新しい凸性に基づく
アルゴリズムと最適化理論

平井 広志

東京大学大学院 情報理工学系研究科
数理情報学専攻

JST さきがけ

hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

「つながる数学」

さきがけ数理構造活用領域1期生成果報告会シンポジウム

2023年1月29日 JST東京本部別館

研究の概要

　従来のユークリッド空間上の凸性に基づく連続・離散最適化の枠組みを乗り越えて，CAT(0) 空間といった**非正曲率距離空間の凸性に基づく新しい連続・離散最適化理論，および，計算複雑度・アルゴリズム論**を展開し，数学・数理科学・情報科学諸分野へ横断的に活用する．

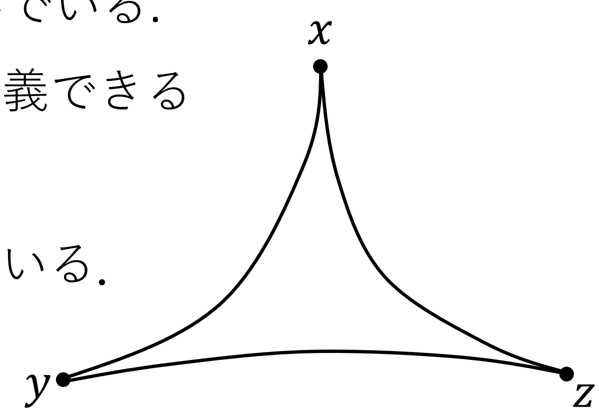
CAT(0)空間 (Gromov 1987) ～ 非正な曲率をもつ測地的距離空間

- 「３角型が痩せている」と定義される．例：双曲空間
- ユークリッド空間のいくつかのよい性質を引き継いでいる．

  例: 一意測地性 → **凸性** が自然に定義できる
- 近年，応用数学，計算量・アルゴリズム的にも「良い」空間ではないかという雰囲気になってきている．

  例: 系統樹空間 (Billera-Holmes-Vogtman 2001)

  ロボティクス (Abram-Ghrist 2004)



離散最適化・アルゴリズム設計の基本パラダイム

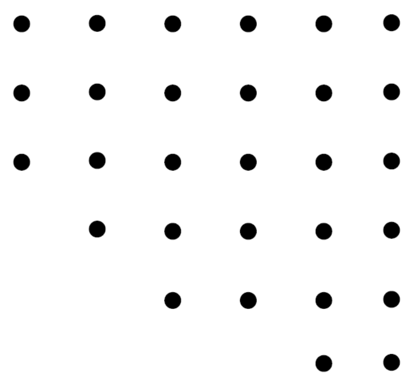
NP困難

P

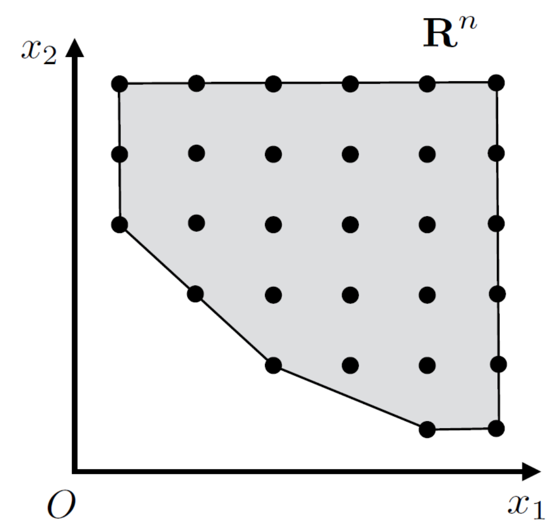
効率的アルゴリズム

離散化

$\mathbb{R}^n$上の凸最適化アルゴリズム
単体法，内点法，最急降下法, etc



埋め込み



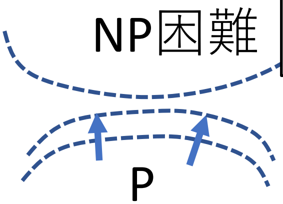
離散最適化問題

$\mathbb{R}^n$上の連続最適化問題

本研究の問題意識：
ユークリッド空間よりも一般的な空間を使えるようにしたい

ターゲット：CAT(0)空間，アダマール空間・多様体（:= 完備 CAT(0) 空間・多様体）

こんなパラダイムをつくりたい



課題(C)
離散凸解析 *beyond* $\mathbb{Z}^n$

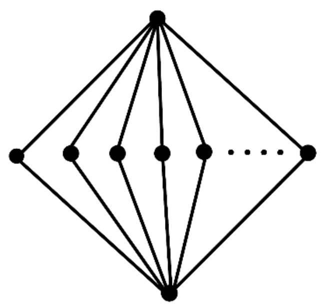
効率的アルゴリズム

課題(A)
CAT(0)空間上の
アルゴリズムと最適化

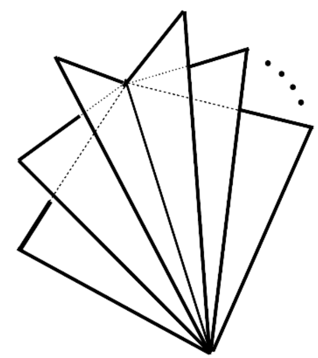
離散化

X上の最適化問題

$K(X)$上の凸最適化



埋め込み



ターゲット

課題(D)
代数的組合せ的
最適化

離散構造X

CAT(0)空間$K(X)$

認識され始めた
新しい最適化問題

課題(B)
離散構造による空間表現論

課題(E)
関連する数学・数理科学・情報科学への横断的活用

シンクボリックランク計算（Edmonds 問題）Edmonds 1967

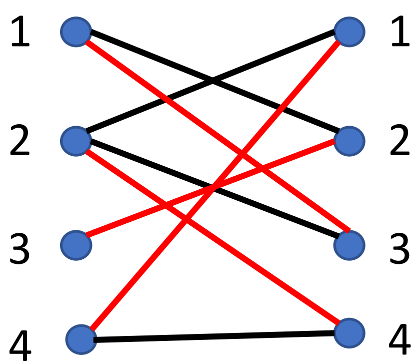
$A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 変数

$$A \coloneqq A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_mx_m$$

A の $\mathbb{K}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 上のランクは多項式時間で計算できるか？

- 理論計算機科学の重要な未解決問題，回路計算量との関係
- 組合せ最適化との関連，空間グラフの剛性，制御システムの安定性，…

例:

$G =$ 

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} & x_1 & x_2 & \\ x_3 & & x_4 & x_5 \\ & x_6 & & \\ & & & x_7 \end{pmatrix} \end{array}$$

最大マッチング数 $= \mathrm{rank}\, A$

非可換 Edmonds 問題 Ivanyos, Qiao, Subrahmanyam 2017

$A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $x_1, x_2, \dots, x_m$ 非可換変数 $x_i x_j \neq x_j x_i$

$$A \coloneqq A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_m x_m$$

A の $\mathbb{K}(\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle)$ 上のランクは多項式時間で計算できるか？

自由斜体（free skew field）
Amitsur 1966

非可換ランク（nc-rank）

さらなる拡がり：非可換代数，表現論，不変式論，量子情報，

GCT（Geometric Complexity Theory）, Brascamp-Lieb不等式，…

nc-rank 計算 = 新しいタイプの最適化問題になる（後述）

Nc-rank in P

- Garg, Gurvits, Oliveira, Wigderson 2020 (FOCS 2016): $\mathbb{K} = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$
  - アダマール多様体上の凸最適化問題に対する交互最適化

    → さらなる発展: 群軌道上のノルム最小化
    （Bürgisser et al. FOCS2019）

- Ivanyos, Qiao, Subrahmanyam 2018 (ITCS2017) : $\mathbb{K}$ 一般
  - Wong sequence 〜 交互道アルゴリズムの代数的一般化

    → 組合せ最適化アルゴリズムの代数化

従来の連続・離散最適化の枠組みを超える方向性を示している

成果（A,B,C,D, ~E）

本課題の構想に基づく全く異なる多項式時間アルゴリズム

- Hamada, Hirai 2021 : $\mathbb{K}$ 一般
  - モジュラ束上の離散凸（劣モジュラ）最適化
  - 非多様体的なアダマール空間上の凸最適化 を用いて多項式時間計算量を示した最初の結果

M. Hamada and H. Hirai:
Computing the nc-rank via discrete convex optimization on CAT(0) spaces,
SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry 5 (2021), 455--478.

招待講演

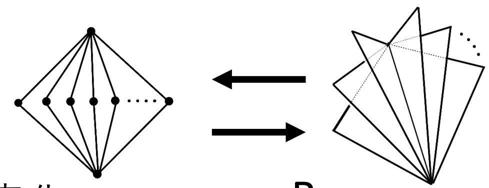
H. Hirai: "Computing the nc-rank via discrete convex optimization on CAT(0) spaces",
SIAM Conference on Applied Algebraic Geometry (AG21), August 16, 2021.

H. Hirai: "Computing the nc-rank via discrete convex optimization on CAT(0) spaces",
Simons Institute for the Theory of Computing, Berkeley, November 29, 2021.

H. Hirai: "Discrete Convex Optimization for Left-Right Action (nc-rank & det)",
GCT2022 Online Lecture Series, December 14 & 17, 2021.

C: 離散凸解析*beyond* $\mathbb{Z}^n$

A



D:代数的
組合せ最適化

B

Thm (Cohn 1996, Fortin, Reutenauer 2004)

$$\text{nc-rank} \textstyle\sum_k A_k x_k = 2n - \text{Max.} \quad \dim X + \dim Y$$

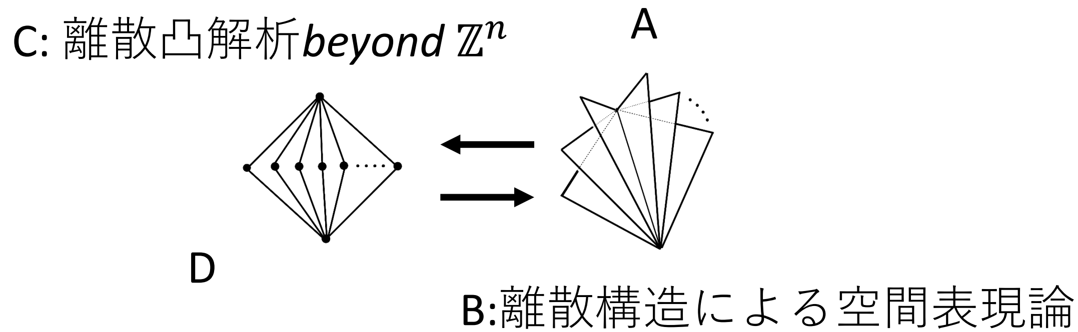
s.t. $A_k(X, Y) = \{0\}$ $(\forall k)$

$X, Y \subseteq \mathbb{K}^n$: ベクトル部分空間

where $A_k(x, y) := x^\top A_k y$

- ２部マッチング・Hallの結婚定理の代数的一般化
- ベクトル部分空間族上の最適化問題
- ベクトル部分空間のなすモジュラ束 $\mathcal{M}$ 上の離散凸最適化とみなせる

劣モジュラ性: $f(p) + f(q) \geq f(p \vee q) + f(p \wedge q)$ $(p, q \in \mathcal{M})$

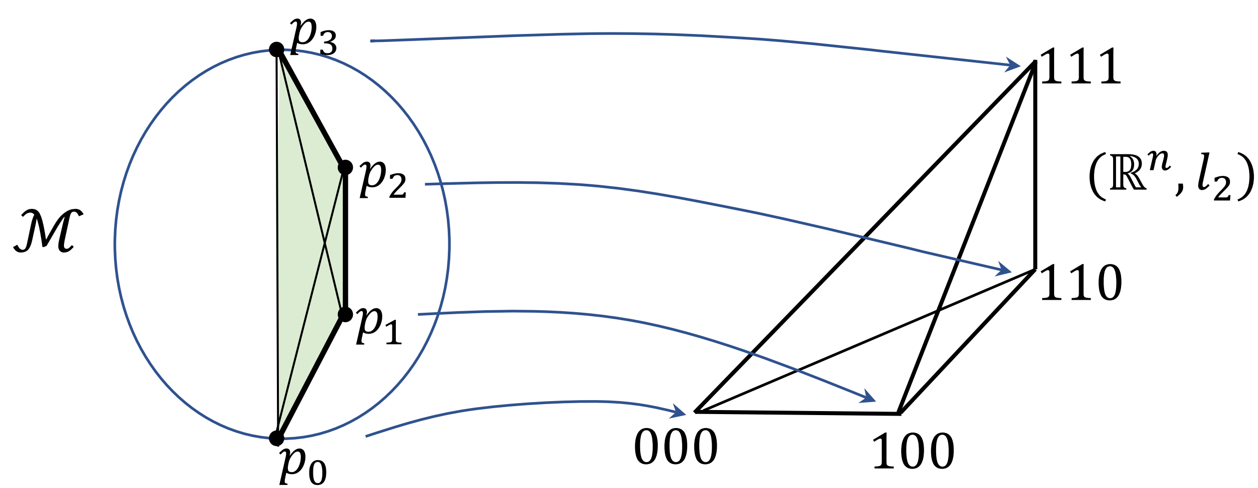


モジュラ束 $\mathcal{M}$ $\Longrightarrow$ $K(\mathcal{M})$: アダマール空間

オーソスキーム複体 (Chalopin, Chepoi, Hirai, Osajda 2020)

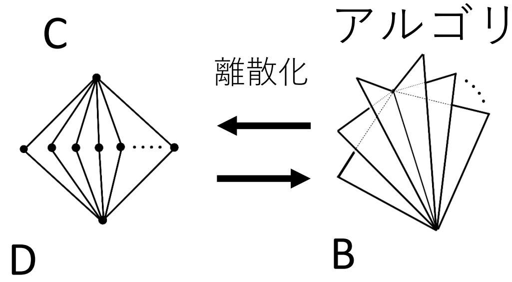
劣モジュラ関数 $f: \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ $\Longrightarrow$ $\bar{f}: K(\mathcal{M}) \to \mathbb{R}$ 測地的凸 (Hirai 2018)

Lovász 拡張



→ 非可換ランク ＝ アダマール空間上の凸最適化問題の最適値

A: CAT(0)空間上の
アルゴリズムと最適化



Bačák 2014: 分割近接点法

測地的凸

$$\text{Min.}\quad f(x) = \sum_{i=1}^{N} f_i(x) \quad \text{s.t.} \quad x \in K$$ アダマール空間

Iterate: $x^{k+1} \longleftarrow \operatorname{argmin}_{x \in K} \; f_{k \bmod N}\;(x) + \frac{1}{\lambda_k} d(x, x^k)^2$

Ohta, Pálfia 2015: f: 強凸 ⇒ 収束レート（sublinear）

Hamada, Hirai 2021: これらを応用する

- $A_k(X,Y) = \{0\} (\forall k)$ → ペナルティ項 $C \sum_k \operatorname{rank} A_k|_{X,Y}$ → Lovász拡張
- 摂動（強凸化），Lipschitz 定数の評価，目的関数の整数性 → 多項式回の反復で十分
- １反復が多項式時間で実行可能 ← 束論的議論
- $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ のときは，ビット複雑度を抑える必要がある

→ p 進付値を利用して，$GF(p)$ 上の問題に帰着させる

Garg et al. 2020のアプローチ
非正曲率対称空間上の測地的凸最適化
（測地線 $t \mapsto g e^{tH} g^T$ にそって凸）

$\mathbb{R}$

Min.	$n \log \operatorname{tr} \sum_k X A_k Y A_k^T - \log \det X\, Y$	$> -\infty$
s.t.	X, Y: 正定値対称	

完備化 $\uparrow$

$\Updownarrow$ Gurvitz 2004

$\mathbb{Q}$

$\sum_k A_k x_k$: nc-正則

$\Updownarrow$

完備化 $\downarrow$

$\mathbb{Q}_p$

p 進数体

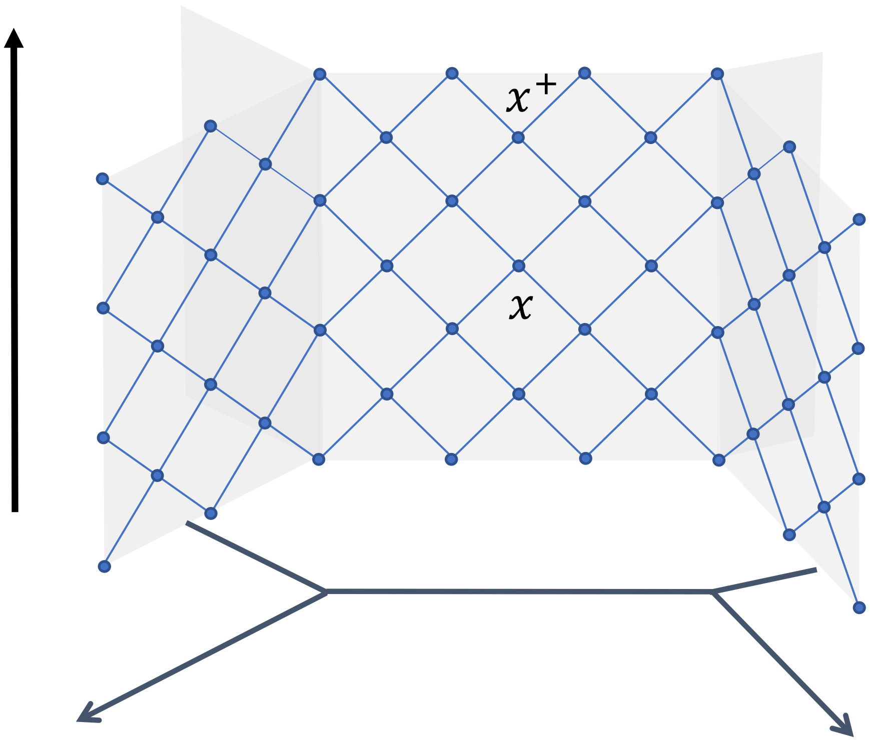
Min.	$v_p \det P + v_p \det Q$	$> -\infty$
s.t.	$v_p(P A_k Q)_{ij} \geq 0 \quad (\forall ij, k)$,	
	$P, Q \in GL_n(\mathbb{Q}_p)$	

$$z = \underbrace{1011\,\overbrace{000}^{v_2(z)}}_{bitsize}$$

Hamada,Hirai 2021のアプローチ

- ユークリッドビルディング上の離散凸最適化
- 局所最適化→ ncランク計算 on $GF(p) = \mathbb{Z}_p / p\mathbb{Z}_p$
- 目的関数を poly(A_kのbitsize) でバウンド

ユークリッドビルディング ≈ $\mathbb{R}^n$ の（適切な）貼り合わせ



成果（B, C）

- A型ユークリッドビルディングの束論的特徴付け & L 凸関数の導入

$$f(x^+) = f(x), \;\; f(x) + f(y) \geq f(x \wedge y) + f(x \vee y)$$

H. Hirai: Uniform modular lattices and affine buildings, Advances in Geometry 20 (2020), 375--390.

課題(C) 離散凸解析 *beyond* $\mathbb{Z}^n$

- 離散凸解析（Murota 1996 ～）

  ～ 整数格子 $\mathbb{Z}^n$ 上の「離散凸関数」の理論

計算量・アルゴリズム的にうまく振る舞う$\mathbb{Z}^n$上の関数

- 劣モジュラ関数，L 凸関数，M 凸関数,...
- 埋め込み $\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$のもとで$\mathbb{R}^n$上の凸関数に拡張される

目標（離散凸解析 *beyond* $\mathbb{Z}^n$）

グリッドグラフ（$\approx \mathbb{Z}^n$）のようなグラフ上で計算量・アルゴリズム的にうまく振る舞う「離散凸関数」の理論とアルゴリズムの展開

指導原理：CAT(0)空間上の凸関数への拡張性

成果（c）

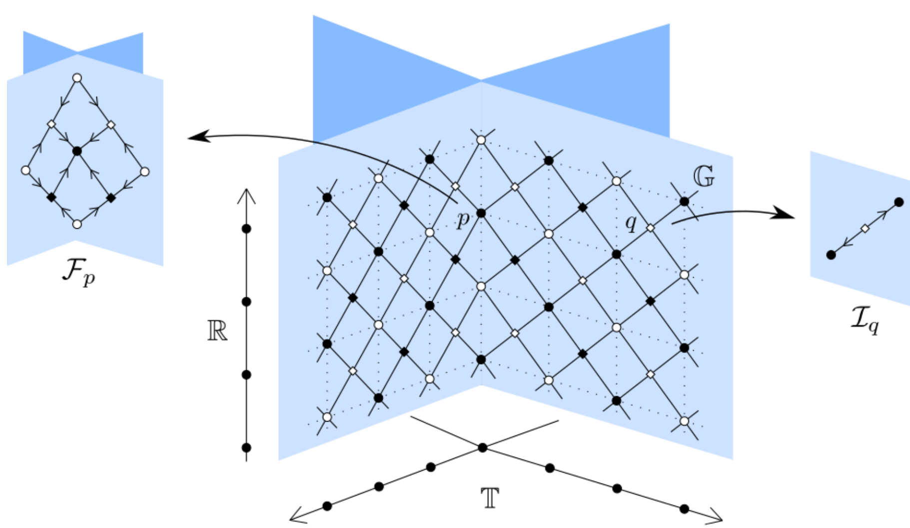
これまでよいアルゴリズムが知られてなかった２つのネットワーク最適化問題に対する離散凸解析 *beyond* $\mathbb{Z}^n$ に基づいた効率的な多項式時間アルゴリズム

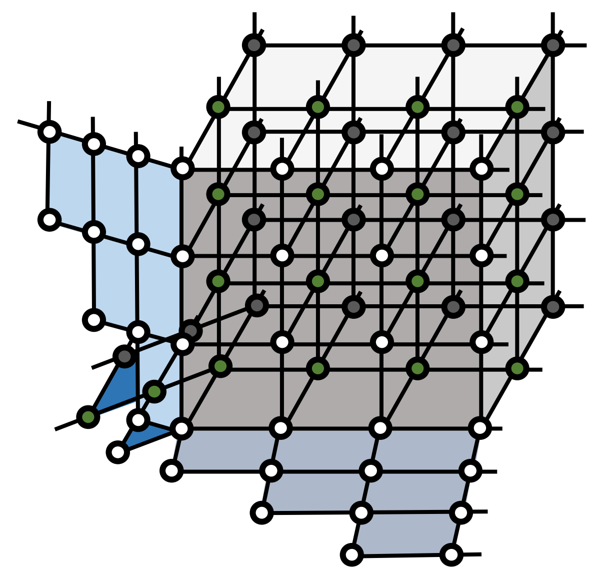
- 点容量型最小コスト自由多品種フロー

  H.Hirai and M.Ikeda: A cost-scaling algorithm for minimum-cost node-capacitated multiflow problem, Mathematical Programing Series A 195 (2022),149--181

- 点容量型ターミナルバックアップ問題

  H.Hirai and M.Ikeda: Node-connectivity terminal backup, separately-capacitated multiflow, and discrete convexity, SIAM Journal on Discrete Mathematics, to appear.



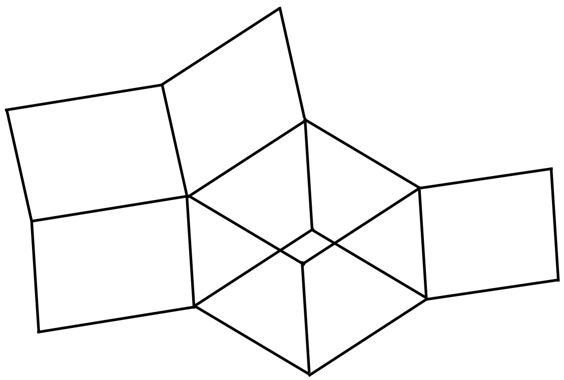


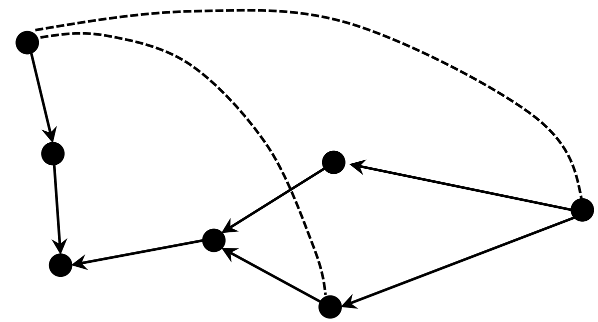
このような構造の直積上での離散凸関数（L凸関数）の理論にもとづく

課題(B) 離散構造による空間表現論

- CAT(0)立方複体　≈　メディアングラフ　≈　PIP (Poset with Inconsistent Pairs)

Chepoi 2000　　　　　　　　Ardila et al. 2012





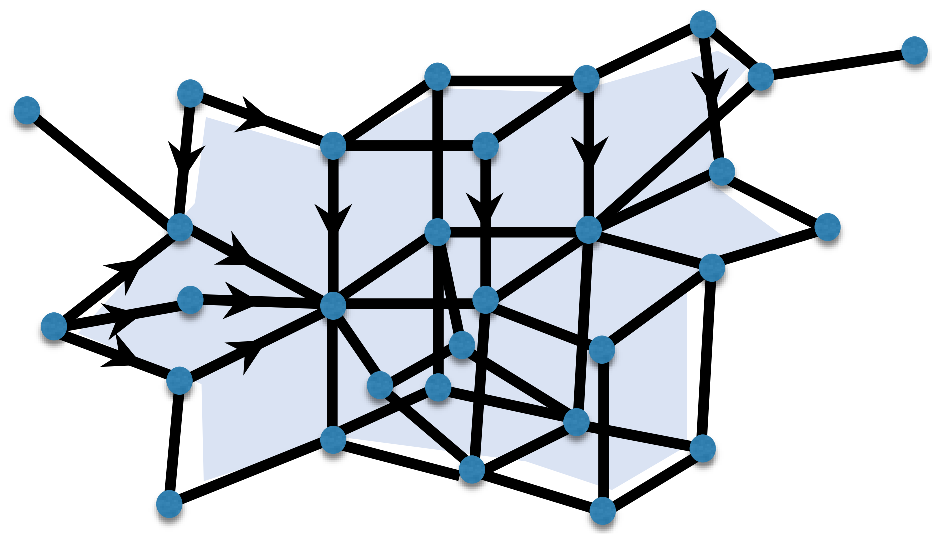
目標（離散構造による空間表現論）

- 離散構造 ⇔ CAT(0)空間 の対応関係の解明
- 計算機上で実現するためのコンパクト表現の開発

成果（B）

これまで現れた構造は「有向・向き付け可能モジュラグラフ」とよばれるもの

～モジュラ束の（適切な）貼り合わせ

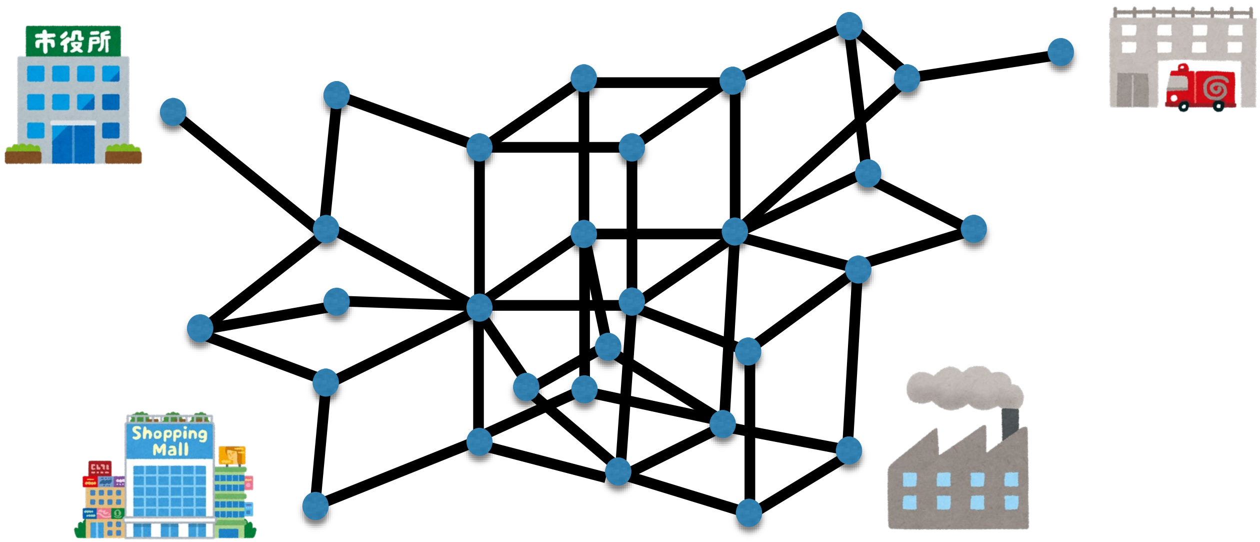


- 適切に「面」をつめると CAT(0) 空間になることを証明（先行研究の予想の証明）

A/C型ユークリッドビルディング，メディアングラフから CAT(0) 空間の構成の拡張

H. Hirai: A nonpositive curvature property of modular semilattices,
Geometriae Dedicata 214 (2021), 427--463

非正曲率空間への埋め込み $\overset{?}{\Leftrightarrow}$ 多項式時間可解性



先行研究：無向グラフ上の多重施設配置問題は

Hirai 2016:　向き付け可能モジュラグラフの上では P

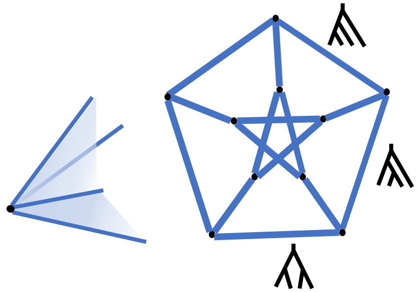
Karzanov 1998:　そうでなければ NP困難

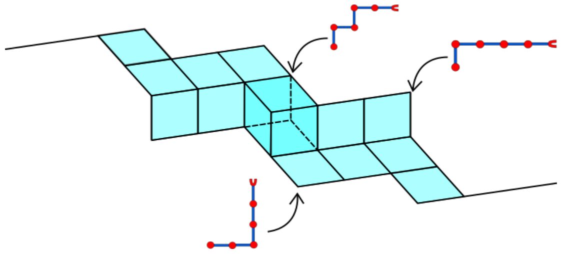
有向モジュラグラフ上の
L凸関数の理論 Hirai 2018

課題（E）数学・数理科学・情報科学諸分野への横断的活用

関連する分野の問題への応用展開を構想

系統樹空間（Billera, Holmes, Vogtmann 2001），ロボティクス（Abram, Ghrist 2004）,...





成果（E）

➢ 幾何学的群論への展開

J. Chalopin, V. Chepoi, H. Hirai, D. Osajda: Weakly modular graphs and nonpositive curvature, Memoir of AMS, 2020.

J. Chalopin, V. Chepoi, A. Genevois, H. Hirai, D. Osajda: Helly groups, arXiv, 2020.

➢ 共著者たちとの本の執筆プロジェクト（あまりすすまなかった）

成果（A）CAT(0) 空間上のアルゴリズムと最適化

～ 研究期間後半は連続最適化にチャレンジした

アダマール多様体上の凸最適化の有界性

$$\begin{array}{ll} \mathrm{Min.} & n \log \mathrm{tr} \sum_k X A_k Y A_k^T - \log \det X\, Y \\ \mathrm{s.t.} & X, Y: \text{正定値対称} \end{array} \quad > -\infty$$

$$\Updownarrow$$

$\sum_k A_k x_k$: nc-正則

無限遠境界錐上の凸最適化問題

アダマール空間（非多様体）

微分可能
連続最適化

と

離散最適化

をつなぐ
新しい視点

- アダマール空間上の凸最適化の有界性判定のための後退関数の理論や関連する凸解析理論（Legendre-Fenchel 変換など）を整備

H. Hirai: Convex analysis on Hadamard spaces and scaling problems, arXiv, 2022.

成果（A） CAT(0) 空間上のアルゴリズムと最適化

$\mathbb{R}^n$ 上の凸最適化においては,

多項式時間内点法・自己整合（障壁）関数の理論（Nesterov-Nemirovski 1994）

が多項式時間解法のための強力な（理論的）ツール

問題意識：これを多様体上に拡張できるか？

Bürgisser et al. 2019, Franks, Reidenbach 2021 など

- やってみた. 「形式的には」拡張できた.

例：双曲空間（曲率 $-\kappa$）において $x \mapsto \frac{1}{2}d(x,p)^2$ は $\frac{\sqrt{\kappa}}{2}$-self-concordant

→ minimum enclosing ball problemへの応用

しかし「有用な」自己整合（障壁）関数の存在は不明

～ 今後の展開のたたき台として期待

H. Hirai: On a manifold formulation of self-concordant functions, arXiv 2022.

まとめ

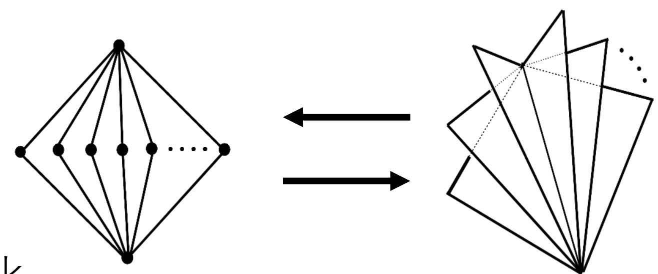
新しい凸性に基づくアルゴリズムと最適化理論

～ 非正曲率空間の凸性に基づいた

新しい連続・離散最適化理論，および，計算複雑度・アルゴリズム論 への挑戦

C: 離散凸解析*beyond* $\mathbb{Z}^n$

A: CAT(0)空間上の
アルゴリズムと最適化



D:代数的
組合せ最適化

B: 離散構造による空間表現論

E: 関連する数学・数理科学・情報科学への横断的活用

- 各課題 A,B,C,D,E で着実な前進
- 研究構想・方向性の正しさを確信
- １つの学問潮流に育てていきたい

おわり