令和１年度「幾何数理工学」期末試験 (1/24(金), 8:30–10:15 のうち 90 分) 解答用紙２枚

問 1. X を頂点数 n，枝数 m の連結なグラフとし，１次元の複体とみなす．

(1-1) X は，$m-n+1$ 個の円周 S^1 を１点で貼り合わせた空間 $\overbrace{S^1 \vee \cdots \vee S^1}^{m-n+1}$ とホモトピー同値となることを説明せよ．

(1-2) X のホモロジー群を計算せよ．

問 2. 射影平面のホモロジー群を計算せよ．

問 3. V を $\mathbf{R}$ 上の n 次元ベクトル空間，$\mathcal{T} := V^* \otimes V^* \otimes V^*$ を $V \times V \times V$ 上の多重線形形式のなすベクトル空間とする．

(3-1) $\mathcal{T}$ の基底を与え，それが基底であることを証明せよ．

(3-2) $A : V \to V$ を線形写像とする．$T \in \mathcal{T}$ に対して $\varphi_A(T) : V \times V \times V \to \mathbf{R}$ を

$$\varphi_A(T)(u,v,w) := T(A(u), A(v), A(w)) \quad (u, v, w \in V)$$

と定義する．$\varphi_A(T)$ は，$\mathcal{T}$ の要素で，写像 $T \mapsto \varphi_A(T)$ は $\mathcal{T}$ から $\mathcal{T}$ への線形写像となることを示せ．

(3-3) $\dim V = 2$ のとき，線形写像 $\varphi_A : \mathcal{T} \to \mathcal{T}$ を (3-1) で与えた基底に関して行列表示せよ．

問 4. V を $\mathbf{R}$ 上の n 次元ベクトル空間，$e_1, e_2, \ldots, e_n$ を基底，$e^1, e^2, \ldots, e^n$ を双対基底とする．$G = (g_{\mu\nu})(= g_{\mu\nu} e^\mu \otimes e^\nu)$ を計量テンソル[1]（をこの基底で行列表現したもの）とする．次の量 (体積形式) を別の基底を用いて表せ：

$$\sqrt{\det G}\; e^1 \wedge e^2 \wedge \cdots \wedge e^n.$$

なお，外積の定義は以下のように与えられる．

$$u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_p := \frac{1}{p!} \sum_\sigma \mathrm{sign}(\sigma) u_{\sigma(1)} \otimes u_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes u_{\sigma(p)}.$$

ここで，σ は $\{1, 2, \ldots, p\}$ 上のすべての置換を動く．

裏に続く

[1]正定値対称な２階共変テンソル

問 5. 授業に対する感想，意見，要望など（何を書いても減点はしません）

レポートの情報 (授業でも説明しました):
http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/∼hirai/teaching/kikasuriR1.html

成績評価: 中間試験 + 期末試験 + 授業貢献
レポート: 救済措置 or 優上狙い
救済措置: 授業ノートの問題を解く
優上狙い: 以下の例のような簡単でないことをする：

- 授業ノートの難しい問題を解く.
- 講義中にやると効果的と思われるトポロジー・テンソルの題材を提出 (例：空間が変形レトラクトしていくアニメーションの作成，射影平面を 3 次元中に実現したオブジェクト (CG) の作成).
- テンソルのスライドの最後にあるこの先の話題（のどれか or いくつか or 全部）を勉強し，それを用いて授業ができる powerpoint プレゼンテーションをつくって提出.

締切: 2020/1/31
提出先: 1 階の平井のポスト or 平井のメールアドレス: hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp