平成 29 年度「幾何数理工学」中間試験 (11/14(火), 8:30–10:15) 解答用紙 2 枚

問 1. $C[a,b]$ を閉区間 $[a,b] \subseteq \mathbf{R}$ 上 $(a<b)$ の連続関数全体とし，$d : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbf{R}$ を

$$d(f,g) := \int_a^b |f(x)-g(x)|\mathrm{d}x \quad (f,g \in C[a,b])$$

と定義する．このとき $(C[a,b],d)$ は距離空間になることを示せ．

問 2. n 次元球面 $S^n := \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i^2 = 1\} \subseteq \mathbf{R}^{n+1}$ 上の次の 2 つの位相は等しいことを示せ．

(i) ユークリッド空間 $\mathbf{R}^{n+1}$ からの相対位相．

(ii) S^n 上の距離関数

$$d(x,y) := \cos^{-1}\langle x,y\rangle \quad (\in [0,\pi])$$

から決まる位相．ここで $\langle x,y\rangle$ は内積 $\sum_{i=1}^n x_i y_i$ で，d は距離関数であることを仮定してよい．

問 3. X, Y を位相空間とする．X は閉集合 $A_1, A_2, \ldots, A_k \subseteq X$ たちの和 $X = \bigcup_{i=1}^k A_i$ になっているとする．このとき，写像 $f : X \to Y$ に対して，以下は同値であることを示せ．

(i) f は連続である．

(ii) 各 i に対し $f|_{A_i}$ は連続である．

ここで，A_i には X からの相対位相が入っているものとし，$f|_{A_i} : A_i \to Y$ は制限写像，すなわち $f|_{A_i}(x) := f(x)$ $(x \in A_i)$ である．

問 4. ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の k 次元部分ベクトル空間 V に対し，位相空間 $X := \mathbf{R}^n \setminus V$ を考える．位相は相対位相で与える．以下の問いに理由をつけて答えよ．

(1) X は連結か？

(2) X は弧状連結か？

問 5. 以下の言明は正しいか？　理由をつけて答えよ．

(1) コンパクトな位相空間と位相同型な位相空間はコンパクトである．

(2) コンパクトな位相空間とホモトピー同値な位相空間はコンパクトである．

問 6. ユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 X が星状 (star-shaped) であるとは，ある $x \in X$ が存在して，任意の $y \in X$ に対して，x と y を結ぶ線分 $[x,y]$ が X に含まれるときをいう．どんな 2 つの星状部分集合もホモトピー同値であることを示せ．

問 7. 問 4 の位相空間 X はある l 次元球面とホモトピー同値である．これを示せ．