平成 29 年度「幾何数理工学」期末試験 (1/19(金), 8:30–10:15) 解答用紙 2 枚

問 1. 弧状連結な位相空間が単連結であることと以下の条件が同値であることを示せ：

- 任意の 2 点を結ぶ任意の 2 つのパスはホモトープである．

問 2. 単連結だが可縮でない位相空間の例を挙げよ．また，その理由も述べよ．

問 3. 以下の位相空間の基本群とホモロジー群を計算せよ．

(i) トーラス

(ii) 2 次元球面 S^2

(iii) 3 次元球面 S^3

なお，円周 S^1 の基本群は既知としてよい．

問 4. 連結なグラフ $G = (V, E)$ と頂点 $x_0 \in V$ に対して，次のグラフ $\tilde{G}$ を考える：

- $\tilde{G}$ の頂点集合 $V(\tilde{G})$ は,「始点が x_0 で後戻りが無く同じ頂点を何度通ってもよいパス」の全体とする．すなわち，

$$V(\tilde{G}) := \{(x_0, x_1, \ldots, x_k) \mid k \geq 0,\ x_i \in V,\ (x_{i-1}, x_i) \in E,\ x_{i-1} \neq x_{i+1}\}.$$

- 2 つの頂点 $(x_0, x_1, \ldots, x_k), (x_0, x'_1, \ldots, x'_{k'}) \in V(\tilde{G})$ が $|k - k'| = 1$ かつ $x_i = x'_i$ $(i \leq \min(k, k'))$ を満たすとき，そのときに限り，$\tilde{G}$ において隣接すると定める．

このとき，以下の主張は正しいと私 (平井) は思うのだが本当だろうか？ 議論しなさい．

- $\tilde{G}$ は G の単連結な被覆空間である．

ここで，グラフ $G, \tilde{G}$ を位相空間 (1 次元複体) とみる．

問 5. V と U を (有限次元) ベクトル空間とする．3 つのベクトル空間 $V \times U$，$(V^* \times U^*)^*$，$V \otimes U$ の違いを述べて，それぞれの次元を求めよ．

問 6. 次の n^2 個の数の組 T^μ_κ $(\kappa, \mu = 1, 2, \ldots, n)$ を以下で定義する:

$$T^\mu_\kappa := \begin{cases} 1 & \text{if } \kappa = \mu, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

このとき，T^μ_κ は反変 1 価共変 1 価テンソルと見なせることを示せ．また，他の型のテンソルとは一般に見なせないことも示せ．

問 7. $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ を 2 階微分可能な強凸関数とする．このとき，各点におけるヘッセ行列

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_\kappa \partial x_\mu} \right)$$

は，計量テンソルと見なせることを示せ．