

- 距離空間には、距離からの位相が入っているものとする。
- \mathbb{R}^n にはユークリッド距離からの位相が入っているものとする。
- 位相空間の部分集合には相対位相を入れるものとする。
- 位相空間の直積には直積位相を入れるものとする。
- 円周 S^1 の基本群は \mathbb{Z} という事実は既知としてよい。

問題 1. (X, d) を距離空間とする。

(1-1) 写像 $f: X \rightarrow X$ が

$$d(f(x), f(y)) \leq d(x, y) \quad (x, y \in X)$$

を満たすとき、 f は非拡大であるという。非拡大写像は連続であることを示せ。

(1-2) 距離関数 $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ は連続であることを示せ。

問題 2. 区間 $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ 上で次の同値関係 \sim を考える：

$$x \sim y \Leftrightarrow x = y \text{ または } (x, y) = (0, 1) \text{ または } (x, y) = (1, 0).$$

そして、商空間 $[0, 1]/\sim$ を考える。

(2-1) 写像 $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1]/\sim$ を

$$x \mapsto [x]$$

で定義する。このとき、 φ は連続全単射であること、逆写像 φ^{-1} は連続でないことを示せ。

(2-2) $[0, 1]$ と $[0, 1]/\sim$ の間に同相写像は存在するか？理由をつけて答えよ。

問題 3. 位相空間 X について、次の言明は正しいか？理由をつけて答えよ。

(3-1) 「 X が連結でないこと」と「 X がいくつかの位相空間の直和となること」は同値である。

(3-2) X が弧状連結な位相空間とホモトピー同値なら、 X は弧状連結である。

問題 4. 次の言明は正しいか？理由をつけて答えよ。

(4-1) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を連続写像、 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ を有界閉集合とすると、 $f(A)$ も閉集合である。

(4-2) $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ を線形写像、 $A \subseteq \mathbb{R}^n$ を閉集合とすると、 $f(A)$ も閉集合である。

問題 5. ここまでの授業の感想や授業に対する意見・要望を述べよ（減点することはありません）。