多品種フロー理論：
フロー・メトリック双対性の最近の進展

Multiflow Theory:
Recent Developments of Flow-Metric Duality

平井　広志
Hiroshi Hirai

東京大学大学院情報理工学系研究科
〒113-8656　東京都文京区本郷 7-3-1
Graduate School of Information Science and Technology,
The University of Tokyo, Tokyo, 113-8656, Japan.

hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

概要

本稿では，最大フロー最小カット定理の多品種フローへの拡張の試み，その数理，そして，最近の進展を紹介する．

Keywords: ネットワークフロー，多品種フロー，最大最小定理，メトリック，多項式時間アルゴリズム，タイトスパン

1　はじめに

$G = (V, E)$ を無向グラフとして，$c : E \to \mathbf{Z}_+$ を非負整数枝容量とする．s, t を頂点対として，(s, t)-フロー $f = (\mathcal{P}, \lambda)$ とは，(s, t) パスの集合 $\mathcal{P}$ とその上の非負流量値関数 $\lambda : \mathcal{P} \to \mathbf{R}_+$ であって，容量条件

$$f(e) := \sum \{\lambda(P) \mid e \in P\} \leq c(e) \quad (e \in E)$$

を満たすものとする (パス形式のフロー)．λ が整数値のとき，整数フローという．一般に $k\lambda$ が整数値のとき，$1/k$-整数フローといって，特に $k = 2$ のときは半整数フローという．総流量 $|f|$ を $\sum_{P \in \mathcal{P}} \lambda(P)$ で定義する．頂点集合 X に対し，δX は X と $V \setminus X$ を結ぶ枝からなる集合を表し，$c(\delta X) = \sum_{e \in \delta X} c(e)$ は，その容量である．

最大流問題とは，総流量を最大化するフローを求める問題である．基本定理として Ford-Fulkerson の最大フロー最小カット定理がある：

定理 1.1 (Ford-Fulkerson の最大フロー最小カット定理 [9])**.** 以下が成り立つ：

$$\max_{(s,t)\text{-フロー } f} |f| = \min_{s \in X \subseteq V \setminus t} c(\delta X).$$

ここで，最大を達成する整数フローが存在する．

本稿は，この定理の「多品種フローへの拡張」に関するものである．まずは，多品種フローの定義から始め，いくつかの基本的な定理を紹介する．上と同じく $G = (V, E)$ を無向グラフとして，枝容量 $c : E \to \mathbf{Z}_+$ を持っている．さらに，ターミナルと呼ばれる頂点部分集合 $S \subseteq V$ が与えられている．三つ組 (G, c, S) をネットワークと呼ぶことにする．多品種フロー $f = \{f_{st}\}$ とは，(s, t)-フロー f_{st} の集まりで，容量条件

$$\sum_{st} f_{st}(e) \leq c(e) \quad (e \in E)$$

満たすものと定義する．なお st は S のすべてのペアにわたるものとする．単にフローと呼ぶこともある．S 上のペアの集合 H が与えられていて，次の最大多品種フロー問題を考える：

$$\text{Max.} \sum_{st \in H} |f_{st}| \;\; \text{s.t.} \;\; \text{フロー } f = \{f_{st}\}.$$

つまり，H で指定されたフローたちの総流量を最大化する問題である．H を S 上のグラフと同一視して品種グラフ (commodity graph) と呼ぶ．特に H が一本の枝 st からなるときは，最大フロー問題である．次に簡単な場合は，２品種，つまり，$S = \{s, t, s', t'\}, H = \{st, s't'\}$ の場合である．63 年に Hu は最大フロー最小カット定理の類似が成立することを示した：

定理 1.2 (Hu の最大２品種フロー最小カット定理 [25])**.** 以下が成り立つ：

$$\max_f |f_{st}| + |f_{s't'}| = \min_X c(\delta X)$$

ここで min は $\{s, s'\} \subseteq X \subseteq V \setminus \{t, t'\}$，または，$\{s, t'\} \subseteq X \subseteq V \setminus \{t, s'\}$ を満たす X にわたってとる．また，最大を達成する半整数フローが存在する．

一般に最大を達成する整数フローは存在しない．また，3 品種では，類似の定理は知られていない．$H = \binom{S}{2}$ の場合，つまり，すべてのペアを持つ場合を考えてみよう．この場合は，何でもよいから S の異なる点を結ぶフローを流せという問題である．自由多品種フロー (free multiflow) などとも呼ばれる．70 年代後半に Lovász と Cherkassky は独立に，最大最小定理と半整数性を示した：

定理 1.3 (Lovász [42], Cherkassky [5])**.** 以下が成り立つ：

$$\max_f \sum_{st \in \binom{S}{2}} |f_{st}| = \frac{1}{2} \sum_{t \in S} \min\{c(\delta X) : t \in X \subseteq V \setminus (S \setminus t)\}.$$

ここで最大を達成する半整数フローが存在する．

右辺は，ターミナル t とそれ以外のターミナル $S \setminus t$ を分ける最小カットの容量をすべてのターミナルで和をとって半分にしている．この２つの定理の共通の拡張が Karzanov-Lomonosov [28, 37, 41] によって得られている．H が安定２部 (anticlique-bipartite) であるとは，H の極大安定集合のなす交差グラフ (intersection graph) が２部グラフであるときをいう．また，H に関する半マルチカットとは互いに交わらない頂点部分集合族 $\mathcal{X}$ であって H の任意の枝の端点が異なる部分に属するものをいう．

定理 1.4 (Karzanov-Lomonosov [37]). H が安定２部のとき以下が成り立つ：

$$\max_f \sum_{st\in H} |f_{st}| = \frac{1}{2}\min_{\mathcal{X}} \sum_{X\in\mathcal{X}} c(\delta X).$$

ここで min はすべての半マルチカット $\mathcal{X}$ にわたってとる．また，最大を達成する半整数フローが存在する．

この定理の証明は上の２つの定理に比べかなり難しく，マトロイド交差を用いた証明 [11] もあるが簡単ではない．類似の定理はまだあるがこのへんにしておく．

最近になって，これらの定理を統一的に理解する枠組みが出来つつある [15, 16, 17, 19, 20]．本稿の目的は，この理論を紹介することである．これは，70 年代には知られていた「フローとメトリックの双対性」 [27, 46] に，超凸性 [1] やタイトスパン [7, 26] といった距離空間の概念を応用したものである．このアプローチは，98 年の Karzanov の論文 [34, 35] がその始まりである．

２章で，フロー・メトリック双対性と超凸空間への埋め込みに基づく組合せ的最大最小定理に対する統一的枠組みを紹介する．３章でフローの $1/k$-整数性とフラクショナリティに関する話題，４章で関連する話題を述べる．

一般に，多品種フロー問題は多項式サイズ (かなり大きいが) の LP 表現を持つので多項式時間 LP ソルバ (内点法 or 楕円体法) によって多項式時間で解くことが可能である．実用的な方法として列生成法を用いる単体法がある [10]．ただ，Ford-Fulkerson の増加道アルゴリズムのようにフローのルーティングを繰り返し，最適性の証拠が得られ終了，というタイプの組合せ的多項式時間アルゴリズムは極めて特殊なクラス (自由多品種フロー，２品種フローぐらい) にしか知られておらず，そのようなアルゴリズムの設計は永年の課題である (と思う)．また，多品種フロー問題は，それ自身，整数多品種フロー・辺素パス問題の LP 緩和であるが，LP 双対もマルチカット問題の自然な緩和 LP である．そして，多くの近似アルゴリズムがその LP 緩和を基に設計されている [52]．本稿で述べる理論がそうした方面にも発展をもたらすことを期待したい．

2　フロー・メトリック双対性と超凸距離空間への埋め込み

ここでは，古典的フロー・メトリック双対性とその精密化について述べる．ここでメトリックとは，集合 X に対する関数 $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ であって，任意の $x, y, z \in X$ に対して $d(x, y) = d(y, x) \geq d(x, x) = 0$ と三角不等式 $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$ を満たすものをいう．特に (X, d) を距離空間という．後々のため，少し用語を準備しておく．グラフ G の頂点集合 V 上にメトリック d にあるとき，枝 $e = xy \in E$ に対して，$d(e) := d(x, y)$ と定義することで d を枝長とみなすことがある．本稿では，ある距離空間 (X, d) に対し，グラフ G の頂点 V から X への写像 $\rho : V \to X$ によって，V 上のメトリックが $d(\rho(x), \rho(y))$ で誘導される状況がよく現れる．このメトリックを $d \circ \rho$ とかく．２つの集合 $A, B \subseteq X$ の距離 $d(A, B)$ を最短距離 $\inf_{x\in A, y\in B} d(x, y)$ と定義する．集合 $R \subseteq X$ と非負実数 r に対し $B(R, r)$ を $d(y, R) \leq r$ となる点 $y \in X$ の集合とする．特に一点 x に対し $B(x, r)$ は，中心 x，半径 r の球である．これを距離球という．

いま，品種グラフのかわりにターミナルの各ペア上に非負整数重み $\mu : \binom{S}{2} \to \mathbf{Z}_+$ が与えられていて，$\mu(s,t)$ は単位 (s,t) フローに対する価値を表すものとする．そこで次の μ-重み最大多品種フロー問題を考えよう．

$$\mu\text{-MFP:} \qquad \text{Max.} \sum_{st} \mu(s,t)|f_{st}| \ \text{ s.t. } \ \text{フロー } f = \{f_{st}\}.$$

特に，μ が $0,1$ 値のときは，品種グラフと同一視できる．μ-MFP は LP である．そこで双対 LP 問題を考えてみよう．すると次を得る：

$$\begin{array}{lll} \text{LP-Dual:} & \text{Min.} & \displaystyle\sum_{e \in E} c(e)l(e) \\ & \text{s.t.} & \displaystyle\sum_{e \in P} l(e) \geq \mu(s,t) \quad (\forall (s,t) \text{ パス } P, \forall st \in \tbinom{S}{2}), \\ & & l : E \to \mathbf{R}_+. \end{array}$$

c は非負なので，l を $d_{G,l}$(l を枝長とした G のグラフメトリック) に置き換えても，$l(xy) \geq d_{G,l}(x,y)$ であり，目的関数は非増加で，許容性も満たされてる．逆に V 上のメトリック d で $d(s,t) \geq \mu(s,t) (s,t \in S)$ を満たすものを枝長とみたとき，P に沿って三角不等式を使うと許容解であることがわかる．従って，μ-MFP の最適値は次の問題 M-Dual の最適値に等しい：

$$\begin{array}{lll} \text{M-Dual:} & \text{Min.} & \displaystyle\sum_{xy \in E} c(xy)d(x,y) \\ & \text{s.t.} & d \text{ は } V \text{ 上のメトリック}, \\ & & d(s,t) \geq \mu(s,t) \quad (s,t \in S). \end{array}$$

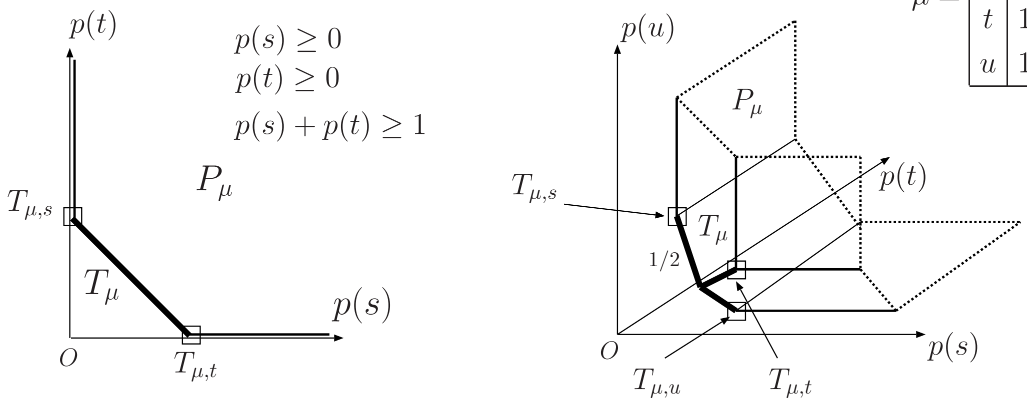
このように多品種フロー問題の双対として，メトリックの最適化問題が現れる．この事実は 70 年代初頭に Onaga-Kakusho [46] と Iri [27] によって指摘された基本的事実である．しかし，例えば $\mu(s,t) = 1 (s,t \in S)$ としたとき，自由多品種フロー問題であるが，このとき，M-Dual と Lovász-Cherkassky の公式の右辺はどのような関係にあるのか？もちろん最適値は一致するが，見た目は大分異なる．このギャップを埋めるのが次節に述べる T-双対である．それによって「組合せ的最大最小定理を生み出すメカニズム」が幾何学的に捉えられることがわかってきた．

2.1 T-双対

いきなり天下りになるが次の $\mathbf{R}^S$ の多面体的集合を定義する：

$$\begin{array}{rcl} P_\mu & := & \{p \in \mathbf{R}^S_+ \mid p(s) + p(t) \geq \mu(s,t) \ (s,t \in S)\}, \\ T_\mu & := & P_\mu \text{ の極小な点からなる集合}. \end{array}$$

ここで P_μ の点 p が極小であるとは，P_μ の p とは異なる点 q によって $q \leq p$ とはならない点のことである．T_μ はタイトスパン (tight span) と呼ばれ，64 年に Isbell [26]，84 年に Dress [7] によって独立に導入された．彼らは距離空間の研究から導入したので，μ はメトリックであるとしていた．メトリックとは限らない一般の重み μ に対して T_μ を考察したのは Hirai [14]



	s	t	u
s	0	1	1
t	1	0	1
u	1	1	0

図 1: タイトスパンの例

である．図 1 に $|S| = 2$ と $|S| = 3$ の例を示す．タイトスパン T_μ は有界な凸多面体の和集合で，その次元 $\dim T_\mu$ をその多面体の次元のなかで最大なものと定義する．

$\mathbf{R}^S$ の l_∞ メトリック d_∞ は，

$$d_\infty(p,q) = \max_{s \in S} |p(s) - q(s)| \quad (p, q \in \mathbf{R}^S)$$

であるが，これによって P_μ, T_μ 上にメトリックが与えられ距離空間となる．さらにターミナル $s \in S$ に対して，P_μ, T_μ の部分集合 $P_{\mu,s}, T_{\mu,s}$ を

$$\begin{aligned} P_{\mu,s} &:= P_\mu \cap \{p \in \mathbf{R}^S_+ \mid p(s) = 0\}, \\ T_{\mu,s} &:= T_\mu \cap \{p \in \mathbf{R}^S_+ \mid p(s) = 0\}. \end{aligned}$$

そして，次の問題を考える：

$$\begin{aligned} P\text{-Dual:} \qquad \text{Min.} \quad & \sum_{xy \in E} c(xy) d_\infty(\rho(x), \rho(y)) \\ \text{s.t.} \quad & \rho : V \to P_\mu,\ \rho(s) \in P_{\mu,s}\ (s \in S). \end{aligned}$$

つまり，各頂点 x に P_μ の点 $\rho(x)$ を割り当て，目的関数は l_∞ メトリック $d_\infty \circ \rho$ と容量 c の積である．

補題 2.1 (Hirai [15])**.** M-Dual と P-Dual の最適値は等しい．

証明は難しくない．M-Dual の許容解 d に対して，ρ を $(\rho(x))(s) := d(x,s)$ で定義すると，三角不等式 $d(x,s) + d(x,t) \geq d(s,t) (\geq \mu(s,t))$ より，P-Dual の許容解となり，しかも三角不等式より $d_\infty(\rho(x), \rho(y)) = \max_{s \in S} |d(x,s) - d(y,s)| \leq d(x,y)$ なので目的関数値は非増加．逆に P-Dual の許容解 ρ に対し V 上のメトリック d を $d := d_\infty \circ \rho$ と定義すると M-Dual の許容解となり目的関数値は不変．そして次の補題が重要である．

補題 2.2 (Dress の補題 [7])**.** 写像 $\varphi : P_\mu \to T_\mu$ であって以下を満たすものが存在する：

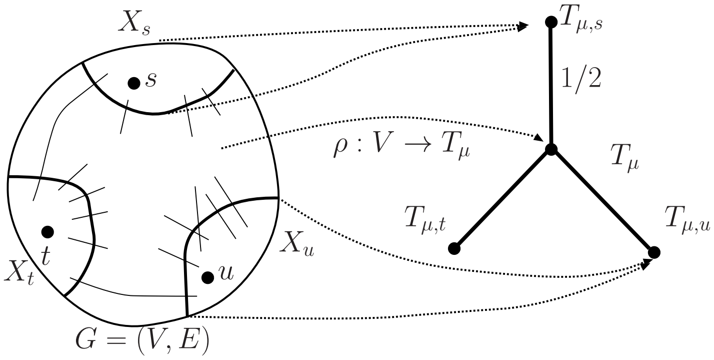


図 2: Lovász-Cherkassky の公式

(1) $\varphi(p) \leq p \ (p \in P_\mu)$.

(2) $d_\infty(\varphi(p), \varphi(q)) \leq d_\infty(p, q) \ (p, q \in P_\mu)$.

証明は難しくないがここでは省略する ([17] を見られたい)．特に P-Dual の許容解 ρ に φ を作用させた $\varphi \circ \rho$ は (1) より許容解であって (2) より目的関数値は増加しない．従って P-Dual において P_μ を T_μ に，$P_{\mu,s}$ を $T_{\mu,s}$ に置き換えることが出来る．

定理 2.3 (Hirai [15])**.** μ-MFP の最適値は次の問題の最適値に等しい：

$$
\begin{array}{lll}
T\text{-Dual:} & \text{Min.} & \displaystyle\sum_{xy \in E} c(xy) d_\infty(\rho(x), \rho(y)) \\
 & \text{s.t.} & \rho : V \to T_\mu, \ \rho(s) \in T_{\mu,s} \ (s \in S).
\end{array}
$$

これが我々が求める M-Dual の精密化であり，T-双対 (T-Dual) と呼ぶことにする．例を挙げる．$S = \{s, t\}, \mu(s, t) = 1$ は最大フロー問題に対応しているがタイトスパンは $\mathbf{R}$ の $[0, 1]$ 区間に距離空間として等長である (図 1 左)．そして $T_{\mu,s}, T_{\mu,t}$ は両端点である．従って

$$
\text{Min.} \sum_{xy \in E} c(xy) |\rho(x) - \rho(y)| \ \ \text{s.t.} \ \ \rho : V \to [0, 1], \ (\rho(s), \rho(t)) = (0, 1)
$$

を得る．これは最大フロー問題の枝形式の LP の LP 双対である．このとき，最適解 ρ として，0 か 1 の値をとるものが常に存在する．そして逆像 $\rho^{-1}(0) \subseteq V$ が最小カットを与える．

次に 3 ターミナルの自由多品種フローを考えよう：$S = \{s, t, u\}, \mu(s, t) = \mu(t, u) = \mu(u, s) = 1$ である．この場合タイトスパンは長さ 1/2 の 3 本の枝からなる星である (図 1 右)．そして，$T_{\mu,s}, T_{\mu,t}, T_{\mu,u}$ は葉である．このときも最適解 ρ として，星の中心か葉を値としてとるものが常に存在する (図 2)．このとき $T_{\mu,s}$ に対応する葉の逆像は s と $\{t, u\}$ を分ける最小カットとなる．t, u も同様．従って，枝の長さが 1/2 を考慮すると目的関数値は Lovász-Cherkassky の公式の左辺に一致することがわかる．$|S| > 3$ のときもタイトスパンは $|S|$ 個の長さ 1/2 の枝を持つ星になって議論は同様である．

次は 2 品種フローを考える．$S = \{s, t, s', t'\}$, $\mu(s, t) = \mu(s', t') = 1$, 残りはゼロとする．今度は P_μ は 4 次元空間に埋め込まれていて絵は描けない．しかし極小点集合であるタイトスパン T_μ そのものは l_∞-平面の単位正方形に等長である．$T_{\mu,s}$ は図 3 のように辺に対応している．さて，ここで「l_∞-平面と l_1-平面は等長である」と基本事実を思い出す．45 度回転さ

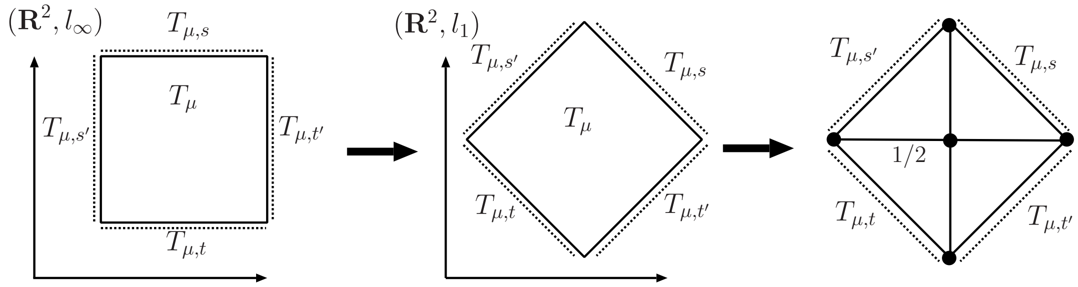


図 3: Hu の公式

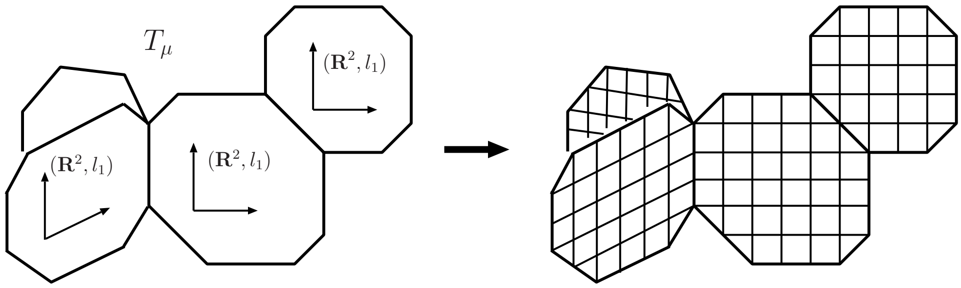


図 4: タイトスパンの分割

せて l_1-平面で考えてみる．そして図 3 のように l_1 の座標に平行な十字で 4 つの三角形に分割する．これによって中心とカドの 5 つの頂点が決まる．実は，最適解 ρ であって，この頂点を値に持つものが取れる．さらに，ρ の像がこの四角形のカドの対角のペアのどちらかになっているものがとれることがわかる．そして，その逆像が決めるカット (2 分割) が Hu の公式の右辺の最小を与える．

このようにタイトスパンを計算することで最大最小定理を導ける．上の 3 つの例では，タイトスパン内に有限個の点があって最適解 ρ として像がそれに含まれるという性質があった．しかも，この点集合は G, c には依存せず決まり，ρ の逆像としてグラフ G の頂点分割が決まり，組合せ的最大最小定理の公式を導く．このような有限点集合はいつでもとれるわけではなく．タイトスパンが距離空間として「良い」分解性を持つときに限られる．それは局所的に l_1 空間になるということである．タイトスパンには l_∞ 距離が与えられているが，もしも各面が 2 次元 (以下) の多角形なら，そこでは l_∞ 平面の多角形と等長であり，結局，l_1 平面の多角形と等長である．そして，図 4 のように各面を局所 l_1 座標に平行なグリッド状に分割することで所望の点集合を得る．

定理 2.4 (Karzanov [35], Hirai [15])． (1) $\dim T_\mu \leq 2$ なら，ある有限集合 $Z \subseteq T_\mu$ が存在して，S をターミナルとして持つ任意のネットワーク (G, c, S) に対して，T-Dual の最適解 ρ として $\rho(V) \subseteq Z$ となるものが存在する．

(2) $\dim T_\mu \geq 3$ なら，そのような有限集合は存在しない．

(2) は，$\dim T_\mu \geq 3$ なら一般のグラフに対しては「組合せ的最大最小定理は存在しない」と言っているのである (3 節も参照)．

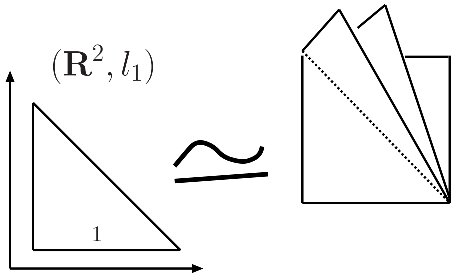


図 5: フォルダー

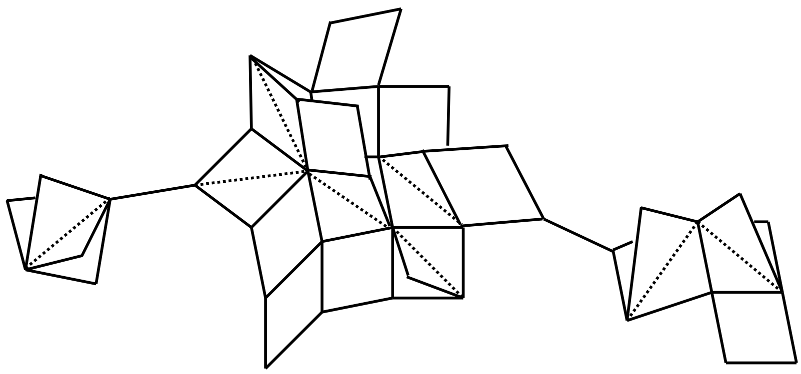


図 6: フォルダー複体

2.2 フォルダー複体

前節の定理 2.4 によって，組合せ的最大最小定理の公式の有無・導出に対する一般的方法が得られた．しかし，タイトスパンの計算・細分が必要であることや座標系に依存していることなど，取り扱いにくい面がある．そこで 2 次元タイトスパンの T-双対を組合せ的に扱える枠組みを導入しよう．そのためいくつか定義をする．

フォルダー (folder) とは，図 5 のようにいくつかの直角 2 等辺三角形を長い辺に沿って張り合わせて出来る図形で，各三角形に，短い辺が座標に平行で長さ 1 を持つように，l_1 距離を与えたものである．するとフォルダー内のパスに長さが定義できる．2 点間の距離をパスの最短長として定義することでフォルダーは距離空間となる．三角形が m 個からなるものを $K_{2,m}$ フォルダーと呼ぼう．「枠」のグラフが $K_{2,m}$ だからである．単位正方形もフォルダー，特に，正方フォルダーということにしよう．距離空間として正方形フォルダーと $K_{2,2}$ フォルダーは等長であるが技術的理由から区別する．

次にフォルダーと長さ 1 の辺を張り合わせて出来るセル複体 K を考えよう．各セルは，正方フォルダー，フォルダーを構成する三角形，あとは辺，頂点とする．距離 d_K はパスの最短長として定義する．K がフォルダー複体 (folder complex) であるとは，単連結であって，どんな 3 つのフォルダーも 1 点のまわりに立方体のカド (図 7(a)) のように張り合わさってないときをいう．フォルダー複体の定義は Chepoi [4] によるが，Karzanov が [34] で行ったセル複体の構成法 (4.5 節を参照) に動機付けられている (と思われる)．

正規領域 (normal region) とはフォルダー複体の連結部分複体 R であって相対的境界が三

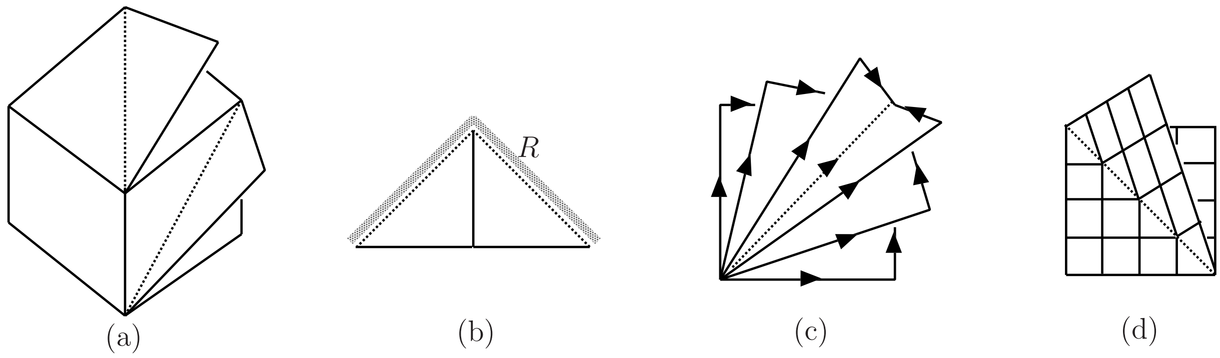


図 7: (a) 立方体のカド，(b) 局所非凸配置，(c) 向き付け，(d) 細分

角形の長い枝からなり，図 7(b) のような局所非凸配置を含まないときをいう．この概念は Hirai [19] による．

フォルダー複体が向き付け可能 (orientable) であるとは，辺 (1 次元面）の向き付けであって，各フォルダーに制限してみると図 7(c) のようにシンク，ソースがそれぞれちょうど 1 つずつで隣接しないものを持つときをいう．特に，フォルダーが三角形からなるときは長い辺がシンクとソースを結ぶ．

また各フォルダーを図 7(d) のように細かくすることで細分も自然に定義できる．2 細分は常に向き付け可能となる．

フォルダー複体 $\mathcal{K}$ の頂点集合を $V\mathcal{K}$ とかく．$V\mathcal{K}$ と短い辺からなるグラフを $\mathit{\Gamma}$ とかく．このとき，頂点間の距離は $\mathit{\Gamma}$ のグラフ的距離に一致する．

さて前置きが長くなったが，$\mu : \binom{S}{2} \to \mathbf{Z}_+$ をターミナル重みとして，μ のフォルダー複体表現とは，フォルダー複体 $\mathcal{K}$，正規領域の族 $\{R_s\}_{s\in S}$，正整数 κ の三つ組 $(\mathcal{K}, \{R_s\}_{s\in S}; \kappa)$ であって

$$\mu(s,t) = \frac{1}{\kappa} d_{\mathcal{K}}(R_s, R_t) \quad (s,t \in S)$$

を満たすものとする．つまり，κ でスケーリングすると μ があるフォルダー複体の正規領域間の最短距離として表現されているということである．そして次が，最も一般的な組合せ最大最小定理である：

定理 2.5 (Karzanov [34], Hirai [19]). μ が向き付け可能なフォルダー複体表現 $(\mathcal{K}, \{R_s\}_{s\in S}; \kappa)$ を持つとする．このとき，任意のネットワーク (G, c, S) に対して，μ-MFP の最適値は次の問題の最適値に等しい：

$$\begin{array}{lll} \text{F-Dual:} & \text{Min.} & \displaystyle\frac{1}{\kappa}\sum_{xy\in E} c(xy) d_{\mathcal{K}}(\rho(x), \rho(y)) \\ & \text{s.t.} & \rho : V \to V\mathcal{K},\ \rho(s) \in R_s\ (s \in S). \end{array}$$

証明の概略を述べる．鍵となるのは「ヘリー性」という一見無関係そうな性質である．集合族 $\mathcal{B}$ がヘリー性 (Helly property) を持つとは，もしも $\mathcal{B}$ 内の集合の任意のペアが交わりが空でないとき，$\mathcal{B}$ 内すべての集合の交わりが空でない，という性質を持つときをいう．

補題 2.6 (Hirai [19]). 正規領域の族はヘリー性を持つ．

この性質を使うと次の補題がいえる．

補題 2.7 (Hirai [19])**.** $(\mathcal{K}, \{R_s\}_{s\in S}; 1)$ を μ のフォルダー複体表現とする．このとき，M-Dual の許容解 d に対して，ある写像 $\rho : V \to \mathcal{K}$ であって，$d_{\mathcal{K}} \circ \rho \leq d$ と $\rho(s) \in R_s$ $(s \in S)$ を満たすものが存在する．

一方，逆に $\rho : V \to \mathcal{K}$ であって，$\rho(s) \in R_s$ $(s \in S)$ を満たすものに対し，$d := d_{\mathcal{K}} \circ \rho$ をおくと, $d(s,t) = d_{\mathcal{K}}(\rho(s), \rho(t)) \geq d_{\mathcal{K}}(R_s, R_t) = \mu(s,t)$ となり，M-Dual の許容解を得る．従って，M-Dual の最適値は次の問題の最適値に等しい：

$$\begin{array}{lll} \overline{\text{F}}\text{-Dual:} & \text{Min.} & \displaystyle\frac{1}{\kappa}\sum_{xy\in E} c(xy) d_{\mathcal{K}}(\rho(x), \rho(y)) \\ & \text{s.t.} & \rho : V \to \mathcal{K},\ \rho(s) \in R_s\ (s \in S). \end{array}$$

これは，F-Dual の自然な連続緩和である．さらに，次の補題により，フォルダー複体上の任意の有限メトリックは，その頂点上の有限メトリックの族の凸結合でかける．これはフォルダー複体が局所的に l_1 空間だからであ：

補題 2.8 (Karzanov [34], Hirai [19])**.** X を有限集合，$\mathcal{K}$ を向き付け可能なフォルダー複体とする．写像 $\rho : X \to \mathcal{K}$ に対して，頂点への写像の族 $\rho_i : X \to V\mathcal{K}$ $(i \in I)$ が存在して，以下を満たす：

(1) 任意の $x \in X, i \in I$ について，$\rho_i(x)$ は，$\rho(x)$ の属するセルに属する．

(2) $d_{\mathcal{K}} \circ \rho$ は $d_{\mathcal{K}} \circ \rho_i$ の凸結合でかける．

つまり，$\rho : V \to \mathcal{K}$ が F-Dual の最適解なら $\rho_i : V \to V\mathcal{K}$ も最適解になり，従って，F-Dual と $\overline{\text{F}}$-Dual の最適値は等しい．

1 つ目の補題 2.7 の証明をスケッチする．いま M-Dual の許容解を d とする．d は有理数値をとるとしてよい．まず，$V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ と並べる．そして，$k = 1, 2, \ldots, n$ に対して $\rho(x_k)$ を以下の集合内の任意の点としてを ρ を帰納的に定義する：

$$\bigcap_{s\in S} B(R_s, d(s, x_k)) \cap \bigcap_{i=1}^{k-1} B(\rho(x_i), d(x_i, x_k)). \tag{2.1}$$

この定義が well-defined であること確かめねばならない．つまり, (2.1) が空でないことを，である．もしそうなら $\rho(s) \in B(R_s, d(s,s)) = R_s$ より許容性が，$\rho(x_k) \in B(\rho(x_i), d(x_i, x_k))$ より $d_{\mathcal{K}}(\rho(x_i), \rho(x_k)) \leq d(x_i, x_k)$ がわかる．(2.1) が空でないことが，帰納法とヘリー性と三角不等式により示される．有理性より，十分細かい細分を考えると $B(R_s, d(s, x_k)), B(\rho(x_i), d(x_i, x_k))$ 等は細分されたフォルダー複体において正規領域となる．従って，ヘリー性により，任意のペアの交わりが空でなければ，(2.1) は空でない．ここで $B(R, r)$ と $B(R', r')$ が交わることと $r + r' \geq d_{\mathcal{K}}(R, R')$ となることが同値であることに注意する．すると $B(\rho(x_i), d(x_i, x_k)) \cap B(\rho(x_j), d(x_j, x_k))$ の非空性は $d(x_i, x_k) + d(x_j, x_k) \geq d(x_i, x_j) \geq d_{\mathcal{K}}(\rho(x_i), \rho(x_j))$ から出る．最初の不等式は三角不等式で 2 つ目は帰納法の仮定である．残りも同様に出来る．

特に，タイトスパンは，2 次元のとき，フォルダー複体の構造を持つ．前節に述べたグリッド状の分割がそれにあたる．しかも $T_{\mu,s}$ は正規領域で $\mu(s,t) = d_\infty(T_{\mu,s}, T_{\mu,t})$ が成り立ち [14]，フォルダー複体表現を得る．従って，$\overline{\text{F}}$-Dual と T-Dual は等しい．逆にフォルダー複体表現の存在が，タイトスパンの 2 次元性を特徴づける：

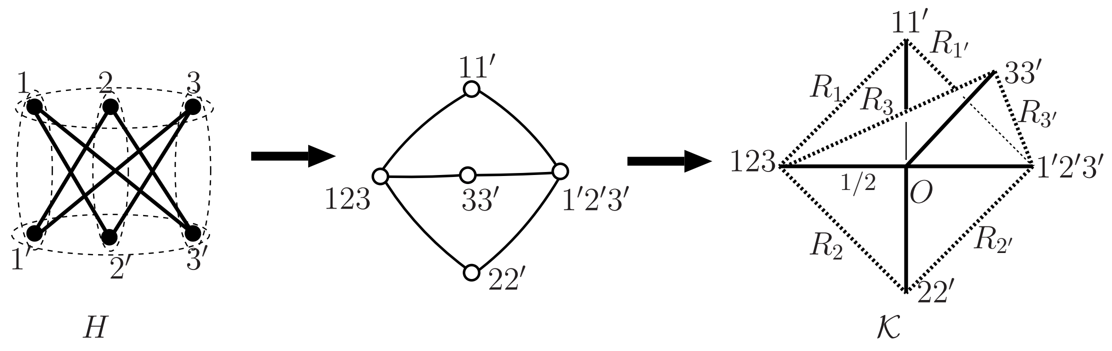


図 8: H から $\mathcal{K}$ の構成

定理 2.9 (Karzanov [35], Hirai [19]). 以下は同値である：

(1) $\dim T_\mu \leq 2$.

(2) μ はフォルダー複体表現を持つ.

Karzanov-Lomonosov の公式に，フォルダー複体からの解釈を与える．H を安定 2 部な品種グラフとする．$\mathcal{A}$ を H の極大安定集合の族とする．Ω を $\mathcal{A}$ の交差グラフとする Ω は 2 部グラフである．特にサイクルの長さは 3 より大きい．Ω からフォルダー複体を作る．まず，新しい点 O を追加し，Ω の各頂点から O に (短い) 枝を追加する．そして，$A, B \in \mathcal{A}$ で $A \cap B \neq \emptyset$（つまり $AB \in E(\Omega)$）となる任意のペアに対し，AB を長い枝，AO, BO を短い枝とする三角形 ($K_{1,2}$ フォルダー) を詰める．出来上がった複体を $\mathcal{K}$ としよう．図 8 に例を示す．すると，Ω のサイクルの長さは 3 より大きいので，O のまわりで立方体のカドを持ちえない．従って，$\mathcal{K}$ はフォルダー複体である．しかも Ω が 2 部グラフであることから $\mathcal{K}$ は向き付け可能であることがわかる．つぎに R_s を設定する．任意の $s \in S$ に対し，s を含む $\mathcal{A}$ の元は 1 つ，または，2 つである．1 つのとき，それを A とすると，R_s を A に対応する頂点とおく．2 つのとき，それを A, B とすると，R_s を AB に対応する長い辺とおく．すると R_s は正規領域で

$$d_{\mathcal{K}}(R_s, R_t) = \begin{cases} 2 & \text{if } st \in H, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases} \quad (s, t \in S).$$

従って，$\kappa = 2$ と設定すれば，$(\mathcal{K}, \{R_s\}_{s \in S}; 2)$ は H に対応する $0, 1$ 重みのフォルダー複体表現となる．F-Dual の許容解 $\rho : V \to V\mathcal{K}$ に対して，$\mathcal{A}$ に対応する頂点たちの逆像 $\mathcal{X}$ を考えるとそれは，半マルチカットであり，

$$\frac{1}{2} \sum_{xy \in E} c(xy) d_{\mathcal{K}}(\rho(x), \rho(y)) = \frac{1}{2} \sum_{X \in \mathcal{X}} c(\delta X)$$

となる．逆に半マルチカット $\mathcal{X}$ を考える．各部分 $X \in \mathcal{X}$ に対し，X がターミナル集合 $S' \subseteq S$ を含むとき，S' を含む H の極大安定集合 $A \in \mathcal{A}$ をとって，任意の X の元 x に対し $\rho(x)$ を A に対応する頂点と定義する．そして $\mathcal{X}$ の元に含まれない頂点 x に対しては，$\rho(x) := O$ と定義すると，F-Dual の許容解が得られ，上式を満たす．

2.3 超凸性 (hyperconvexity)

ここでは前節の議論の背景にある「超凸性」という距離空間のある種の凸性について紹介したい．この概念は Aronszajn-Panitchpakdi [1] により幾何学の分野で導入された．

距離空間 (X, d) が超凸 (hyperconvex) であるとは，任意の距離球の族 $\{B(x_i, r_i)\}_{i \in I}$ が $r_i + r_j \geq d(x_i, x_j)$ $(i, j \in I)$ を満たすとき $\bigcap_{i \in I} B(x_i, r_i) \neq \emptyset$ が成り立つときをいう．言い換えると次の条件を満たすことと同値である：

(1) (X, d) は測地的である (任意の 2 点 p, q が長さ $d(p, q)$ のパスで結べる).

(2) 距離球の族がヘリー性を持つ.

測地的距離空間においては，2 つの距離球 $B(x_i, r_i), B(x_j, r_j)$ が交わることと $r_i + r_j \geq d(x_i, x_j)$ が同値であることに注意されたい．超凸空間の例として，パスや木，l_∞ 空間，そして l_1 平面がある．部分木の族のヘリー性は良く知られている．l_∞ 空間は，パスの直積で距離球は超立方体 (座標軸に平行なパスの直積) であることから，超凸性がわかる．l_∞ 平面と l_1 平面は等長的でなので l_1 平面の超凸性がわかる．

距離空間 (X, μ) の拡張 (extension) とは，距離空間 (Y, d) であって $X \subseteq Y$，$d|_X = \mu$ をみたすものをいう．つまり (X, μ) を部分空間としてもつ距離空間である．距離空間 (X, μ) が絶対レトラクト (absolute retract) であるとは，任意の拡張 (Y, d) に対して，ある写像 $\varphi : Y \to X$ であって $\varphi(x) = x (x \in X)$ と $d(x, y) \geq \mu(\varphi(x), \varphi(y))$ $(x, y \in Y)$ を満たすものが存在するときをいう．

定理 2.10 (Aronszajn-Panitchpakdi [1]). 距離空間が超凸であることと絶対レトラクトであることは同値である．

実は，この定理の証明の大部分はすでに前節までにほとんど現れている．むしろ，前節の補題 2.7 の証明は [1] のこの定理の証明を基にしている．

タイトスパン T_μ との関係を述べる．μ が X 上のメトリックのとき，$T_{\mu,s}$ は一点になり，次式で定義される点 $\mu_s \in \mathbf{R}^S$ に等しい [14]：

$$\mu_s(t) = \mu(s, t) \quad (t \in S).$$

このベクトルの族 $\{\mu_s\}_{s \in S}$ は，μ を l_∞ メトリックとして表現する，つまり

$$\mu(s, t) = d_\infty(\mu_s, \mu_t) \quad (s, t \in S)$$

が成り立つ．従って $S \ni s \mapsto \mu_s \in \mathbf{R}^S$ により，(超凸空間である)l_∞ 空間に埋め込まれる．これを Frechet 埋め込みや Kuratowski 写像という．特に (T_μ, d_∞) は，(X, μ) を部分空間として含むが，それは (X, μ) を含む最小の超凸空間である：

定理 2.11 (Isbell [26]). 距離空間 (X, μ) に対して，それを含む一意最小な超凸距離空間が存在する．それは (T_μ, d_∞) に等長である．

距離空間 (X, μ) に対して，その拡張 (Y, d) がタイト (tight) であるとは，d とは異なる Y 上のメトリック d' で $d' \leq d$ となるものが存在しないときをいう．この概念は Dress [7] によ

る．もしも (X,μ) が超凸距離空間 $(\mathcal{T},d_{\mathcal{T}})$ の部分空間であるとすると，(X,μ) の任意のタイトな拡張 (Y,d) は $(\mathcal{T},d_{\mathcal{T}})$ の X を含む部分空間である．つまり $X \subseteq Y \subseteq \mathcal{T}$ である．Frechet 埋め込み $s \mapsto \mu_s$ により，(T_μ, d_∞) は拡張であるが，実は，(T_μ, d_∞) 自体もタイトな拡張である：

定理 2.12 (Dress [7]). 距離空間 (X,μ) に対し，(T_μ, d_∞) はタイトな拡張であり，(X,μ) の任意のタイトな拡張は (T_μ, d_∞) の部分空間である．

これらの概念・定理の多品種フローにおける意義を述べる．今，ターミナル重み μ が三角不等式を満たすとしよう．すると (S,μ) は距離空間とみなせる．さらに M-Dual において不等式制約 $d(s,t) \geq \mu(s,t)$ は等式 $d(s,t) = \mu(s,t)$ に置き換えてよいことがわかる．すなわち (V,d) は (S,μ) の拡張である．従って，このとき M-Dual は次のようにも書ける：

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & \displaystyle\sum_{xy \in E} c(xy) d(x,y) \\ \text{s.t.} & (V,d) \text{ は } (S,\mu) \text{ の拡張.} \end{array}$$

つまり (S,μ) の拡張であって最小コストなものを求める問題である．c は非負でなので，最小コストな拡張として必ずタイトなものがとれる．もしもいま (S,μ) が超凸距離空間 $(\mathcal{T},d_{\mathcal{T}})$ に $\varphi: S \to \mathcal{T}$ で埋め込まれているなら，タイトな拡張は $(\mathcal{T},d_{\mathcal{T}})$ の部分空間となるので，上の問題は

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & \displaystyle\sum_{xy \in E} c(xy) d_{\mathcal{T}}(\rho(x),\rho(y)) \\ \text{s.t.} & \rho: V \to \mathcal{T},\ \rho|_S = \varphi \end{array}$$

となる．特に，$\mathcal{T}$ としてタイトスパン T_μ，φ として Frechet 埋め込みがとれる．前節までの議論は μ がメトリックでない場合にもこのような距離空間の埋め込み理論を適用できる形にしたものである．以下も補題 2.6 の特殊ケースであるが,

定理 2.13 (Karzanov [34], Chepoi [4]). フォルダー複体は超凸である．

組合せ的応用にとっては超凸性だけ不十分であり，前節でみたように分解可能性 (補題 2.8) が重要である．フォルダー複体とは，超凸性（l_∞ 的性質）と分解性（l_1 的性質）も両方を合わせ持った l_1 平面と木の共通な拡張といえるのではないだろうか．

3　フローの $1/k$-整数性：フラクショナリティ問題

今までの話では，最大最小定理の「公式」の導出に関わるもので，フローの (半) 整数性には触れなかった．ここではフローの離散性に関する結果について述べる．

ターミナル重み $\mu: \binom{S}{2} \to \mathbf{Z}_+$ に対し，フラクショナリティ(fractionality) を「S をターミナルとしてもつすべてのネットワーク (G,c,S) に対して μ-MFP が $1/k$-整数最適フローをもつ正整数 k の中で最小なもの」と定義し，$\mathrm{frac}(\mu)$ で表す．そのような正整数が存在しないときは，$\mathrm{frac}(\mu) = +\infty$ と定義する．特に μ が品種グラフ H に対応する $0,1$ 重みのときは $\mathrm{frac}(H)$ とかく．例えば H が 1 本の枝とき，つまり，$H = K_2$ のときは，最大フロー最小カッ

ト定理の整数性の部分より $\mathrm{frac}(K_2)=1$ となる．$H=K_2+K_2$，つまり，2 本の点素な枝のときは，Hu の定理 1.2 の半整数性の部分より $\mathrm{frac}(K_2+K_2)=2$ となる．$H=K_m(m\geq 3)$ のときは Lovász-Cherkassky の定理 1.3 より $\mathrm{frac}(K_m)=2$ となる．実は，3 品種フロー，$H=K_2+K_2+K_2$，つまり H が 3 本の点素な枝のときは，$\mathrm{frac}(K_2+K_2+K_2)=+\infty$ となることが知られている．

フラクショナリティ問題とは,「フラクショナリティが有限となる品種グラフ H を分類せよ」という問題である．フラクショナリティの定義とこの問題提起は Karzanov [29, 30] による．

フラクショナリティを決定するのは容易ではない．そこで，その下限を与える双対フラクショナリティ(dual fractionality) というもの定義しよう．双対フラクショナリティ $\mathrm{frac}^*(\mu)$ を「S をターミナルとしてもつすべてのネットワーク (G,c,S) に対して M-Dual が $1/k$-整数最適解をもつ正整数 k の中で最小なもの」と定義する．つまり，M-Dual のすべての極小な端点解が $1/k$-整数になるいう条件である．そのような k が存在しないときは $\mathrm{frac}^*(\mu)=+\infty$ と定義する．すると完全双対整数性の議論（M-Dual を主問題として考える）から

$$\mathrm{frac}(\mu)\geq \mathrm{frac}^*(\mu)$$

がわかる．特に，$\mathrm{frac}^*(\mu)=+\infty$ なら $\mathrm{frac}(\mu)=+\infty$ である．Karzanov [29] は，有限な双対フラクショナリティを持つ品種グラフ H を分類した．品種グラフ H が安定 3 交差であるとは，H の任意の極大安定集合の三つ組 A,B,C に対して，

$$A\cap B=B\cap C=C\cap A$$

が成り立つときをいう．

定理 3.1 (Karzanov [29]). (1) H が安定 3 交差なら，$\mathrm{frac}^*(H)\in\{1,2,4\}$.

(2) そうでないと，$\mathrm{frac}^*(H)=\mathrm{frac}(H)=+\infty$.

つまり，H が安定 3 交差であることがフラクショナリティの有限性の必要条件である．Karzanov は，これが十分条件で，しかも $\{1,2,4\}$ がタイトであろうと予想した：

予想 3.2 (Karzanov [30]). H が安定 3 交差なら，$\mathrm{frac}(H)<+\infty$．さらに $\mathrm{frac}(H)\in\{1,2,4\}$.

実は，双対フラクショナリティの有限性と組合せ的最大最小定理の存在は同値である．つまり μ がスケーリング因子 κ のフォルダー複体表現を持ったとすると F-Dual の最適解 ρ に対してメトリック $(d_K\circ\rho)/\kappa$ は，M-Dual の $1/\kappa$-整数最適解となり，双対フラクショナリティは κ 以下である．フォルダー複体表現の存在とタイトスパンの 2 次元性は等価であった (定理 2.9).

定理 3.3 (Karzanov [35], Hirai [15]). (1) $\dim T_\mu\leq 2$ なら，$\mathrm{frac}^*(\mu)\in\{1,2,4\}$.

(2) そうでないと，$\mathrm{frac}^*(\mu)=\mathrm{frac}(\mu)=+\infty$.

Karzanov [35] が，μ がメトリックのときモジュラー閉包 (modular closure) という手法で証明し，Hirai [15] が，μ が一般の場合に前節で述べたグリッド状分割の手法で証明した．特に，H が安定 3 交差であることと，対応する $0,1$ 重みのタイトスパンの次元が 2 以下であることは同値である．よって，Karzanov の予想は自然に一般化される：

予想 3.4 (Hirai [15])**.** $\dim T_\mu \le 2$ なら，$\mathrm{frac}(\mu) < +\infty$．さらに $\mathrm{frac}(\mu) \in \{1,2,4\}$.

この予想の有限性の部分は，Hirai [20] によって肯定的に証明された：

定理 3.5 (Hirai [20])**.** $\dim T_\mu \le 2$ なら，$\mathrm{frac}(\mu) \le 24$.

この証明の概略はさておき，フローの半整数性に限っては標準的な証明法がある．G が容量 c に関してオイラーグラフのとき ($\forall x,\ c(\delta x) \in 2\mathbf{Z}$) に，整数最適フローの存在を示すのである．すると，一般の容量のときは，$(G, 2c, S)$ を考えれば，整数最適フローが存在し，それを $1/2$ 倍することで (G, c, S) の半整数最適フローが得られる．オイラーグラフのときの整数性を示す手法として枝スプリッティング (splitting-off) がある．今，説明のために枝を多重化して，すべての枝容量が 1 であるとしよう．頂点 x とそれにつながる枝 e, e' に対して，e, e' を取り除きかわりに e, e' の x でないほうの端点を結ぶ新しい枝を追加する．この操作を枝スプリッティングという．オイラー性を保ち，枝数は 1 本減っている．重要な性質として「最適フロー値は増加しない」(減少するかもしれない) という性質がある．なぜなら，スプリット後のネットワークのフローに対し，新しい枝を流れるフローを e, e' に沿って流れるものと変更すれば元のネットワークのフローが得られるからである．そこで「最適フロー値が減少しない」スプリットを持つ頂点の存在を「何らかの方法」で証明できれば，枝数に関する帰納法により整数最適フローの存在がいえる．この「何らかの方法」が一番難しい．最適フロー値の公式 (最大最小定理の右辺) がカット関数でかける場合は，劣モジュラ性を駆使する証明がうまくゆくが，そうでない場合がほとんどである．

Hirai [20] では，頂点 x がスプリットを持つための強力な十分条件を得ている．今，重み μ が向き付け可能なフォルダー複体表現 $(\mathcal{K}, R_s; \kappa)$ を持つとして，F-Dual の最適解 ρ をとる．このとき，ターミナルでない頂点 x がフォルダー複体 $\mathcal{K}$ の「非特異」な点に ρ で写像されているならば，x が「最適フロー値が減少しない」スプリットをもつことが保障される．ここで非特異性の定義はしないが，$\mathcal{K}$ の組合せ構造によって特異・非特異性が決定する．従って，もしも $\mathcal{K}$ に特異点が無ければ，任意のオイラーグラフに対して整数最適フローの存在が保障される．さらに $\mathcal{K}$ に特異点があっても，ブローアップという操作をすることで，その特異性を解消できることがあり，結果として，フローの整数性定理が導かれる．今まで知られているオイラーグラフの下での整数性定理 (Karzanov-Lomonosov の定理など) は，この枠組みより証明される．

定理 3.5 の証明は，Hirai [18] で考案された分数的な枝スプリッティングと最適ポテンシャル ρ の更新を合わせた主双対アルゴリズムに基づいていて，最適ポテンシャル ρ の像がすべて非特異となるような状況を目指して (G, c, S) と ρ を「c の分母が定数で抑えられる」ように更新するのある．

枝スプリッティングは容量付きに自然に拡張できる．これを用いると整数フローを求める強多項式時間アルゴリズムが得られる (整数フローが存在するクラスにおいて)．最適フロー値の評価は M-Dual を解くことできる (あるいは F-Dual を解く)．最悪それは多項式時間 LP ソルバ (内点法 or 楕円体法) と Tardos の方法 [51] で強多項式時間でできる．つまり，ある点がスプリット出来るかどうかが強多項式時間で判定可能である．整数フローの存在が証明されていれば必ずどこかの頂点でスプリット出来る．スプリットの仕方は $O(|V|^3)$ である．多項式回スプリットを繰り返すと，最後は頂点はターミナルだけになり，自明なフローが最適となる．操作の逆を辿れば，元のネットワークの整数最適フローが求まる．

4 関連する話題

4.1 最小費用自由多品種フロー

(G,c,S) をネットワークとする．さらに枝にコスト $a : E \to \mathbf{Z}_+$ が与えられていて，フロー f に対して，費用 $\sum_{e \in E} a(e)f(e)$ がかかるものとしよう．ここで $f(e)$ は e 上の総流量である．Karzanov は，自由多品種フローの半整数性は最小費用版に拡張されることを示した．

定理 4.1 (Karzanov [32])**.** 最小費用の最大自由多品種フローで半整数なものが存在する．そして，それは多項式時間で求めることができる．

強多項式時間アルゴリズムは，多項式時間 LP ソルバ (内点法 or 楕円体法) と Tardos の方法 [51] をサブルーチンとして使う．スケーリングを用いるアウトオブキルタ法のような組合せ的弱多項式時間アルゴリズムが Goldberg-Karzanov [12] にあるが，その記述と正当性の証明は難解であり，簡略化があっても良いと思う．

4.2 点容量型多品種フローと領域型施設配置問題

今，枝容量のかわりに点容量 $b : V \setminus S \to \mathbf{Z}_+$ が与えられた点容量ネットワーク (G,b,S) を考える．(G,b,S) の多品種フロー f とは，枝容量条件のかわりに (ターミナルを除く頂点に対し) 点容量条件

$$f(x) \leq b(x) \quad (x \in V \setminus S)$$

が満たすものとする．ここで $f(x)$ を点 x を通るフローの総流量である．ターミナル間を結ぶ枝は無いものとしよう．Lovász-Cherkassky の定理は点容量版へと拡張される．双対側の半整数性は Vazirani [52]，フローの半整数性は Pap [48, 49] によるものである：

定理 4.2 (Vazirani [52], Pap [48, 49])**.** (G,b,S) を点容量ネットワークとし，$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ とすると以下が成り立つ：

$$\max_f \sum_{st} |f_{st}| = \min \ b(U_0) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{k} b(\mathrm{Bd}\, U_j).$$

ここで min は，互いに交わらない部分集合族 $\{U_0, U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ であって，$\{s_i$ と s_i の隣接頂点$\} \subseteq U_i$ $(1 \leq i \leq k)$ となるものにわたってとる．また，$\mathrm{Bd}\, U_j$ は $U_0 \cup U_j$ 以外の点と枝でつながっている U_j の部分集合である．さらに最大を達成する半整数フローが存在する．

最大最小定理と半整数性はあとに述べる Mader の定理からも導出できるが，半整数最大フローを求める強多項式時間アルゴリズムは現在のところ，多項式時間 LP ソルバ (楕円体法 or 内点法)+ Tardos の方法に頼らざるをえない．組合せ的弱多項式時間アルゴリズムが Babenko-Karzanov [2] にあるが簡単ではない．

T-双対理論からの解釈は，Hirai [21] で与えられた．重み付きに一般化して考える．ターミナル重み μ の木表現とは，木 Γ，その部分木 (を誘導する頂点) の族 $\{R_s\}_{s \in S}$，正整数 κ の三つ組 $(\Gamma, \{R_s\}_{s \in S}; \kappa)$ であって，

$$\mu(s,t) = \frac{1}{\kappa} d_\Gamma(R_s, R_t) \quad (s,t \in S)$$

を満たすものとする．木 Γ に対して，部分木 (を誘導する頂点) の集合 $\mathcal{F}\Gamma \subseteq 2^{V\Gamma}$ とかく．部分木 F に対して直径を $\operatorname{diam} F$ でかく．

定理 4.3 (Hirai [21])**.** ターミナル重み μ が木表現 $(\Gamma, \{R_s\}_{s \in S}; \kappa)$ を持つとする．このとき以下が成り立つ．

$$\max_f \sum_{st} \mu(s,t)|f_{st}| = \frac{1}{\kappa} \min \sum_{x \in V \setminus S} b(x) \operatorname{diam} F(x).$$

ここで min は，部分木値をとる写像 $F : V \to \mathcal{F}\Gamma$ であって

$$\begin{aligned} &F(x) \cap F(y) \neq \emptyset \quad (xy \in E), \\ &F(s) \text{ は } R_s \text{ 内の 1 点} \quad (s \in S) \end{aligned}$$

を満たすものにわたってとる．また，最大を達成する半整数フローが存在する．

つまり双対側は「点」でなく「領域」を配置する問題になるのである．自由多品種フロー問題に対応する重みは $\mu(s,t) = 1 (s,t \in S)$ である．これは $|S|$ 個の枝を持つ星 Γ と $\kappa = 2$ によって表現される．R_s は葉をとる．すると木表現が得られ定理 4.2 を導く．

タイトスパン T_μ の次元が 1 のとき，それは木になり，$T_{\mu,s}$ は部分木，そして $\mu(s,t) = d_\infty(T_{\mu,s}, T_{\mu,t})$ となるので，木表現を得る．定理 2.9 に対応して，実はタイトスパンの 1 次元性と同値である．

定理 4.4 (Dress [7], Hirai [14])**.** 以下は同値：

(1) $\dim T_\mu \leq 1$.

(2) μ は木表現を持つ．

半整数性は，次の意味で，これ以上拡張できない．特に点容量ネットワークの場合のフラクショナリティ問題は解決したことになる：

定理 4.5 (Hirai [21])**.** ターミナル重み μ に対し，もしも $\dim T_\mu \geq 2$ なら，任意の点容量ネットワーク (G, b, S) に対して，$1/k$-整数最適フローが存在するような正整数 k は存在しない．

再び，点容量自由多品種フローの半整数性は最小費用版に拡張される [3, 49]．上の重み付き版もそうである [21]．

4.3 有向多品種フロー

今度は (G, c, S) が有向ネットワークの場合を考えてみよう．つまり G を有向グラフとするのである．対称とは限らないターミナル重み $\mu : S \times S \to \mathbf{Z}_+$ が与えられていて $\mu(s,t)$ は s から t への単位フローの価値を表すものする ($\mu(s,s) = 0$ とする)．このセッティングの下で，μ-MFP を考え，そして，双対 LP を考える．無向の場合と同様，グラフ距離を考えることで M-Dual を得るが,「対称とは限らないメトリック」— 有向メトリック — の最適化問題である．集合 X 上の有向メトリック (directed metric) とは $d : X \times X \to \mathbf{R}_+$ であって，$d(x,x) = 0$ $(x \in X)$ と三角不等式 $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$ $(x,y,z \in X)$ を満たすものとす

る．(X, d) を有向距離空間と呼ぼう．すると 2 節で述べたような T-双対理論の有向版を考えるのは自然であろう．Hirai-Koichi [22, 23] では有向版のタイトスパンを定義し，適切な有向距離を与えることで定理 2.3, 2.12 等の有向版を得ている．そして有向タイトスパンの次元が 1 以下のとき最大フロー最小カット定理を含む整数性定理が成り立ち（ただし，この部分は 1 品種フローの議論に帰着する），次元が 2 以上のときは，どんな k に対して $1/k$-整数性が成立しないこと等が示されている．グラフを有向オイラーグラフに制限したときは，さらに精密な議論が展開される．この方面は OR 誌の解説 [40] も参照されたい．

4.4 Mader の S パス定理とその拡張

次に考えるのは，フロー値を整数に限定した整数多品種フローである．ここでは，枝を多重化して，(辺) 容量はすべて 1 とし，辺素な S パス (S の異なる点を結ぶパス) の集合として扱うことにしよう．すでに 2 品種で問題は困難となる：

定理 4.6 (Even-Itai-Shamir [8])**.** 整数 2 品種フロー問題は NP 困難である．

整数自由多品種フロー，つまり，単に S パスを辺素に詰め込むという問題においては，78 年に Mader が最大最小定理を与えている：

定理 4.7 (Mader の辺素 S パス定理 [44])**.** $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ として，辺素な S パスの最大数は，次の値に等しい：

$$\frac{1}{2} \min \ \sum_{i=1}^{k} |\delta U_i| - \kappa$$

ここで min は，互いに疎な頂点部分集合族 $\{U_1, U_2, \ldots, U_k\}$ であって，$s_i \in U_i (1 \leq i \leq k)$ を満たすものにわたってとる．そして κ は $G - \bigcup_{i=1}^{k} U_i$ の連結成分 X であって $|\delta X|$ が奇数となるものの個数である．

Karzanov は，90 年代に Mader の辺素 S パス定理を最小費用版に拡張した．彼の与えた最大最小定理は省くが，以下が成り立つ．

定理 4.8 (Karzanov [31])**.** 最小費用の最大辺素 S パス集合は多項式時間で求まる．

証明は複雑な組合せ的アルゴリズムによるもので，66 ページにわたるプレプリントにまとめられ，雑誌への投稿はされず未出版である．

一般化した枠組みとして，Hirai-Pap [24] では，次の重み付き最小費用辺素 S パス問題を考察した：

$$\mu\text{-CEDP:} \qquad \text{Max.} \quad \sum_{P \in \mathcal{P}} \mu(s_P, t_P) - a(P) \ \ \text{s.t.} \ \ \mathcal{P} : \text{辺素 } S \text{ パスの集合}.$$

ここで s_P, t_P は P の端点を表し，$a(P) := \sum_{e \in P} a(e)$ とする．上の結果より，μ がすべて 1 のときは可解である．[24] はそれを木距離の場合へと拡張した．μ が木距離 (tree metric) であるとは，各部分木 R_s が一点よりなる木表現 $(\mathit{\Gamma}, \{R_s\}_{s \in S}; \kappa)$ が存在するときをいう．

定理 4.9 (Hirai-Pap [24]). μ が木距離で木表現 $(\Gamma, \{p_s\}_{s\in S}; 1/2)$ を持つとする．このとき μ-CEDP の最適値は次の問題の最適値に等しい：

$$\begin{array}{ll} \text{Min.} & \max_F \left(\frac{1}{2} d_\Gamma \circ \rho - a\right)(E \setminus F) \\ \text{s.t.} & \rho : V \to V\Gamma,\ \rho(s) = p_s\ (s \in S). \end{array}$$

目的関数の max は，枝集合 F であって，S を 1 点に縮め F を除いたグラフがオイラーグラフになるものにわたってとる．そして最適 S パス集合は多項式時間で求まる．

特に，μ がすべて 1 のときは，Γ が星の木表現が取れ，Mader の辺素 S パス定理が出る．証明は，辺素 S パス集合 $\mathcal{P}$ の和集合は S 以外で偶数次数，というパリティ制約 (T-join 制約) を μ-MFP に追加した LP 緩和 (Keijsper-Pendavingh-Stougie [38] で使われているものと本質的に同じ) が，実は μ が木距離のとき厳密緩和になることを示す．この LP 緩和の LP 双対が M-Dual と同じ制約を持つメトリックの非線形最適化となり，2 節の議論を用いて Γ 上の点配置問題にするのである（そこからが難しいところであるが）．多項式性の証明は，[38] と同じく，楕円体法による分離問題と最適化問題の多項式時間等価性 [13] に基づいている．

μ-CEDP でコスト a がゼロとしたときの問題を μ-EDP とかく．μ が木距離なら，μ-EDP は多項式時間可解であるが，もう少し広いクラスで多項式時間可解である．μ が木距離切断 (truncated tree metric) であるとは，木表現 $(\Gamma, \{R_s\}_{s\in S}; \kappa)$ であって，各部分木 R_s が距離球であるものがとれるときをいう．言い換えると，ある木距離 $\bar{\mu}$ とある $r : S \to \mathbf{Q}_+$ によって

$$\mu(s,t) = \max\{0, \bar{\mu}(s,t) - r(s) - r(t)\} \quad (s,t \in S)$$

とかける重みである．μ が木距離切断の μ-EDP は $\bar{\mu}$-CEDP に帰着するので次がわかる．

系 4.10 (Hirai-Pap [24]). μ が木距離切断なら，μ-EDP は多項式時間可解である．

実は，これは次の意味で限界を達成している．

定理 4.11 (Hirai-Pap [24]). μ が木距離切断でないなら，μ-EDP は NP 困難である．

点素な S パスの場合はどうだろうか．S 上では，パスが交わってもよいものとし，S を結ぶ枝はないものとする．再び，Mader による次の定理がある：

定理 4.12 (Mader の点素 S パス定理 [45]). 点素な S パスの最大数は，次の値に等しい：

$$\min |U_0| + \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \frac{1}{2} |\operatorname{Bd}(U_j)| \right\rfloor.$$

ここで min は，$V \setminus S$ の分割 $\{U_0, U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ であって，任意の S パスが U_0 と交わる，または，ある $U_i (1 \leq i \leq n)$ によって張られる枝を含む，という性質を持つものにわたってとる．$\operatorname{Bd} U_j$ は $U_0 \cup U_j$ 以外の点と枝でつながっている U_j の部分集合である．

この定理は深い．Lovász [43] は，マトロイドマッチングの枠組みを使った証明を与えた．Schrijver [50] は，線形マトロイドマッチングへの帰着を示し，Lovász の線形マトロイドマッチングアルゴリズムによって多項式時間で最大を達成する点素 S パス集合が求まることを示

した．点容量が1でなく，入力として与えられている場合の強多項式時間アルゴリズムは Pap [48, 49] にある．ただ部分問題として半整数版を強多項式時間で解かねばならない．

群ラベルを持つグラフへの代数的な拡張がChudnovsky-Geelen-Gerards-Goddyn-Lohman-Seymour [6] や Pap [48] にある．

Pap は，μ が木距離切断のとき，μ-重み付き点素 S パス詰め込み (μ-EDP の点素版) に最大最小定理と多項式時間アルゴリズムが存在し，その帰結として厳密な LP 緩和が存在するとアナウンスしている．

Karzanov は，[33, Section 6] において，Mader の点素 S パス定理の最小費用版をアナウンスしたが，証明が完了せず予想である，とのことである (private communication, 2010)．

4.5 最小ゼロ拡張問題

S を有限集合とし，μ を S 上のメトリックとする．特に (S,μ) は距離空間である．距離空間 (V,d) が (S,μ) の拡張であるとは，$S\subseteq V$ かつ $d|_S=\mu$ を満たすときをいう．特に，任意の $x\in V$ に対し，ある $s\in S$ が存在して $d(s,x)=0$ となるとき (V,d) がゼロ拡張 (0-extension) という．今，V のすべてのペア上にコスト $c:\binom{V}{2}\to\mathbf{Q}_+$ が与えられていて，最小コスト $\sum_{xy}c(xy)d(x,y)$ を持つゼロ拡張 (のメトリック)d を求める問題を最小ゼロ拡張問題という．つまり，次の最適化問題である:

$$\begin{array}{rl}\text{Min.} & \displaystyle\sum_{xy}c(xy)d(x,y)\\ \text{s.t.} & (V,d)\text{ は }(S,\mu)\text{ のゼロ拡張.}\end{array}$$

入力は $(S,\mu),V,c$ で変数は d である．この問題は

$$\begin{array}{rl}\text{Min.} & \displaystyle\sum_{xy}c(xy)\mu(\rho(x),\rho(y))\\ \text{s.t.} & \rho:V\to S,\ \rho(s)=s\ (s\in S).\end{array}$$

ともかける．$|S|=2$ のときは最小カット問題であり多項式時間で解けるが，$|S|\geq 3$ でマルチウェイカット問題を含み，NP 困難である．最小ゼロ拡張問題は画像処理や学習理論にも自然に現れる重要な問題のクラスであり，近似アルゴリズムも研究されている [39]．

さて，Karzanov は [34] において「最小ゼロ拡張問題が多項式時間可解となる距離空間 (S,μ) は何か？」という問題を考察している．つまり (S,μ) を固定して V,c を入力とした問題のクラスを考えるのである．

μ が S 上のグラフ Γ のグラフメトリック d_Γ である場合を考える．対応する最小ゼロ拡張問題が多項式時間可解のとき Γ は可解であるいうことにしよう．可解なグラフの部分クラスとして，次の緩和 LP が厳密緩和となるクラスを考えてみよう：

$$\begin{array}{lrl}\text{緩和 LP:} & \text{Min.} & \displaystyle\sum_{xy}c(xy)d(x,y)\\ & \text{s.t.} & (V,d)\text{ は }(S,\mu)\text{ の拡張.}\end{array}$$

つまり，この LP の任意の極小端点解がゼロ拡張になってくれるようなグラフである．緩和 LP は多項式時間で解けるので可解である．

Karzanov [34] は，そのようなグラフを特徴付けを与えた．次の条件を満たすグラフ $\varGamma$ を考えよう：

(1) $\varGamma$ は 2 部である．

(2) 長さ 6 以上の等長サイクルは存在しない．

(3) 向き付け可能である．

ここで等長サイクル C とは C の任意の 2 点をむすぶ ($\varGamma$ における) 最短路が C の中にあるという性質を持つサイクルである．向き付け可能であるとは，向き付けであって，任意の 4 サイクルに制限するとサイクルに沿った向きで対辺が逆に向いているものが存在するときをいう．この条件を満たすグラフをフレーム (frame) と呼ぶ．

定理 4.13 (Karzanov [34])**.** $\varGamma$ を S を頂点として持つグラフとする．以下は同値である：

(1) $\varGamma$ がフレームである．

(2) 緩和 LP が任意の (V, c) に対して厳密緩和である．

この定理 (の証明法) が本稿で述べた理論の始まりであった．緩和 LP は，μ がメトリックのときの μ-MFP の双対 LP に他ならない (2.3 節)．フレームから向き付け可能フォルダー複体が構成できる．フレーム $\varGamma$ の極大完全 2 部グラフを考える．向き付け可能性より，それは $K_{2,m}$ でなくてはいけない．そしてさらに，2 つの極大完全 2 部グラフの非空な交わりは 1 つの頂点か 1 つの枝でなければならない．従って，各極大完全 2 部グラフに，それを「枠」としてもつフォルダーを詰めることでセル複体 $\mathcal{K}$ が出来る．実は，これはフォルダー複体である．実際，任意のサイクルに対し，もしも，長さが 4 ならフォルダーの一部であり長さが 6 以上なら等長サイクルでありえず，ショートカットがある．これを繰り返すと 4 サイクルを面として持つ平面部分グラフの境界であることがわかる．このことより，$\mathcal{K}$ 上の任意の閉曲線が 1 点に縮むことがわかる．つまり単連結である．もしも，立方体のカドを持てば，そのまわりに等長 6 サイクルがある．以上より，$\mathcal{K}$ はフォルダー複体であることがわかり，その頂点集合によりグラフメトリック $d_{\varGamma}$ は表現される．従って，補題 2.7, 2.8 により，緩和 LP は厳密緩和となる．この構成法は Karzanov [34] によるもので，彼は $\mathcal{K}$ が補題 2.7, 2.8 の性質を持つことを示し，(1)⇒(2) を導いた．その後，Chepoi [4] が，この Karzanov の構成法を CAT(0) 性や超凸性という立場から捉えなおし，フォルダー複体として整理した．向き付け可能フォルダー複体の短い辺からなるグラフ $\varGamma$ はフレームである．ただ，$K_{1,2}$ フォルダーの情報や正方フォルダーと $K_{2,2}$ フォルダーの違いが失われてしまうので，正規領域を表現するには 2.2 節でやった複体的扱いが必要だった．

フレームの直積グラフは可解であるが，フレームとは限らない (例:3-cube)．Karzanov [36] は，フレームを真に含むあるグラフクラスの可解性を証明しているが，可解なグラフの完全な特徴付けは未解決である．

謝辞

発表の機会を与えて下さったオーガナイザーの岩田先生に感謝します．本研究の一部は，総合科学技術会議により制度設計された最先端研究開発支援プログラム（FIRST 合原最先端数理モデルプロジェクト）により、日本学術振興会を通して助成されたものです．

参考文献

[1] N. Aronszajn and P. Panitchpakdi: Extensions of uniformly continuous transformations and hyperconvex metric spaces, *Pacific Journal of Mathematics* **6** (1956), 405–439.

[2] M. A. Babenko and A. V. Karzanov: A scaling algorithm for the maximum node-capacitated multiflow problem, *ESA* (2008), 124–135.

[3] M. A. Babenko and A. V. Karzanov: Min-cost multiflows in node-capacitated undirected networks, *Journal of Combinatorial Optimization*, to appear.

[4] V. Chepoi: Graphs of some CAT(0) complexes, *Advances in Applied Mathematics* **24** (2000), 125–179.

[5] B. V. Cherkasski: A solution of a problem of multicommodity flows in a network, *Ekonomika i Matematicheskie Metody* **13** (1977), 143–151 (in Russian).

[6] M. Chudnovsky, J. Geelen, B. Gerards, L. Goddyn, M. Lohman, and P. Seymour: Packing non-zero A-paths in group-labelled graphs, *Combinatorica* **26** (2006), 521-532.

[7] A. W. M. Dress: Trees, tight extensions of metric spaces, and the cohomological dimension of certain groups: a note on combinatorial properties of metric spaces, *Advances in Mathematics* **53** (1984), 321–402.

[8] S. Even, A. Itai, and A. Shamir: On the complexity of timetable and multicommodity flow problems, *SIAM Journal on Computing* **5** (1976), 691–703.

[9] L. R. Ford, Jr. and D. R. Fulkerson: Maximal flow through a network, *Canadian Journal of Mathematics* **8** (1956), 399–404.

[10] L.R. Ford, Jr. and D.R. Fulkerson: A suggested computation for maximal multicommodity network flows, *Management Science* **5** (1958) 97–101.

[11] A. Frank, A. V. Karzanov, and A. Sebö: On integer multiflow maximization, *SIAM Journal on Discrete Mathematics* **10** (1997), 158–170.

[12] A. V. Goldberg and A. V. Karzanov: Scaling methods for finding a maximum free multiflow of minimum cost, *Mathematics of Operations Research* **22** (1997), 90–109.

[13] M. Grötschel, L. Lovász, and A. Schrijver: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer-Verlag, Berlin, 1988.

[14] H. Hirai: Characterization of the distance between subtrees of a tree by the associated tight span, *Annals of Combinatorics* **10** (2006), 111–128.

[15] H. Hirai: Tight spans of distances and the dual fractionality of undirected multiflow problems, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **99** (2009), 843–868.

[16] H. Hirai: Metric packing for $K_3 + K_3$, *Combinatorica* **30** (2010), 295–326.

[17] H. Hirai: T_X-approaches to multiflows and metrics, In: S. Iwata(ed.), *Combinatorial Optimization and Discrete Algorithms*, RIMS Kokyuroku Bessatsu, B23 (2010), pp 107–130.

[18] H. Hirai: Bounded fractionality of the multiflow feasibility problem for demand graph K_3+K_3 and related maximization problems, RIMS-preprint 1645, (2008).

[19] H. Hirai: Folder complexes and multiflow combinatorial dualities, *SIAM Journal on Discrete Mathematics*, to appear.

[20] H. Hirai: The maximum multiflow problem with bounded fractionality, RIMS-Preprint 1682, 2009. (the extended abstract appeared in STOC 2010).

[21] H. Hirai: Half-integrality of node-capacitated multiflows and tree-shaped facility locations on trees, RIMS-Preprint 1687, 2010.

[22] H. Hirai and S. Koichi: On tight spans and tropical polytopes for directed distances, Preprint, 2010, `arXiv:1004.0415`.

[23] H. Hirai and S. Koichi: On duality and fractionality of multicommodity flows in directed networks, *Discrete Optimization* **8** (2011), 428–445.

[24] H. Hirai and G. Pap: Tree metrics and edge-disjoint S-paths, *EGRES Technical Reports*, TR-2010-13, 2011.

[25] T. C. Hu: Multi-commodity network flows, *Operations Research* **11** (1963), 344–360.

[26] J. R. Isbell: Six theorems about injective metric spaces, *Commentarii Mathematici Helvetici* **39** (1964), 65–76.

[27] M. Iri: On an extension of the maximum-flow minimum-cut theorem to multicommodity flows, *Journal of Operations Research Society of Japan* **13** (1970/71), 129–135.

[28] A. V. Karzanov: On a class of maximum multicommodity flow problems with integer optimal solutions, in: *Selected Topics in Discrete Mathematics* (A. K. Kelmans, ed.), American Mathematical Society Translations Series 2, Volume 158, American Mathematical Society, Providence, 1994, pp. 81–99.

[29] A. V. Karzanov: Polyhedra related to undirected multicommodity flows, *Linear Algebra and its Applications* **114/115** (1989), 293–328.

[30] A. V. Karzanov: Undirected multiflow problems and related topics – some recent developments and results, in: *Proceedings of the International Congress of Mathematician, Volume II*, Kyoto, Japan 1991, 1561–1571.

[31] A. Karzanov: Edge-disjoint T-paths of minimum total cost, Report No. STAN-CS-92-1465, Department of Computer Science, Stanford University, Stanford, California, 1993, 66pp.

[32] A. V. Karzanov: Minimum cost multiflows in undirected networks, *Mathematical Programming* **66** (1994), 313–325.

[33] A. V. Karzanov: Multiflows and disjoint paths of minimum total cost, *Mathematical Programming* **78** (1997), 219–242.

[34] A. V. Karzanov: Minimum 0-exensions of graph metrics, *European Journal of Combinatorics* **19** (1998), 71–101.

[35] A. V. Karzanov: Metrics with finite sets of primitive extensions, *Annals of Combinatorics* **2** (1998), 211–241.

[36] A. V. Karzanov: One more well-solved case of the multifacility location problem. *Discrete Optimization* **1** (2004), 51–66.

[37] A. V. Karzanov and M. V. Lomonosov: Systems of flows in undirected networks, in: *Mathematical Programming. Problems of Social and Economical Systems. Operations Research Models. Work collection. Issue 1* (O.I. Larichev, ed.), Institute for System Studies, Moscow, 1978, 59–66 (in Russian).

[38] J. C. M. Keijsper, R. A. Pendavingh, and L. A. Stougie: A linear programming formulation of Mader's edge-disjoint paths problem, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **96** (2006), 159–163.

[39] J. Kleinberg and É. Tardos: Approximation algorithms for classification problems with pairwise relationships: metric labeling and Markov random fields, *Journal of ACM* **49** (2002), 616–639.

[40] 小市俊吾: 多品種流問題に対する幾何学的アプローチ，オペレーションズ・リサーチ **56** (2011) no.1, 10–14.

[41] M. V. Lomonosov: Combinatorial approaches to multiflow problems, *Discrete Applied Mathematics* **11** (1985), 93 pp.

[42] L. Lovász: On some connectivity properties of Eulerian graphs, *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae* **28** (1976), 129–138.

[43] L. Lovász: Matroid matching and some applications, *Journal of Combinatorial Theory, Series B* **28** (1980), 208–236.

[44] W. Mader: Über die Maximalzahl kantendisjunkter A-Wege, *Archiv der Mathematik* **30** (1978), 325–336.

[45] W. Mader: Über die Maximalzahl kreuzungsfreier H-Wege, *Archiv der Mathematik* **31** (1978/79), 387–402.

[46] K. Onaga and O. Kakusho: On feasibility conditions of multicommodity flows in networks, *IEEE Transactions on Circuit Theory* **CT-18** (1971), 425–429.

[47] G. Pap: Packing non-returning A-paths, Combinatorica **27** (2007), 247–251.

[48] G. Pap: Some new results on node-capacitated packing of A-paths, *STOC'07—Proceedings of the 39th Annual ACM Symposium on Theory of Computing*, 599–604, ACM, New York, 2007.

[49] G. Pap: Strongly polynomial time solvability of integral and half-integral node-capacitated multiflow problems, *EGRES Technical Report*, TR-2008-12, (2008).

[50] A. Schrijver: *Combinatorial Optimization—Polyhedra and Efficiency*, Springer-Verlag, Berlin, 2003.

[51] É. Tardos: A strongly polynomial algorithm to solve combinatorial linear programs, *Operations Research* **34** (1986), 250–256.

[52] V. V. Vazirani: *Approximation Algorithms*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.