平成 28 年度「幾何数理工学」期末試験 (1/19, 8:30–10:15) 解答用紙 2 枚

問 1. X, Y を距離空間とし，それぞれの距離関数を d_X, d_Y とする．X と Y を距離から誘導される位相によって位相空間とみなす．さて，$X \vee Y$ を X の 1 点 x_0 と Y の 1 点 y_0 を同一視して得られる位相空間 [1] とする．

(1) $d : (X \vee Y) \times (X \vee Y) \to \mathbf{R}$ を

$$d(z,w) := \begin{cases} d_X(z,w) & \text{if } z, w \in X, \\ d_Y(z,w) & \text{if } z, w \in Y, \\ d_X(z,x_0) + d_Y(y_0,w) & \text{if } z \in X, w \in Y, \\ d_Y(z,y_0) + d_X(x_0,w) & \text{if } z \in Y, w \in X, \end{cases} \qquad (z, w \in X \vee Y)$$

と定義すると，d は $X \vee Y$ 上距離関数となることを示せ．

(2) $X \vee Y$ の位相は，d から誘導される位相と等しいか？ 理由をつけて答えよ．

(3) 以下の主張は正しいか？ 理由をつけて答えよ．

$X \vee Y$ がコンパクトであることと X と Y がともにコンパクトであることは同値である．

(4) 以下の主張は正しいか？ 理由をつけて答えよ．

$X \vee Y$ が弧状連結であることと X と Y がともに弧状連結であることは同値である．

問 2. 本問では，円周の基本群を既知としてよい．

(1) $\mathbf{R}^k$ $(k \geq 2)$ から 1 本の直線を除いた空間を考える．この空間の基本群を求めよ．

(2) 2 本の直線を除いた場合はどうなるか議論せよ．

問 3. クラインの壷のオイラー標数とホモロジー群を計算せよ．

問 4. V を n 次元ベクトル空間とし，$(e_\kappa : \kappa = 1, 2, \ldots, n)$ を基底 (座標系) とする．ここでは V から得られるテンソル空間の元 (の座標表示) を考える．

(1) $v_\kappa^{\lambda\mu}$ を反変 2 価共変 1 価テンソル，$w_{\mu\nu}^{\kappa\sigma}$ を反変 2 価共変 2 価テンソルとするとき

$$v_\kappa^{\lambda\mu} w_{\mu\nu}^{\kappa\sigma}$$

は反変 2 価共変 1 価テンソルであることを示せ．

(2) 共変 p-ベクトル $v_{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_p}$ $(p \leq n)$ が新しい座標系 $(e_{\kappa'} : \kappa' = 1', 2', \ldots, n')$ の下で，$v_{\kappa_1'\kappa_2'\cdots\kappa_p'}$ と変換されたとする．このとき以下の等式が成り立つことを示せ．

$$v_{1'2'\cdots p'} = \sum_{1 \leq \kappa_1 < \kappa_2 < \cdots < \kappa_p \leq n} v_{\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_p} \det A[\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_p].$$

ここで，$e_{\kappa'} = A_{\kappa'}^{\kappa} e_\kappa$ であり，$A[\kappa_1\kappa_2\cdots\kappa_p]$ は (i,j) 要素が $A_{i'}^{\kappa_j}$ である $p \times p$ 行列である．

問 5. 授業の感想等 (何を書いても減点することは (加点することも) ありません)

[1] 正確にいうと，$X \vee Y$ は，X と Y の直和 $X \coprod Y$ に $x_0 \sim y_0$ でそれ以外の異なる点 x, y は $x \not\sim y$ という同値関係 $\sim$ を入れ，その同値関係による商集合 $X \coprod Y / \sim$ に商位相をいれて得られる位相空間である．また，自然な全射 $X \coprod Y \to X \coprod Y / \sim$ は，X 上，Y 上で，それぞれで単射になり，これによって $X, Y \subseteq X \vee Y$ とみなす．