す.

補題 5.2. $\simeq$ は同値関係.

証明. $g \simeq g$ はホモトピーとして $f_t = g$ $(\forall t \in [0,1])$ を取ればよい．$g \simeq h$ ならばホモトピー f_t で $f_0 = g$，$f_1 = h$ を満たすものが存在する．ホモトピー f_{1-t} により $h \simeq g$ が示される．$f \simeq g$ かつ $g \simeq h$ ならばホモトピー f_t と g_t で $f_0 = f$，$f_1 = g_0 = g$，$g_1 = h$ を満たすものが存在する．ホモトピーとして

$$\bar{f}_t = \begin{cases} f_{2t} & (0 \le t \le 1/2) \\ g_{2(t-1/2)} & (1/2 \le t \le 1) \end{cases}$$

を取れば $f \simeq h$ が示される．なお，各 $\bar{f}_t$ や $\bar{F}(x,t) := \bar{f}_t(x)$ の連続性は pasting lemma より従う． □

この同値関係 $\simeq$ による同値類を**ホモトピー類**と呼ぶ.

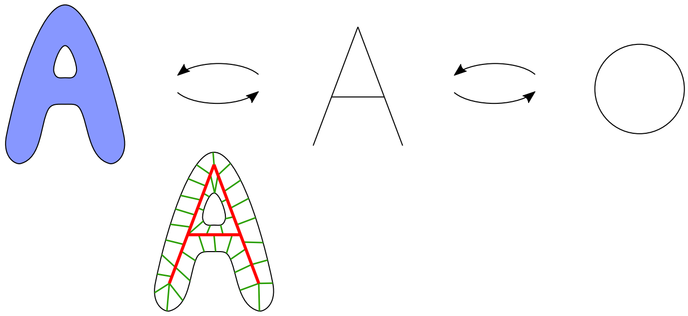

図 1: 文字 “A” と S^1 の間の連続変形.

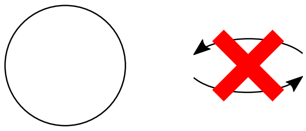

図 2: S^1 と 1 点には連続変形がない.

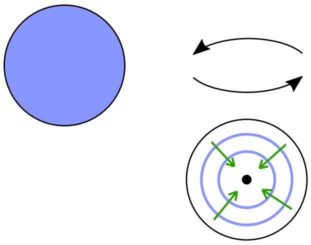

図 3: D^2 と 1 点の間の連続変形.

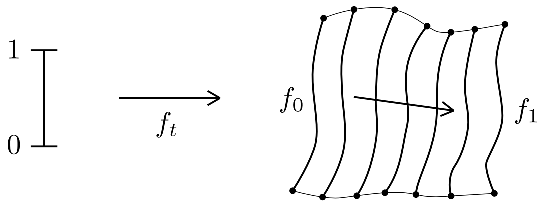

図 4: $[0,1]$ からの連続写像を繋ぐホモトピー.

注意 5.3. $Y \subseteq \mathbb{R}^n$ のとき，$g : X \to Y$ と $h : X \to Y$ を繋ぐホモトピーとして $(1-t)g + th$ を取りたくなるが，必ずしも $(1-t)g + th$ が定義できるとは限らない（定義できるとき $(1-t)g + th$ を線形ホモトピーという）．つまり，$((1-t)g + th)(x) = (1-t)g(x) + th(x)$ が Y からはみ出してしまう可能性がある（図 5）．

注意 5.4. もし Y が弧状連結ならば，$g(x)$ と $h(x)$ を結ぶパスに沿ってホモトピーを構成することができるだろうか？　一見うまくいきそうなこの方法も，よく考えてみるとうまくいかない例があることが分かる．例えば $X = Y = S^1$ とし，g が S^1 上の恒等写像，h が S^1 の全ての点を S^1 上のある 1 点に写す写像である場合を考える（図 6）．このとき，g と h を繋ぐホモトピーは作れるだろうか？　どのようにしても S^1 のどこかの点で不連続性が発生してしまうように思える．

定義 5.5 (ホモトピー同値)**.** 位相空間 X, Y が**ホモトピー同値** $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\exists$ 連続写像 $f : X \to Y,\ g : Y \to X,\ f \circ g \simeq \mathbf{1}_Y,\ g \circ f \simeq \mathbf{1}_X$.

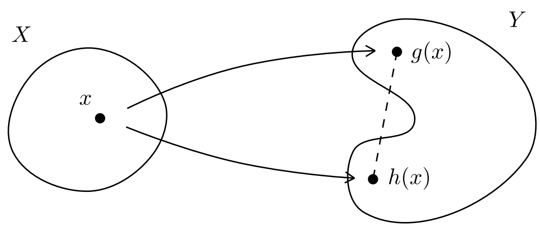

図 5: 線形ホモトピーは必ずしも定義できるとは限らない.

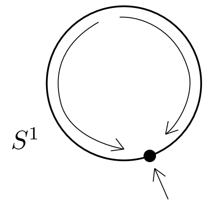

図 6: 弧状連結であっても任意の写像間にホモトピーがあるとは限らない.

上の条件を満たす f, g を**ホモトピー同値写像**という．X と Y がホモトピー同値のとき，X と Y は同じホモトピー型を持つという.

注意 5.6. X, Y が位相同型ならばホモトピー同値.

補題 5.7. ホモトピー同値は同値関係.

証明. 反射律と対称律は明らかなので，推移律 $X \simeq Y,\ Y \simeq Z \Rightarrow X \simeq Z$ を示す．定義より連続写像 $f : X \to Y,\ f' : Y \to Z,\ g : Y \to X,\ g' : Z \to Y$ が存在し，$f \circ g \simeq \mathbf{1}_Y,\ g \circ f \simeq \mathbf{1}_X,\ f' \circ g' \simeq \mathbf{1}_Z,\ g' \circ f' \simeq \mathbf{1}_Y$ を満たす．$\bar{f} = f' \circ f$ および $\bar{g} = g \circ g'$ と定義すると

$$\begin{aligned}\bar{f} \circ \bar{g} &= (f' \circ f) \circ (g \circ g') = f' \circ (f \circ g) \circ g' \simeq f' \circ \mathbf{1}_Y \circ g' = f' \circ g' \simeq \mathbf{1}_Z, \\ \bar{g} \circ \bar{f} &= (g \circ g') \circ (f' \circ f) = g \circ (g' \circ f') \circ f \simeq g \circ \mathbf{1}_Y \circ f = g \circ f \simeq \mathbf{1}_X\end{aligned}$$

であるから，X と Z はホモトピー同値. □

定義 5.8 (変形レトラクション (deformation retraction))**.** X を位相空間，$A \subseteq X$ とする．連続写像の族 $\{f_t : X \to X\}_{t \in [0,1]}$ が X から A の**変形レトラクション**（図 7）$\overset{\text{def}}{\iff}$

- $f_0 = \mathbf{1}_X$,
- $f_1(X) = A$,
- $f_t|_A = \mathbf{1}_A\ (\forall t \in [0,1])$,
- $F(x,t) := f_t(x)$ で定義される関数 $F : X \times [0,1] \to X$ が連続.

補題 5.9. X から $A \subseteq X$ への変形レトラクションがあるなら X と A はホモトピー同値.

証明. $\{f_t : X \to X\}$ を A への変形レトラクションとする．$g : X \to A$ を

$$g(x) := f_1(x) \quad (x \in X),$$

$h : A \to X$ を包含写像

$$h(x) := x \quad (x \in A)$$

とおくと，明らかに $g \circ h = \mathbf{1}_A$．一方 $h \circ g = f_1 \simeq f_0 = \mathbf{1}_X$. □

写像）

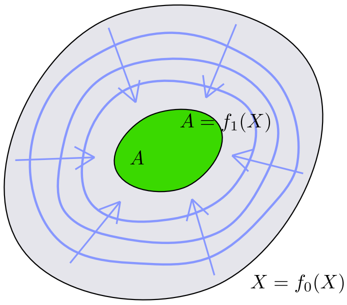

図 7: 変形レトラクションのイメージ．

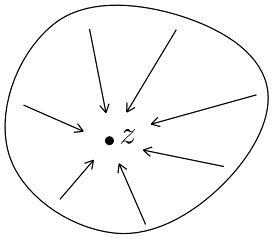

図 8: 凸集合から 1 点への変形レトラクション．

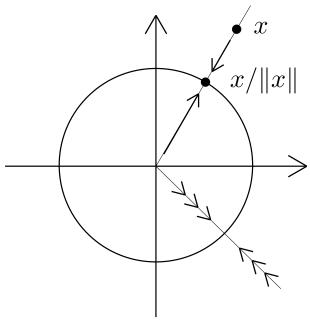

図 9: $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ から S^{n-1} への変形レトラクション．

例 5.1. $X \subseteq \mathbb{R}^n$ を凸集合とする．（つまり，$\forall x, y \in X,\ \forall \lambda \in [0,1],\ (1-\lambda)x + \lambda y \in X$.）$z \in X$ を任意の 1 点とし，$f_t : X \to X$ $(t \in [0,1])$ を

$$f_t(x) := (1-t)x + tz \quad (x \in X)$$

とおく（図 8）．$\{f_t\}$ は X から $\{z\}$ への変形レトラクション．

例 5.2. $X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ とする．$f_t : X \to X$ $(t \in [0,1])$ を

$$f_t(x) := (1-t)x + t\frac{x}{\|x\|} \quad (x \in X)$$

とおく（図 9）．$\{f_t\}$ は $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ から S^{n-1} への変形レトラクション．

問題 5.1. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ を閉凸集合とする．$\mathbb{R}^n$ から A への変形レトラクションを構成せよ．（ヒント：近接点写像）

系 5.10.

- $\mathbb{R}^n$，凸集合，1 点は同じホモトピー型を持つ（可縮）．

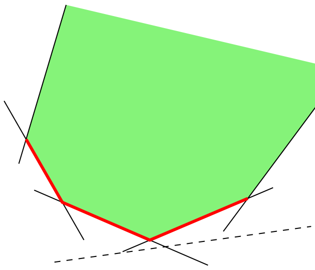

図 10: 多面体の有界な面の和集合.

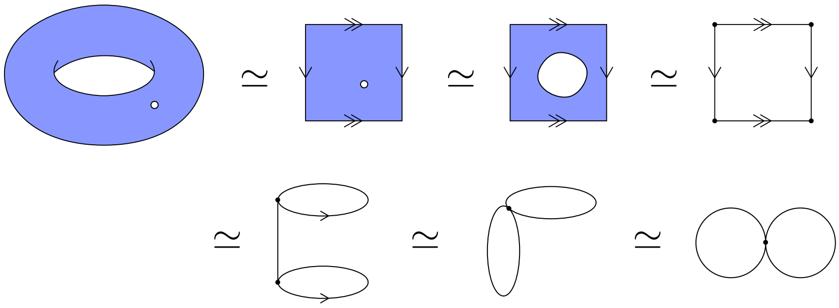

図 11: トーラス T^2 から 1 点を除いた空間.

- $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ と S^{n-1} は同じホモトピー型を持つ.

定義 5.11. 位相空間が**可縮** $\overset{\text{def}}{\iff}$ 1 点とホモトピー同値.

注意 5.12. 可縮な空間は，凸集合の次に基本的な図形.

問題 5.2. $a \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}$ とする．超平面 $H_{a,b}$ と半空間 $H^+_{a,b}$ は

$$H_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle = b\},$$
$$H^+_{a,b} := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle \leq b\}$$

と定義される．多面体 P は有限個の半空間の積 $P = \bigcap_{i=1}^k H^+_{a_i,b_i}$ である．P の面とは，P 自体か，$P \subseteq H^+_{a,b}$ なる a, b に対して $P \cap H_{a,b}$ と書けるものである．（非有界な）多面体の有界な面の和集合は可縮であることを示せ（図 10）.

例 5.3. トーラス T^2 から 1 点を除くと，S^1 と S^1 を 1 点で同一視した空間 $S^1 \vee S^1$ とホモトピー同値になる（図 11）.

定義 5.13. $x \in X$ と $y \in Y$ を X と Y の任意の点とする．$X \coprod Y$ 上の同値関係を $x \sim y$ として定義する．$X \vee Y := (X \coprod Y)/\sim$ で定義される空間を X と Y の wedge 和 $X \vee Y$ という.

問題 5.3. 閉曲面から何点か除いた空間のホモトピー型をいろいろ調べよ.

定義 5.14 (セル複体 (CW 複体)). n 次元ディスク $D^n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$ に同相な空間のことを **n-セル**という．$D^n \supseteq S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ に同相な部分空間のことを n-セルの境界という．**セル複体**とは，以下のように帰納的に作られる空間のことである.

- X^0 : 0-セルからなる離散集合.

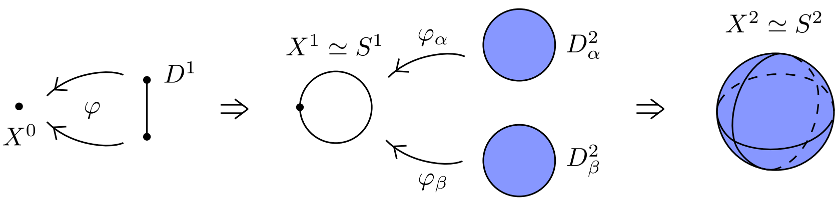

図 12: 球面 S^2 と同相なセル複体.

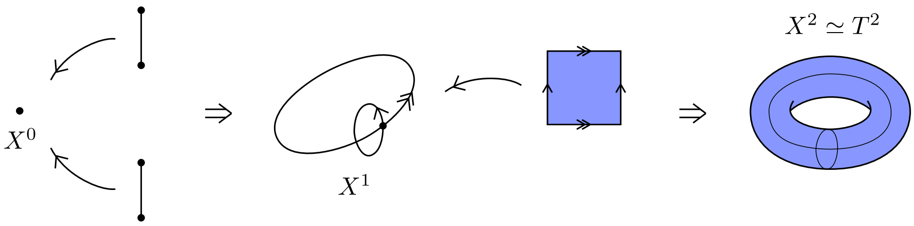

図 13: トーラス T^2 と同相なセル複体.

- X^n : n-スケルトン．X^{n-1}，D^n_α，φ^n_α $(\alpha \in \Lambda)$ により

$$X^n := \left(X^{n-1} \coprod_\alpha D^n_\alpha \right) / x \sim \varphi_\alpha(x).$$

  と定義される．ただし X^{n-1} は $(n-1)$-スケルトン，D^n_α $(\alpha \in \Lambda)$ は n-セル，$\varphi^n_\alpha : S^n_\alpha \to X^{n-1}$ は D^n_α の境界から $n-1$ スケルトンへのマップ.

セル複体の次元を，含むセルの最大次元と定義する.

図 12, 13 はセル複体の例である.

問題 5.4. 他にもいろいろセル複体を作ってみよ.

補題 5.15. X : セル複体，$A \subseteq X$: 可縮な部分複体とすると

$$X \simeq X/A.$$

ただし X/A は，同値関係 $\sim$ を

$$x \sim y \quad (x, y \in A)$$

とおいて，$X/A := X/\sim$ と定義される.

問題 5.5. 証明せよ.

定義 5.16. 1 次元セル複体のことを**グラフ**という（図 14).

命題 5.17. X を連結なグラフ，n を頂点数（$|X^0|$)，m を枝数（取り付けた 1-セルの個数）とおくと，

$$X \simeq \underbrace{S^1 \vee S^1 \vee \cdots \vee S^1}_{m-n+1}.$$

証明. すべての頂点と接続してサイクルを含まない枝数 $n-1$ の枝集合のことを，グラフの全域木という．これは可縮な部分複体になる．全域木を 1 点に縮約すると，全域木に含まれない $m-n+1$ 本の枝はループになる（図 15). $\square$

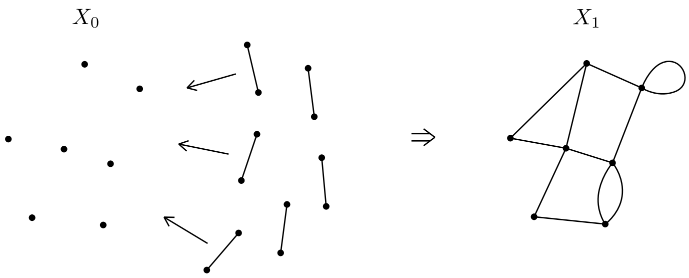

図 14: グラフの例.

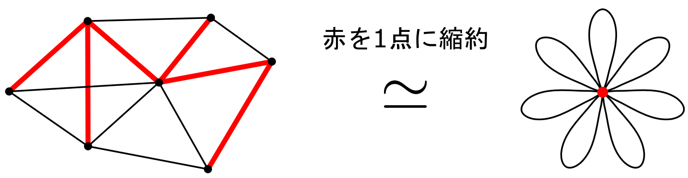

図 15: グラフの全域木の縮約.