令和元年度「幾何数理工学」中間試験 (11/29(金), 8:30–10:15: 試験時間は 90 分)
解答用紙 2 枚

問 1. n 次元実数空間 $\mathbf{R}^n$ に対して，２つの関数 $d_1, d_2 : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned} d_1(x, y) &:= \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \quad (x, y \in \mathbf{R}^n), \\ d_2(x, y) &:= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2} \quad (x, y \in \mathbf{R}^n). \end{aligned}$$

(1-1) d_1 と d_2 は $\mathbf{R}^n$ 上の距離関数であることを示せ.

(1-2) d_1 のもとでの連続関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ は，d_2 のもとで連続関数になるか？理由をつけて答えよ．また，その逆（d_1 と d_2 の役割を入れ換えた場合）についても答えよ.

問 2. X, Y を位相空間とする.

(2-1) 関数 $p : X \times Y \to X$ を

$$p(x, y) := x \quad ((x, y) \in X \times Y)$$

と定義するとき，p は連続であることを示せ.

(2-2) 以下の２つの主張は同値か？ そうなら証明を，そうでないなら反例を示せ.

- $X \times Y$ は弧状連結.
- X と Y はそれぞれ弧状連結.

問 3. Y を離散位相空間とする．すなわち，Y の開集合族はすべての Y の部分集合とする.

(3-1) 以下の２つの主張は同値か？そうなら証明を，そうでないなら反例を与えよ.

- Y はコンパクト.
- Y は有限集合.

(3-2) X が連結位相空間のとき，X から Y への連続関数は，どのようなものになるか？

問 4. X を位相空間とする．以下の２つの主張は同値か？そうなら証明を，そうでないなら反例を与えよ.

- X は単連結.
- X の任意の２つのパスがホモトープ.

問 5. 球面 S^n から１点を除いた空間の基本群を決定せよ.