

平成 30 年度「幾何数理工学」期末試験 (1/25(金), 8:30-10:15) 解答用紙 2 枚
 記法・用語については, 裏面の補足も参照のこと.

問 1. 以下を示せ. ここで円周 S^1 の基本群は \mathbb{Z} である事実を用いてよい.

(1-1) ディスク B^2 と円周 S^1 はホモトピー同値でない.

(1-2) 連続写像 $f: B^2 \rightarrow B^2$ には $f(x) = x$ を満たす点 $x \in B^2$ (不動点) が存在する.

ヒント: f に不動点がないとして写像 $\phi: B^2 \rightarrow S^1$ を

$$\phi(x) := f(x) \text{ を始点として } x \text{ をとおる半直線と } S^1 \text{ との交点 } (x \in B^2)$$

と定義し, 矛盾を導く.

問 2. X, Y を位相空間とし, $x_0 \in X, y_0 \in Y$ とする. x_0 を基点とする X のループ f と y_0 を基点とする Y のループ g に対して, (x_0, y_0) を基点とする $X \times Y$ のループ (f, g) を

$$(f, g)(t) := (f(t), g(t)) \quad (t \in [0, 1])$$

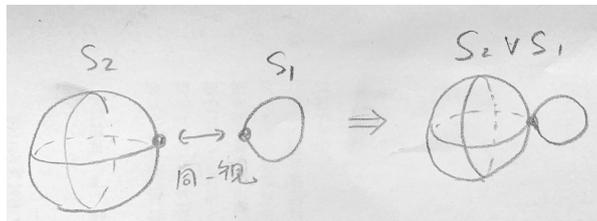
で定義する. このとき $\phi: \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \rightarrow \pi_1(X \times Y, (x_0, y_0))$ を

$$\phi([f], [g]) := [(f, g)] \quad ([f] \in \pi_1(X, x_0), [g] \in \pi_1(Y, y_0))$$

と定義すると, これは well-defined で, 同型写像となることを示せ.

問 3. 3次元トーラス $S^1 \times S^1 \times S^1$ の単連結な被覆空間を与えよ.

問 4. 図のように球面 S^2 と円周 S^1 を一点で貼り合わせて得られる空間 $S^2 \vee S^1$ のホモロジーク群を計算せよ.



問 5. U, V を有限次元ベクトル空間とし, $\text{Hom}(U, V)$ を U から V への線形写像全体のなすベクトル空間とする. このとき 2つのベクトル空間 $U^* \otimes V$ と $\text{Hom}(U, V)$ は, 同型であることを示せ.

問 6. $v_\kappa^{\lambda\mu}$ を反変 2 個共変 1 個テンソル, $w_\mu^{\kappa\sigma\pi}$ を反変 3 個共変 1 個テンソルとするとき

$$v_\kappa^{\lambda\mu} w_\mu^{\kappa\sigma\pi}$$

は反変 3 個テンソルであることを示せ.

問 7. V を n 次元ベクトル空間とするとき, p 階対称反変テンソル空間 $\overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^p$ の基底と次元を求めよ.

裏に続く

問 8. 授業に対する感想, 意見, 要望など (何を書いても減点はしません)

補足:

k 次元球面 $S^k := \{x \in \mathbf{R}^{k+1} \mid x_1^2 + \cdots + x_{k+1}^2 = 1\}$.

k 次元ディスク $B^k := \{x \in \mathbf{R}^k \mid x_1^2 + \cdots + x_k^2 \leq 1\}$.

$\pi_1(X, x_0)$: 位相空間 X の x_0 を基点とする基本群.

$U \otimes V$: 二つのベクトル空間 U, V のテンソル積.

U^* : ベクトル空間 U の双対空間.

レポートの情報 (授業でも説明しました):

<http://www.misojiro.t.u-tokyo.ac.jp/~hirai/teaching/kikasuri30.html>

成績評価: 中間試験 + 期末試験 + 授業貢献

レポート: 救済措置 or 優上狙い

救済措置: 授業ノートの問題を解く

優上狙い: 授業ノートの難しい問題を解く or/both 講義中にやると効果的と思われるトポロジー・テンソルの題材を提出 (例: 空間が変形レトラクトしていくアニメーションの作成, 射影平面を 3 次元中に実現したオブジェクト (CG) の作成)

締切: 2019/2/1

提出先: 1 階の平井のポスト or 平井のメールアドレス: hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp