幾何数理工学ノート
位相幾何：被覆空間

平井広志

東京大学工学部 計数工学科 数理情報工学コース

東京大学大学院 情報理工学系研究科 数理情報学専攻

hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

協力：池田基樹（数理情報学専攻 D1）

7 被覆空間

X, E を位相空間とする．連続な全射 $p : E \to X$ が次の条件を満たすとする：

$$\forall x \in X,\ \exists x \text{ の開近傍 } U,\ \exists \text{ 互いに交わらない } E \text{ の開集合 } V_\alpha\ (\alpha \in \Lambda),$$
$$p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} V_\alpha,\ p|_{V_\alpha} : V_\alpha \to U \text{ が同相写像.} \tag{1}$$

このとき，p を**被覆写像** (covering map)，E を X の**被覆空間** (covering space) という（図 1）.

例 7.1. $\mathbb{R}$ は S^1 の被覆空間（図 2）．$p : E \to X$ は $p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ と定義する．

証明. 例えば

$$p^{-1}\left(\left\{(\cos x, \sin x) \,\middle|\, x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right\}\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[n - \frac{1}{4}, n + \frac{1}{4}\right],$$
$$p^{-1}\left(\{(\cos x, \sin x) \mid x \in [0, \pi]\}\right) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \left[n, n + \frac{1}{2}\right].$$

□

例 7.2. $\mathbb{R}^2$ はトーラス T^2 の被覆空間.

証明. $\mathbb{R}$ は S^1 の被覆空間なので，$p : \mathbb{R}^2 \to T^2$ を $p(x, y) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x, \cos 2\pi y, \sin 2\pi y)$ と定義すれば p は被覆写像. □

定義 7.1 (リフト)**.** $p : E \to X$ を被覆写像とする．$f : Y \to X$ のリフト $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\tilde{f} : Y \to E,\ p \circ \tilde{f} = f$.

次の図式が可換になるような $\tilde{f}$ が f のリフトである：

$$\begin{tikzcd}
 & E \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X
\end{tikzcd}$$

定理 7.2. $p : E \to X$ を被覆写像とする．$f : [0, 1] \to X$ をパス，$x_0 := f(0)$ とおく．$\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ に対して f のリフト $\tilde{f} : [0, 1] \to E,\ \tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ が一意に存在する．

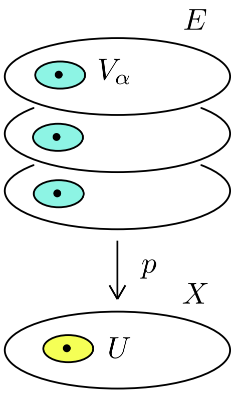


図 1: 被覆空間.

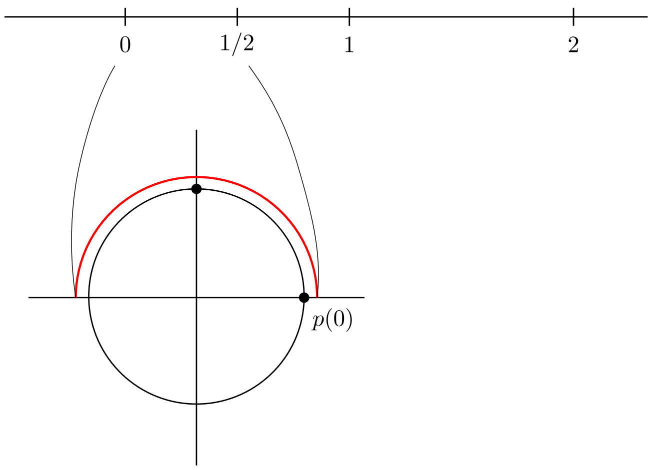


図 2: S^1 の被覆空間.

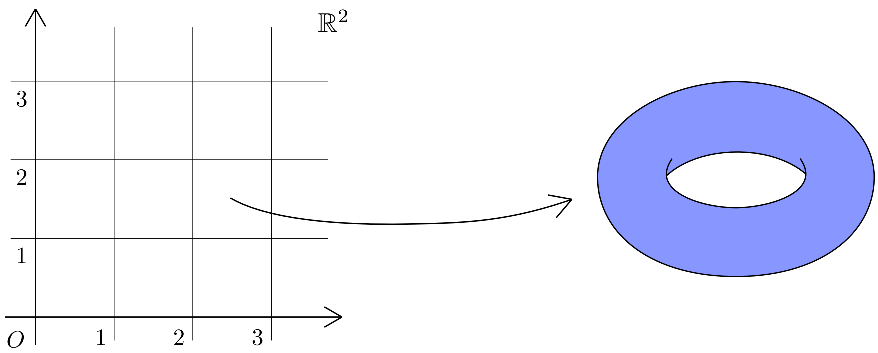


図 3: T^2 の被覆空間.

証明 (スケッチ). 区間 $[0,1]$ を細かく $0 = s_0 < s_1 < \cdots < s_n = 1$ と分割し，各区間 $[s_i, s_{i+1}]$ の像が上の (1) を満たす開集合 U_i に含まれるようにする（図 4）．具体的に言うと，各 $t \in [0,1]$ に対し $f(t)$ の近傍 U_t で (1) を満たすものをとる．その逆像 $f^{-1}(U_t)$ は t の開近傍で $\{f^{-1}(U_t)\}_t$ はコンパクト空間 $[0,1]$ の開被覆．ルベーグ数の補題より，ある $\delta > 0$ があって長さ δ の任意の部分区間はある $f^{-1}(U_t)$ に含まれる．よって $[0,1]$ を長さ δ の区間で分割すればよい．x_0 を含む U_0 の p の逆像で $\tilde{x_0} \in V_0$ なる連結成分 V_0 は一意に決まり，$\tilde{f} : [s_0, s_1] \to V_0$ で $p \circ \tilde{f} = f|_{[s_0,s_1]}$ が自動的に決まる．これを $[s_1, s_2], [s_2, s_3], \ldots$ に対して繰り返していくと，所望の $\tilde{f}$ が自動的に決まる． $\square$

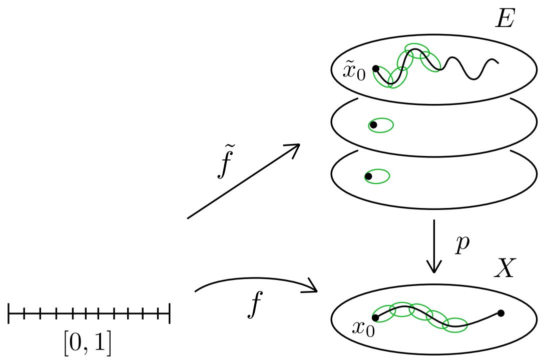


図 4: パスのリフト．

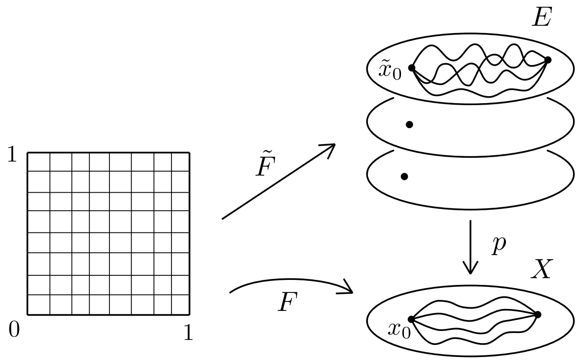


図 5: パスのホモトピーのリフト．

定理 7.3. $p : E \to X$ を被覆写像とする．$f_t : [0,1] \to X$ をパスのホモトピー，$f_t(0) = x_0$ $(\forall t)$ とおく．$\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ に対して f_t のリフトでパスのホモトピー $\tilde{f}_t : [0,1] \to E$, $\tilde{f}_t(0) = \tilde{x}_0$ が一意に存在する．

証明 (スケッチ)． $F : [0,1] \times [0,1] \to X$ を $F(s,t) := f_t(s)$ とおく．前の定理と同様にして $[0,1] \times [0,1]$ を細かく刻み，各ブロックの像が (1) を満たす開集合に含まれるようにする（図 5）．ここから所望の $\tilde{f}_t$（正確には $\tilde{F}(s,t) = \tilde{f}_t(s)$ なる $\tilde{F} : [0,1] \times [0,1] \to E$）が自動的に決まる．あとは $\forall t \in [0,1]$ について $\tilde{f}_t(1) = \tilde{y}_0 \in p^{-1}(y_0)$ を示せばよい（ただし $y_0 = f_t(1)$）．写像 $t \mapsto \tilde{f}_t(1)$ は連続写像 $[0,1] \to p^{-1}(y_0)$ を誘導する．$[0,1]$ は連結で，$p^{-1}(y_0)$ は離散空間なので，これは定数写像となる（次の注意）． □

注意 7.4. X が連結，Y が離散ならば，

$$f : X \to Y : \text{連続} \iff f : \text{定数写像}\ (\exists y \in Y,\ f(x) = y\ (\forall x \in X)).$$

証明． $\Leftarrow$ は明らかなので $\Rightarrow$ を示す．y を $f^{-1}(y) \neq \emptyset$ にとる．$\{y\}$ が開より $f^{-1}(\{y\})$ は開．$Y - \{y\}$ が開より $f^{-1}(Y - \{y\})$ は開．$X = f^{-1}(\{y\}) \coprod f^{-1}(Y - \{y\})$ と X の連結性より $X = f^{-1}(\{y\})$． □

$p : E \to X$ を被覆写像，f を基点が x_0 のループとする．$\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ を定め，f のリフト $\tilde{f}$ で $\tilde{f}(0) = \tilde{x}_0$ を満たすものをとると，$\tilde{f}(1) \in p^{-1}(x_0)$ となる．この関係から基本群と $p^{-1}(x_0)$ の間の対応関係が定義される．

定理 7.5. $p : E \to X$ を被覆写像とし，$x_0 \in X$, $\tilde{x}_0 \in p^{-1}(x_0)$ とする．基点 x_0 を持つ X のループ f のリフトで基点が $\tilde{x}_0$ であるようなものを $\tilde{f}$ とおく（図 6）．写像 $\phi : \pi_1(X, x_0) \to p^{-1}(x_0)$ を

$$\phi([f]) := \tilde{f}(1)$$

とおくと ϕ は well-defined で，E が弧状連結ならば ϕ は全射，E が単連結ならば ϕ は全単射．

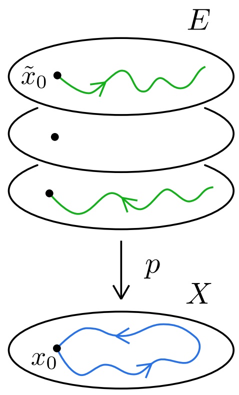


図 6: ループのリフト．

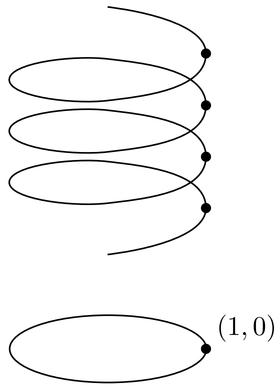


図 7: S^1 の被覆空間の別の見方．

証明． Well-definedness は定理 5.3 から従う．任意の $z \in p^{-1}(x_0)$ に対し $\tilde{x}_0$ と z を繋ぐパス h をとれば，$[p \circ h] \in \pi_1(X, x_0)$ で $\phi([p \circ h]) = h(1) = z$．$E$ が単連結ならば $\phi([f]) = \phi([f']) = z \in p^{-1}(x_0)$ とすると $\tilde{f}$ と $\tilde{f}'$ は $\tilde{x_0}$ と z を繋ぐパスで，単連結性より $\tilde{f} \simeq \tilde{f}'$．よって $f = p \circ \tilde{f} \simeq p \circ \tilde{f}' = f'$． □

この定理を用いて S^1 の基本群が求まる．

定理 7.6. $\pi_1(S^1) \simeq \mathbb{Z}$.

証明． $p : \mathbb{R} \to S^1$，$p(x) = (\cos 2\pi x, \sin 2\pi x)$ が被覆写像であったことを思い出す（図 7）．$x_0 = (1,0) \in S^1$ を基点とする S^1 の基本群を考えると，$p^{-1}(1,0) = \mathbb{Z}$ より ϕ は $\pi_1(S^1, (1,0)) \simeq \pi_1(S^1)$ から $\mathbb{Z}$ への全単射になる．特に $h_k : [0,1] \to S^1$ $(k \in \mathbb{Z})$ を

$$h_k(x) = (\cos 2\pi kx, \sin 2\pi kx)$$

とおくと $\phi([h_k]) = k$ となる．よって $\phi([f]) = k$ なら $f \simeq h_k$ となる．さらに $[h_k] \cdot [h_l] = [h_{k+l}]$ であるから，$\phi([f] \cdot [g]) = \phi([f]) + \phi([g])$．すなわち ϕ は同型写像． □

定理 7.7. $\pi_1(P^2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

証明． 射影平面 P^2 は球面 S^2 の x と $-x$ を同一視した空間であったことを思い出す．$p : S^2 \to P^2$ を

$$p(x) := x/\sim \quad (x \in S^2)$$

で定義すると，p は被覆写像になる．S^2 は単連結だから，ϕ は $\pi_1(P^2, x_0)$ から $p^{-1}(x)$ への全単射になる．$|p^{-1}(x)| = 2$ より $|\pi_1(P^2)| = 2$．よって $\pi_1(P^2) \simeq \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$． □

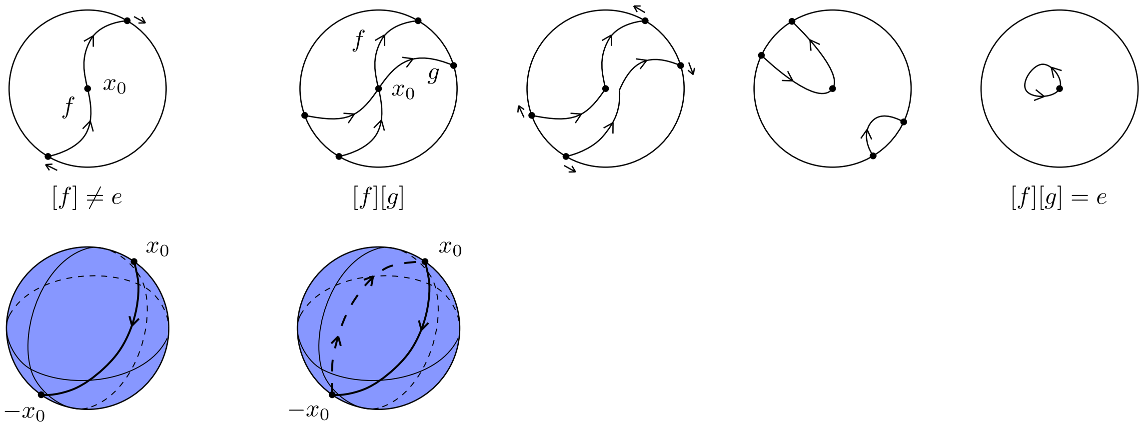


図 8: P^2 のループとそのリフト.

例 7.3. 図 8 の最も左のループ f について，$[f] \neq e$ のように思われる．そのような 2 つのループの積を考えると，連続的に e に変形することができる．P^2 の被覆空間 S^2 で考えると，最初のループは x_0 から x_0 の対蹠点 $-x_0$ へのパス，そのような 2 つのループの積は x_0 を基点とするループに対応する．

定義 7.8 (普遍的被覆空間)**.** X の普遍的被覆空間 $\tilde{X}$(universal covering space) $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\tilde{X}$ は X の任意の被覆空間の被覆空間になる．

定理 7.9. $\tilde{X}$ が X の普遍的被覆空間 $\Leftrightarrow$ $\tilde{X}$ は X の被覆空間で単連結．

$\tilde{X} := \{[f] \mid f : x_0$ を始点とするパス $[0,1] \to X\}$ と定義し，$p : \tilde{X} \to X$ を

$$p([f]) := f(1)$$

とおく．$\tilde{X}$ にうまく位相を入れると（入れることができるとき）$\tilde{X}$ は普遍被覆になる．

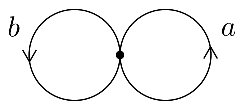
問題 7.1. 被覆空間，普遍被覆についてさらに調べよ．

問題 7.2. X がグラフのとき普遍被覆はどのようになるか？

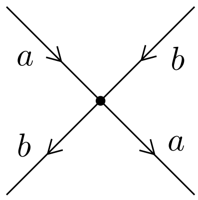
例 7.4. $S^1 \vee S^1$ は 1 つの頂点と 2 つの自己ループからなるグラフと思うことができる（図 9a）．自己ループにラベルと適当な向きを付ける．すると，グラフであって

- 各枝に a か b がラベリングされており，
- 各点のまわりが図 9b のようになっているもの

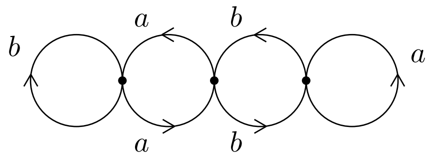
は $S^1 \vee S^1$ の被覆になる．例えば図 9c はそのようなグラフの 1 例である．次数 4 の無限木は $S^1 \vee S^1$ の普遍的被覆空間になる（図 9d）．



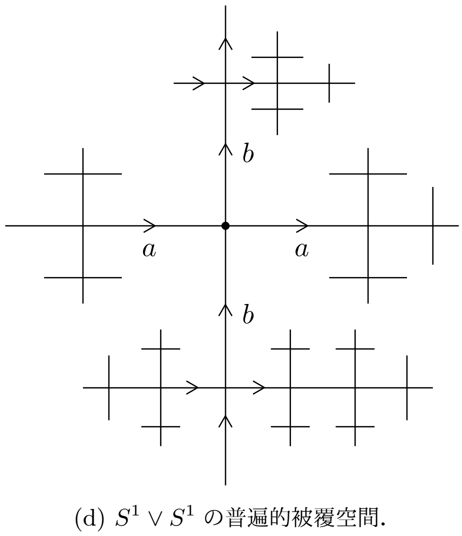
(a) $S^1 \vee S^1$.



(b) $S^1 \vee S^1$ の被覆になる条件.



(c) $S^1 \vee S^1$ の被覆の例.



(d) $S^1 \vee S^1$ の普遍的被覆空間.