平成 30 年度「幾何数理工学」中間試験 (11/30(金), 8:30–10:15) 解答用紙 2 枚

問 1. X を非空な集合とし，$d : X \times X \to \mathbf{R}$ を以下を満たす関数とする：

- $d(x, x) = 0$ $(x \in X)$
- $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$ $(x, y \in X)$
- $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ $(x, y \in X)$

(1-1) X 上の 2 項関係 $\sim$ を $x \sim y \Leftrightarrow d(x, y) = 0$ で定義する．このとき，$\sim$ は同値関係であることを示せ．

(1-2) $\mathcal{X}$ を $\sim$ による X の同値類の集合とする．関数 $\bar{d} : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbf{R}$ を

$$\bar{d}([x], [y]) := d(x, y) \quad ([x], [y] \in \mathcal{X})$$

と定義すると，$\bar{d}$ は well-defined で $\mathcal{X}$ 上の距離関数となることを示せ．ここで，$x \in X$ の同値類を $[x]$ で表す．

問 2. X, Y, Z を位相空間とする．(直積位相の定義：黒板)

(2-1) $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ を連続関数とするとき，合成 $g \circ f : X \to Z$ も連続関数であることを示せ．

(2-2) $h_1 : X \to Y$, $h_2 : X \to Z$ を連続関数とするとき，以下のように定義される $h : X \to Y \times Z$ も連続関数であることを示せ．

$$h(x) := (h_1(x), h_2(x)) \quad (x \in X).$$

(2-3) $p : X \to \mathbf{R}$, $q : X \to \mathbf{R}$ を連続関数とするとき，$p + q : X \to \mathbf{R}$ も連続であることを示せ．ここで，$p + q$ は，$(p + q)(x) := p(x) + q(x)$ で定義される．

問 3. いくつかの同じサイズの正方形を共通の一辺で貼り合わせた空間を考える．(図：黒板)

(3-1) そのような空間を位相空間として定義せよ．

(3-2) 上であなたが定義した位相空間は連結か？理由をつけて答えよ．

(3-3) 上であなたが定義した位相空間はコンパクトか？理由をつけて答えよ．

裏へ続く．

問 4. 以下の空間たちをホモトピー同値関係によって分類せよ．また，その理由も述べよ．

- $\mathbf{R}^n$ の凸集合
- $\mathbf{R}^2$ から 1 点を除いた集合
- $\mathbf{R}^2$ から半直線を除いた集合
- 球面から 1 点を除いた集合
- 球面から 2 点を除いた集合
- $\mathbf{R}^3$ から直線を除いた集合
- $\mathbf{R}^4$ から平面を除いた集合

ここで，円周の基本群は $\mathbf{Z}$（整数の加法の群）である事実を用いてよい．