数理情報学のための束論
Lattice Theory for Mathematical Informatics

平井広志

東京大学 計数工学科 数理情報学コース

東京大学 情報理工学系研究科 数理情報学専攻

E-mail: hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

協力：池田基樹，本間理恵

2021 年 10 月 25〜29 日

最終更新日：2021 年 10 月 28 日

目 次

第 1 章　束 **2**
1.1　半順序集合 2
1.2　束の定義 4
1.3　束のクラスと例 8
1.3.1　分配束 8
1.3.2　モジュラ束 9
1.3.3　セミモジュラ束，幾何束 11
1.4　文献案内 14

第 2 章　分配束：Birkhoff の表現定理 **15**
2.1　Birkhoff の表現定理 15
2.2　劣モジュラ関数と基本分割 19

第 3 章　安定結婚問題 **22**
3.1　安定マッチングと GS アルゴリズム 22
3.2　安定マッチング集合の分配束構造 24

第 4 章　DM 分解 **30**
4.1　DM 分解とは 30
4.2　DM 分解を求めるアルゴリズム 34
4.2.1　安定集合と点被覆（点カバー） 34
4.2.2　マッチングと点カバー 34
4.2.3　DM 分解とマッチング 36
4.2.4　基本分割による DM 分解の精密化 37
4.3　発展的話題：非可換 Edmonds 問題と DM 分解の一般化 37
4.3.1　Edmonds 問題 37
4.3.2　非可換 Edmonds 問題 38
4.3.3　DM 分解の一般化，分割行列 40

第 5 章　メディアングラフ **42**
5.1　モジュラグラフとメディアングラフ 42
5.1.1　基点オーダーと距離区間の束構造 45
5.1.2　束・半束の被覆グラフからの特徴付け 46
5.2　メディアン半束と PIP 49

第1章　束

この章では，束（lattice）を導入する．最初に半順序集合を導入して，その特殊なクラスとして束を定義する．その後，束の基本的なクラスと例について説明する．

1.1　半順序集合

集合 X の上の２項関係 R とは，フォーマルには，部分集合 $R \subseteq X \times X$ のことである．$x, y \in X$ に対して，$(x, y) \in R$ のとき，「xRy が成り立つ」といって，R を X 上の２項演算子のように扱う．集合 X の上の同値関係とは，２項関係 $\simeq$ であって以下を満たすものである．

[反射律] $x \simeq x$.

[対称律] $x \simeq y$ なら $y \simeq x$ が成り立つ．

[推移律] $x \simeq y$ かつ $y \simeq z$ なら $x \simeq z$ が成り立つ．

同値類とは，互いに同値な元たちからなる X の部分集合であって極大であるものをいう．同値類 S は，その中の任意の元 x によって，$S = [x] := \{y \in X \mid x \simeq y\}$ と表すことができる．$x, y \in S$ に対して $[x] = [y]$ である．異なる同値類の交わりは空である．したがって，X は同値類たちによって分割される．これを X の同値類分割という．

集合 P の上の半順序（partial order）とは，P 上の２項関係 $\preceq$ であって，以下を満たすものである．

[反射律] $x \preceq x$.

[反対称律] $x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ なら $x = y$.

[推移律] $x \preceq y$ かつ $y \preceq z$ なら $x \preceq z$ が成り立つ．

半順序 $\preceq$ を備えた集合 P のことを半順序集合（partially ordered set, poset, ポセット）という．半順序集合 P を半順序 $\preceq$ を明示する形で $(P, \preceq)$ と書いたりもする． 基本的な用語・記法を述べる：

- $x \succeq y$ は，$y \preceq x$ を表す．
- $x \preceq y$ かつ $x \neq y$ のとき，$x \prec y$ または $y \succ x$ と書く．
- ２つの元 $x, y \in P$ が比較可能であるとは，$x \preceq y$ または $x \succeq y$ が成り立つときをいう．そうでないときは比較不能という．
- 全順序集合とは，任意の２元が比較可能である半順序集合である．
- 半順序集合 P の部分集合 P' も順序 $\preceq$ を制限することで半順序集合とみなす．
- 最大元とは，任意の元 y に対して，$x \succeq y$ となる元 x である．
- 最小元とは，任意の元 y に対して，$x \preceq y$ となる元 x である．
- 極大元とは，$y \succ x$ となる y が存在しないような元 x である．
- 極小元とは，$y \prec x$ となる y が存在しないような元 x である．

最大/最小/極大/極小元は，一般に存在するとは限らない．

チェイン　半順序集合 P のチェイン，鎖とは，部分集合 C であって，その任意の 2 元 $x, y \in C$ が比較可能であるものをいう．$|C|-1$ をチェインの長さという．チェインとは全順序部分集合のことである．有限の長さ k のチェイン C は，$k+1$ 個の元 $x_0, x_1, \ldots, x_k$ で

$$x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_k$$

を満たすものからなっている．このようなとき，単に「チェイン C は $x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_k$」のように表すことがある．極大チェインとは，それを真に含むチェインが存在しないものをいう．

区間，イデアル，フィルター　任意の比較可能な 2 元 $x, y \in P$，$x \preceq y$ に対し，区間 $[x, y]$ を以下で定義する．

$$[x, y] := \{z \in P \mid x \preceq z \preceq y\}. \tag{1.1}$$

イデアルとは，部分集合 I であって，$x \preceq y \in I$ なら $x \in I$ を満たすもので，フィルターとは，部分集合 F であって，$x \succeq y \in F$ なら $x \in F$ を満たすものである．ある元 x に対して $y \preceq x$ となる y 全体は，イデアルになるがこれを x の主イデアルという．同様に $y \succeq x$ となる y 全体は，フィルターになるがこれを x の主フィルターという．

有限性条件 (F)　このノートでは，多くの場面で，次の仮定を満たす半順序集合 P を考える．

(F) P の任意の区間内の任意のチェインの長さは有限である．

離散数学においては (F) を想定していることが多いが，束論の教科書は，この条件が成り立たないシチュエーションを想定して書かれていることがあるので注意が必要である．この章では条件 (F) を注意しながら議論をすすめる．次を注意する．

- (F) $\Leftrightarrow$ P の任意の区間には極大チェインが存在して，任意の極大チェインの長さは有限である．

例 1.1 (べき集合; 包含関係)**.** S を集合として，S の部分集合からなる族を 2^S で表す．すなわち，$2^S = \{X \mid X \subseteq S\}$ である．2^S は，包含関係 $\subseteq$ を半順序とする，半順序集合になる．S が有限集合のときは，$|2^S| = 2^{|S|}$ であり，明らかに (F) が満たされるが，S が無限集合のときは，(F) は満たされない．

例 1.2 ($\mathbb{R}, \mathbb{Z}$; 大小関係)**.** 実数 $\mathbb{R}$ は大小関係 $\leq$ の下で全順序集合になる．それを整数 $\mathbb{Z}$ に制限することで $\mathbb{Z}$ も全順序集合になる．$\mathbb{Z}$ は，(F) を満たすが，$\mathbb{R}$ は満たさない．

直下の元，アトム　比較可能な異なる 2 元 x, y, $x \prec y$ が，$[x, y] = \{x, y\}$ となるとき，x は y の直下の元といって，特に，$x \prec\!\!: y$ や $y :\!\!\succ x$ と書く．また，y は x を被覆する，カバーする，といったり，y を x の直上の元といったりする．x, y を被覆ペアという．最小元の直上の元をアトムと呼ぶ．

補題 1.3. (F) を満たす半順序集合において，最小元でない任意の元にはその直下の元がある．

ハッセ図と被覆グラフ　P のハッセ図とは，頂点集合が P で，$x \prec\!\!: y$ となる各ペア (x, y) に $x \leftarrow y$ と有向枝を与えて得られる有向グラフである．(有限) 半順序集合を図的に表すときに用いられる．有限の長さの極大チェインは，

$$x_0 \prec\!\!: x_1 \prec\!\!: \cdots \prec\!\!: x_k$$

のようになり，ハッセ図の有向パスと対応する．

ハッセ図から枝の向きを無くした無向グラフを被覆グラフ（covering graph）という．被覆グラフは，被覆ペアに枝を与えて得られるグラフである．

双対　P 上の半順序 $\preceq$ に対して，それをひっくり返した双対半順序 $\preceq^*$ を $x \preceq^* y \Leftrightarrow y \preceq x$ と定義する．$\preceq$ のかわりに $\preceq^*$ をとったときの半順序集合を P^* と書く．

直積　2 つの半順序集合 $(P, \preceq)$,$(P', \preceq')$ に対して，その直積 $P \times P' = \{(x, y) \mid x \in P, y \in P'\}$ は，その上の半順序 $\preceq_{P \times P'}$ を

$$(x, x') \preceq_{P \times P'} (y, y') \quad \Leftrightarrow \quad x \preceq y,\ x' \preceq' y$$

と定義することで半順序集合になる．3 つ以上の半順序集合 $P_1, P_2, \ldots, P_k$ の直積 $P_1 \times P_2 \times \cdots \times P_k$ も同様にして半順序集合になる．

例 1.4 ($\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n$; ベクトル順序)**.** $\mathbb{R}^n$ は，ベクトル順序 $\leq$

$$x \leq y \quad \Leftrightarrow \quad x_i \leq y_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

によって半順序集合になる．これは全順序集合 $\mathbb{R}$ の直積である．$\mathbb{Z}^n$ もベクトル順序 $\leq$ によって，半順序集合と見る．

DAG, 有向グラフの強連結成分分解　$G = (V, A)$ を DAG（= サイクルを含まない有向グラフ）とする．２項関係 $\rightsquigarrow$ を x から y への有向パスがあるときに $x \rightsquigarrow y$ と定義する．x から x へは長さゼロのパスがあるものとする．すると，$\rightsquigarrow$ は，反射律と推移律を満たす．さらに反対称律も満たす．なぜなら，x から y へパスがあって y から x へパスがあるとき，$x = y$ でないと有向サイクルを含んでしまうからである．したがって，V は半順序集合となる．このとき，ハッセ図は G からいくつかの枝を除いたものになる．具体的には，枝 (x, y) であって，x から y へ長さ 2 以上のパスがあるものをすべて除き，パラレル枝を 1 つにまとめたものがハッセ図である．

$G = (V, A)$ を DAG とは限らない有向グラフとする．同様に 2 項関係 $\rightsquigarrow$ を定義する．このときは，有向サイクルがあるかもしれないので反対称律は満たすとは限らない．新しい 2 項関係 $\sim$ を $x \rightsquigarrow y$ かつ $y \rightsquigarrow x$ のとき $x \sim y$ と定義する．すると $\sim$ は同値関係となる．$\sim$ の下での同値類を強連結成分といい，同値類分割を強連結成分分解という．強連結成分は，その中の任意の 2 点が互いに有向パスで行き来ができる，そんな部分集合で極大なものである．

2 項関係 $\rightsquigarrow$ を強連結成分分解の上に拡張される．2 つの強連結成分 S, T に対して $S \rightsquigarrow T$ が成り立つということを $x \in S, y \in T$ に対し，$x \rightsquigarrow y$ が成り立つこととして定義する．この定義は，代表元 x, y のとり方によらず，well-defined である．なぜなら $x' \sim x$, $y' \sim y$ とすると $x' \rightsquigarrow x$, $y \rightsquigarrow y'$ であるので，$x' \rightsquigarrow x \rightsquigarrow y \rightsquigarrow y'$ で $x' \rightsquigarrow y'$ となるからである．　同様の考察で，$\rightsquigarrow$ は，強連結成分分解において，反射律，推移律を満たす．さらに反射律も満たす．なぜなら $[x] \rightsquigarrow [y]$, $[y] \rightsquigarrow [x]$ なら，$x \rightsquigarrow y$, $y \rightsquigarrow x$ で $x \sim y$，よって $[x] = [y]$ だからである．したがって，$\rightsquigarrow$ は強連結成分分解上の半順序となり，強連結成分分解は半順序集合となる．

1.2　束の定義

ここで束の定義する．P を半順序集合とする．2 元 $x, y \in P$ の共通上界とは，$x \preceq z \succeq y$ となる元 z からなる P の部分集合である．同様に，2 元 x, y の共通下界とは $x \succeq z \preceq y$ となる元 z からなる部分集合である．共通上界の中での最小元をジョイン（join）$x \vee y$ で表し，共通下界の中で最大元をミート（meet）といって，$x \wedge y$ で表す．一般に，ジョインもミートも存在するとは限らない．

束（lattice）とは，半順序集合であって，任意の 2 元 x, y に対して，ジョイン $x \vee y$ とミート $x \wedge y$ が存在するものをいう．次の性質は定義から明らかであるが，ジョインとミートは半順序を復元することを意味している．

- $x \wedge y = x \Leftrightarrow x \preceq y.$
- $x \vee y = x \Leftrightarrow x \succeq y.$

このノートでは，次の同値なバージョンをよく使う．

- $x \not\preceq y \Leftrightarrow x \succ x \wedge y$
- $x \not\succeq y \Leftrightarrow x \prec x \vee y$

例 1.5 (全順序集合)**.** 全順序集合は束である．なぜなら，任意の元 x, y について，$x \preceq y$ か $x \succeq y$ が成り立つので，前者なら，$x \vee y = y$, $x \wedge y = x$，後者なら，$x \vee y = x$, $x \wedge y = y$ である．

例 1.6 (べき集合; 包含関係)**.** べき集合族 2^S は束になる．実際，$X, Y \in 2^S$ に対し，$X \cup Y$ は X, Y の共通上界で，任意の共通上界 Z は，$X \cup Y \subseteq Z$ を満たす．すなわち，$X \cup Y$ は X, Y のジョインに等しい．同様にして，$X \cap Y$ は，X, Y のミートになる．

例 1.7 ($\mathbb{R}^n, \mathbb{Z}^n$; ベクトル順序)**.** ベクトル順序に関して $\mathbb{R}^n$ は束になる．ジョインとミートは，要素毎の最大値，最小値，すなわち

$$x \vee y = \max(x, y) := (\max(x_1, y_1), \max(x_2, y_2), \ldots, \max(x_n, y_n)),$$
$$x \wedge y = \min(x, y) := (\min(x_1, y_1), \min(x_2, y_2), \ldots, \min(x_n, y_n))$$

である．$\mathbb{Z}^n$ におけるジョインもミートも同じである．このことは $\mathbb{Z}^n$ は $\mathbb{R}^n$ の部分束であることを意味している．

これは束の直積の例であるが，一般に束の直積は束である．

補題 1.8.
- 束の直積も束である．ジョインは，それぞれのジョインのペアで，ミートをそれぞれのミートのペアで与えられる．
- 束の双対も束である．ジョインはもとの束におけるミートでミートはもとの束におけるジョインである．

例 1.9 (ベクトル部分空間の族；包含関係)**.** V を体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトル空間とする．V のすべての部分ベクトル空間のなす族を $\mathcal{S}(V)$ とする．$\mathcal{S}(V)$ は，包含関係 $\subseteq$ の下で束になる．ベクトル空間 $X, Y \in \mathcal{S}(V)$ に対し，$X \cap Y$ もベクトル空間である．これは $X \wedge Y = X \cap Y$ を意味している．では，$X \vee Y = X \cup Y$ かというとそうではない．なぜなら，$X \cup Y$ はベクトル空間ではないからではある．ジョインはベクトル空間の和で与えられる．すなわち，$X \vee Y = X + Y := \{x + y \mid x \in X, y \in Y\}$ である．$X + Y$ はベクトル空間であって，X と Y を含む最小のベクトル空間である．それは $X + Y$ は，X, Y の共通最小上界（ジョイン）であることを意味する．$X \subset Y$ なら $\dim X < \dim Y$ であることから $\mathcal{S}(V)$ は (F) も満たす．

$\mathcal{S}(V)$ は，べき集合 2^V の部分半順序集合でミートは一致するがジョインは一致しないことに注意する．すなわち $\mathcal{S}(V)$ は 2^V の部分束ではない．

部分集合のジョインとミート　半順序集合の部分集合 S のジョイン $\bigvee S$ とは S の共通上界 $\{x \mid x \succeq y\ (y \in S)\}$ の中の最小元のことである．同様に S のミート $\bigwedge S$ は，S の共通下界 $\{x \mid x \preceq y\ (y \in S)\}$ の最大元のことである．束の定義では，任意の 2 点集合に対して，ジョインとミートの存在を仮定するものであるが，それは，任意の部分集合に対するジョインとミートの存在を意味するものでない．

補題 1.10. 最大元，最小元を持ち，(F) を満たす束においては，任意の非空な部分集合 S に対して $\bigvee S$, $\bigwedge S$ が存在する．

便宜上，空集合のジョインは最小元，ミートは最大元と定義しておく．

証明. 最大元があるので S の共通上界は空でない．S の中から元 x_0 を 1 つ任意にとる．次にもしも x_0 が S の共通上界なら $x_0 = \bigvee S$ である．そうでないとする．ある $z_1 \in S$, $z_1 \not\preceq x_0$ がとれるので $x_1 := x_0 \vee z_1$ とすると，$x_1 \succ x_0$ で，x_1 は任意の S の共通上界の元 y に対して $x_1 \preceq y$ である．よって，x_1 が共通

上界の元なら，$x_1 = \bigvee S$ である．そうでないとすると，同様にして，ある $z_2 \in S$, $z_2 \not\preceq x_1$ がとれて，$x_2 := x_1 \vee z_2$ とすると，x_2 が共通上界の元なら，$x_2 = \bigvee S$ である．そうでないとすると... このプロセスが有限回で止まらないとすると，$[x_0, 1]$ には，無限の長さを持つチェインが存在することになり，(F) に矛盾する．したがって，このプロセスで停止して $\bigvee S$ が得られる．$\square$

なお，任意の部分集合 S に対して，ジョイン $\bigvee S$ とミート $\bigwedge S$ が存在する束のことを完備束という．

高さ，ランク，JD 条件　最小元 0 を持つ半順序集合 P に対して，元 x の高さ $h(x)$ を $[0,x]$ のチェインの長さの最大値とする．P の高さを $h(x)$ の最大値として定義する．$x \mapsto h(x)$ を高さ関数という．なお，(F) の下でも $h(x)$ は有限値とは限らない（例を考えてみよ）．そこで，極大チェインの長さがいつも同じであるときいろいろと都合がよい．そこで次の条件（Jordan-Dedekind チェイン条件, JD 条件）を導入する．

JD 条件 任意の区間において，任意の極大チェインの長さは同一である．

この条件の下では，x の高さは $[0,x]$ の極大チェインの長さである．

補題 1.11. (F) を満たし，最小元 0 を持つ半順序集合 P において以下は同値．

(a) P は JD 条件を満たす．

(b) 以下を満たす関数 $r : P \to \mathbb{Z}$ が存在する：

$$r(y) = r(x) + 1 \quad (\forall x, y \in P, x \prec\!: y) \tag{1.2}$$

証明. JD 条件を満たすとき，$r(x)$ を x の高さとして定義すると r は式を満たす．逆に r が存在すると，区間 $[x,y]$ の任意の極大チェイン $x = x_0 \prec\!: x_1 \prec\!: \cdots \prec\!: x_k = y$ の長さ k は，チェインの取り方によらず一定の値 $r(y) - r(x)$ である．$\square$

(1.2) は，定数を足しても変わらないので，$r(0) = 0$ と規格化でき，そのときの r を P のランク関数という．ランク関数は，存在すれば，高さ関数と一致する．高さ関数の性質として

$$x \succ y \Rightarrow h(x) > h(y) \tag{1.3}$$

は定義から明らかであるが，これから導かれる

$$x \succeq y \text{ かつ } h(x) = h(y) \Rightarrow x = y \tag{1.4}$$

高さ・ランク関数を使って議論をすすめる際に有用である．

部分束　束 $\mathcal{L}$ の部分集合 $\mathcal{L}'$ でジョインとミートに関して閉じているもの部分束という．ここで，ジョインとミートに関して閉じている，とは，$\forall x, y \in \mathcal{L}' \Rightarrow x \vee y, x \wedge y \in \mathcal{L}'$ を満たすことをいう．

例 1.12. 束の比較可能な 2 元 x, y, $x \preceq y$ に対して，区間 $[x,y]$ は部分束である．

順序を保つ写像，同型性　$\mathcal{L}, \mathcal{L}'$ を束（より一般に半順序集合）として，写像 $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ が順序を保つ (order-preserving) とは，

$$x \preceq y \Rightarrow \varphi(x) \preceq \varphi(y) \quad (x, y \in \mathcal{L})$$

写像 $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ が全単射で逆写像 $\varphi^{-1} : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ も順序を保つとき，φ は同型写像という．同型写像 $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{L}'$ が存在するとき，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{L}'$ は同型であるという．このとき，

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y), \quad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y)$$

が成立する．逆にこの条件を満たす全単射は同型写像である（演習）．

例 1.13. 束において，元 y を 1 つとる．写像 $x \mapsto x \wedge y$ は，y の主イデアル $I(y)$ への順序を保つ写像，特に，レトラクションである．実際，$x \preceq x'$ なら x, y の共通下界は，x, y' の共通下界の部分集合である．したがって $x \wedge y \preceq x' \wedge y$ である．同様に $x \mapsto x \vee y$ は，y の主フィルターへの順序を保つレトラクションである．

例 1.14. $\{0,1\}^n$ を $\mathbb{Z}^n$ の部分束とする．このとき，$\{0,1\}^n$ は，n 点からなる集合 $\{1,2,\dots,n\}$ のべき集合族 $2^{\{1,2,\dots,n\}}$ と同型である．同型写像 $\varphi\colon \{0,1\}^n \to 2^{\{1,2,\dots,n\}}$ は，

$$z \mapsto \{i \in \{1,\dots,n\} \mid z_i = 1\}$$

で与えられる．

半束　束の条件を少し緩めた半束（セミラティス，semilattice）の概念も有用である．このノートでは積極的に用いる．半順序集合 P が（ミート）半束であるとは，任意の 2 元 x, y に対してミート $x \wedge y$ が存在するときをいう．ここでジョインの存在は仮定しない．半束の内部には多くの束が含まれている．

補題 1.15. (F) を満たす半束において，2 元 x, y が共通上界を持てばジョイン $x \vee y$ が存在する．特に任意の区間や主イデアルは束になる．

証明. x と y の共通上界のなす集合を S をすると，(F) を満たすことから $\bigwedge S$ が存在して $x \vee y$ に一致する．□

例 1.16. 集合 S 上の単体的複体とは，S の部分集合からなる族 $\mathcal{C} \subseteq 2^S$ で

$$Y \subseteq X \in \mathcal{C} \Rightarrow Y \in \mathcal{C}$$

を満たすものである．$X, Y \in \mathcal{C}$ のミートは $X \cap Y$ である．また，X, Y が共通上界 $Z \in \mathcal{C}$ を持てば，$X \cup Y \subseteq Z$ より，$X \cup Y \in \mathcal{C}$ で，ジョインは，$X \cup Y$ に一致する．また，元 X の主イデアルは，べき集合束 2^X である．

2 項演算による束の定義　いくつかの演算が与えられた集合 S のことを代数や代数構造と呼ぶことがある．ここで k 項演算とは，S の k 直積 S^k から S への関数のことである．この意味で，束は 2 つの 2 項演算 $\wedge, \vee\colon S \times S \to S$ を有する代数構造である．すなわち $\wedge(x,y) := x \wedge y$, $\vee(x,y) := x \vee y$．束において，ジョインとミートは，以下の性質を持っている．

べき等律 $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$.

交換律 $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$.

結合律 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

吸収率 $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$.

これらの性質を見るのは容易である．例えば，$x \vee (y \vee z)$ は，x, y, z の上界である．したがって，$(x \vee y), z$ の上界でもある．ゆえに $x \vee (y \vee z) \succeq (x \vee y) \vee z$．逆も同様に成り立つので結合律が得られる．吸収律については，$x \preceq x \vee y$, $x \succeq x \wedge y$ からただちに得られる．

束は（半順序を忘れて）上の 4 つの性質を満たす 2 つの 2 項演算 $\vee, \wedge$ が与えられた代数構造として定義することもできる． それを確かめよう．まずは半順序を定義する．S 上の 2 項演算 $\preceq$ を $x \preceq y \Leftrightarrow x \wedge y = y$ と定義する．すると，べき等律から反射律 $x \preceq x$, $x \preceq y$ かつ $y \preceq x$ なら，$x = x \wedge y = y$ なので，$x = y$，すなわち，反対称律が出る．また，$x \preceq y \preceq z$ なら，$x = x \wedge y$, $y = y \wedge z$ で，$x = x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z = x \wedge z$ なので $x \preceq z$，すなわち推移律が出る．よって $\preceq$ は半順序であり，S は半順序集合となる．また，吸収律を使うと，$x = x \vee y$ なら $x \wedge y = (x \vee y) \wedge y = y$ なので $y \preceq x$ で，逆に $y = y \wedge x$ なら $x \vee y = x \vee (y \wedge x) = x$ である．これは，$x \preceq y \Leftrightarrow y = x \vee y$ を表しており，$\preceq$ は，$\vee$ を用いても定義できる．

次に，この半順序の下で S は束であって，ジョインとミートは，それぞれ $\vee, \wedge$ で与えられることを示そう．２元 x, y をとって，$x \wedge y$ を考えると $x = x \wedge (x \wedge y) = (x \wedge x) \wedge y = x \wedge y$, から，$x \wedge y \preceq x$，同様に $x \wedge y \preceq y$．すなわち，$x \wedge y$ は，x, y の共通下界である．$y = y \wedge (x \vee y)$ から $x \vee y$ は，x, y の共通上界である．x, y の任意の共通下界 z をとると，$x \wedge z = z = y \wedge z$ なので $z = x \wedge z = x \wedge (y \wedge z) = z \wedge (x \wedge y)$. すなわち，$z \preceq x \wedge y$ なので，$x \wedge y$ は，x, y のミートである．同様にして，$x \vee y$ は，x, y のジョインになる．

なお，半束も同様に２項演算によって定義できる．べき等律，交換律，結合律を満たす２項演算を半束演算という．半束演算から半束が得られることは上の議論から明らかであろう．

1.3　束のクラスと例

ここでは，代表的な束のクラスとその例について紹介する．ここで述べる束のクラスは以下のような関係にある：

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{分配束} & \subset & \text{モジュラ束} & \subset & \text{セミモジュラ束} \\
\cup & & \cup & & \cup \\
\text{ブール束} & \subset & \text{相補的モジュラ束} & \subset & \text{幾何束}
\end{array}
$$

1.3.1　分配束

分配束 (distributive lattice) とは，束であって分配律を満たすものである：

分配律 $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$,

例 1.17. べき集合 2^S は分配束である．実際，$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$, $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$ と $\cup = \vee, \cap = \wedge$ から分配律が従う．

補題 1.18. 分配束の部分束，直積，双対は分配束である．

証明. 部分束について証明する．分配律において x, y, z が部分束の元だとすると分配律の両辺もその部分束の元である．つまり，その部分束で分配律が成立することになる．　□

べき集合族 2^S の部分束 $\mathcal{R}$ をリング族（ring family）という．すなわち，リング族 $\mathcal{R}$ とは，S 上の集合族であって，

$$X, Y \in \mathcal{R} \Rightarrow X \cup Y, X \cap Y \in \mathcal{R}$$

を満たすものである．特に，リング族は，包含関係によって分配束となる．実は，高さ有限の分配束に対してはこの逆が成り立つ，というのが次節で解説する Birkhoff の表現定理であり，そのアルゴリズム的な応用を論ずることがこのノートの主題である．

次の束 N_5, M_3

M_3: $0 \prec: x \prec: y \prec: 1 :\succ z :\succ 0$

N_5: $0 \prec: x \prec 1 :\succ y :\succ 0 \prec: z \prec: 1$

は，分配束ではない束の例であるが，この２つの束を含まないことが分配束であるための必要十分である．

定理 1.19. 束が分配束であるためには，M_3, N_5（と同型な束）を部分束として含まないことが必要十分である．

証明は省略する．

ブール束，ブール代数　最大元 1，最小元 0 を持つ束 $\mathcal{L}$ において，元 x の補元（complement）とは，$y \wedge x = 0,\ y \vee x = 1$ を満たす元 y のことである．束が相補的（complemented）であるとは，任意の元が補元を持つときをいう．相補的な分配束をブール束（Boolean lattice）という．

例 1.20. べき集合族 2^S は，ブール束である．実際，X に対して補集合 $S \setminus X$ が補元になる．

相補的とであるという条件は，部分束に対して閉じないことに注意する．特にブール束の部分束は，（分配束であるが）ブール束とは限らない．

補題 1.21. ブール束の任意の区間はブール束である．

証明. 元 x に対して，$[0, x]$ が相補的であることをいえばよい．$y \in [0, x]$ に対して，補元 z, $z \vee y = 1$, $z \wedge y = 0$ をとる．$x \wedge z$ が $[0, x]$ における補元になることをいう．実際, $(x \wedge z) \wedge y = x \wedge (z \wedge y) = x \wedge 0 = 0$, $(x \vee z) \wedge y = (x \vee y) \wedge (z \vee y) = x \wedge 1 = x$ である．２つ目に分配律を用いた． □

次は，Stone の表現定理と呼ばれることがある．

定理 1.22. 高さ r のブール束 $\mathcal{B}$ は，要素数 r の集合 S 上のべき集合族 2^S と同型である．

次節でこの定理を Birkhoff の表現定理の特殊ケースとして導く．

補題 1.23. 分配束の元が補元を持つとするとそれは一意に決まる．

証明. 元 x に対し，補元 y, y' があったとする．すると $y = 1 \wedge y = (x \vee y) \wedge y' = (x \wedge y') \vee (y \wedge y') = 0 \vee (y \wedge y') = y \wedge y'$．したがって，$y \preceq y'$. この議論において y と y' の役割を入れ替えると $y' \preceq y$，結局 $y = y'$. □

この補題によって，ブール束においては，補元をとるという 1 項演算 $\neg$ が定義できる．ブール代数とは，ブール束と等価な代数構造で，べき等律，交換律，結合律，吸収律，分配律を満たす 2 項演算 $\vee, \wedge$，特殊な 2 元 $0, 1$，以下を満たす 1 項演算 $\neg$ を有するものである：

補元律 $x \vee \neg x = 1,\ x \wedge \neg x = 0.$

ブール代数からブール束の構成は明らかであろう．

1.3.2　モジュラ束

束においては一般に次の性質が成り立つ．

$$x \succeq z \Rightarrow x \wedge (y \vee z) \succeq (x \wedge y) \vee z. \tag{1.5}$$

なぜなら，$x \wedge (y \vee z)$ は，z と $x \wedge y$ の共通上界だからである．この関係が等号で成立する束がモジュラ束である．すなわち，モジュラ束 $\mathcal{L}$ とは，任意の 3 元 $x, y, z \in \mathcal{L}$ に対して

モジュラ律:　$x \succeq z \Rightarrow x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$

が成り立つ束のことである．

補題 1.24. 分配束はモジュラ束である．

証明. 分配律より，$x \succeq z$ なら $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z) = (x \wedge y) \vee z$ が成り立つ． □

補題 1.25. モジュラ束の部分束，直積，双対はモジュラ束である．

M_3 はモジュラ束である．一方，N_5 はモジュラ束ではない．

定理 1.26. 束がモジュラ束であるためには N_5 を部分束として含まないことが必要十分である．

証明. モジュラでない束には，３元 x, y, z であって，$x \succ z$ かつ $x \wedge (y \vee z) \succ (x \wedge y) \vee z$ なるものが存在する．５点 y, $x \wedge (y \vee z)$, $(x \wedge y) \vee z$, $y \vee z$, $x \wedge y$ からなる部分束が N_5 になる． □

例 1.27. ベクトル部分空間のなす束 $\mathcal{S}(V)$ はモジュラ束である．そのためには，$X \supseteq Z$ なら $X \cap (Y+Z) \subseteq (X \cap Y) + Z$ をいえばよい． $x = y + z \in X \cap (Y + Z)$ を任意にとる．ここで $y \in Y, z \in Z$．$X \supseteq Z$ なので，$y = x - z \in X$ である．つまり $y \in X \cap Y$．これは，$x = y + z \in (X \cap Y) + Z$ を意味している．Y が X の直上の元なら $\dim Y = \dim X + 1$ なので，次元 dim はランク関数を与える．実は，よく知られる等式

$$\dim X + \dim Y = \dim X \cap Y + \dim X + Y \quad (X, Y \in \mathcal{S}(V)). \tag{1.6}$$

からもモジュラ束であることわかる．命題 1.32 を見よ．

さらに，$\mathcal{S}(V)$ は相補的である．なぜならベクトル部分空間 X の補元は，補空間 X' に他ならない：$X \cap X' = \{0\}$, $X + X' = V$．補空間は一般に一意ではないことから $\mathcal{S}(V)$ は分配束でないことがわかる．より直接的には，一次従属な異なる３つの非ゼロベクトル x, y, z が張る一次元ベクトル空間 X, Y, Z を考えると $(X + Y) \cap Z = Z \neq \{0\} = (X \cap Z) + (Y \cap Z)$ なので分配律が成立しない．

なお，体のかわりに可除環（逆元が存在する非可換かもしれない環）上のベクトル空間にしてもまったく同様の議論が成り立つ．

実は，高さが 4 以上の既約な相補的モジュラ束は，ある可除環上のベクトル空間の部分空間の族と同型になることが知られている．

例 1.28. この一般化として，環 R 上の加群 M の部分可群のなす族もモジュラ束になることがわかる．ミートは $\cap$，ジョインは $+$（加群の和）である．モジュラ律の証明は上とまったく同様である．なお，この場合，一般に (F) が満たされるとは限らない．

例 1.29. 群 G の正規部分群のなす族は，（包含関係に関して）モジュラ束である．まず，正規部分群は交わりに関して閉じているので，2 つの正規部分群 M, N のミートは交わり $M \cap N$ であることがわかる．ジョインは積 $MN (= NM)$ である．まず $MN = NM$ を見るには $xy = xyx^{-1}x$ を注意すればよい．部分群であることは，$xyx'y' = (xyx^{-1}y)(y^{-1}xx'y)$ からわかる．正規性は $xMNx^{-1} = xMx^{-1}xNx^{-1} \in NM$ からわかる．MN が M と N を含む最小の（正規）部分群であることは明らかだろう．モジュラ等式を見る．$L \supseteq N$ として，$x = yz \in L \cap MN$ をとる．ここで $y \in M, z \in N$. $L \supseteq N$ なので，$y = xz^{-1} \in L$. つまり，$y \in L \cap M$．よって $x = yz \in (L \cap M)N$.

なお，上の 2 つの例は，（実質的に）アーベル群の場合の特殊ケースといえる．

命題 1.30. モジュラ束の 2 元 x, y について，$[x \wedge y, x]$ と $[y, x \vee y]$ は同型である．同型写像は，

$$[x \wedge y, x] \ni \quad z \longmapsto z \vee y \quad \in [y, x \vee y].$$

逆写像は

$$[y, x \vee y] \ni \quad u \longmapsto u \wedge x \quad \in [x \wedge y, x].$$

で与えられる．

証明. 2 つの写像が半順序を保つことは例 1.13 で見たので互いに逆写像の関係にあることをいえばよい．すわなち，$(z \vee y) \wedge x = z$ と $(u \wedge x) \vee y = u$ を示せば十分である．前者については，$z \preceq x$ に注意してモジュラ律を使うと $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z = z$．最後の等式は $x \wedge y \preceq z$ より．$(u \wedge x) \vee y = u$ も同様． □

命題 1.31. 高さ有限のモジュラ束は JD 条件を満たす．

証明. 高さ n に関する帰納法を使う．$n=1$ のときは明らかで $n \geq 2$ と仮定してよい．高さ n を達成する極大チェインを $0=x_0 \prec: x_1 \prec: \cdots \prec: x_n = 1$ とし，任意の極大チェインを $0 = y_0 \prec: y_1 \prec: \cdots \prec: y_m = 1$ とする．$n = m$ を示す．まず，x_{n-1}, y_{m-1} は 1 の直下の元であることに注意する．極大性より y_{m-1}, x_{n-1} は比較不能である．したがって $x_{n-1} \succ x_{n-1} \wedge y_{m-1} \prec y_{m-1}$ である．実は：

- $x_{n-1} :\succ x_{n-1} \wedge y_{m-1} \prec: y_{m-1}$.

もしも，$\succ x_{n-1} \wedge y_{m-1} \prec z \prec x_{n-1}$ なる z がとれると，$z, \succ x_{n-1} \wedge y_{m-1}, x_{n-1}, y_{m-1}, 1$ が部分束 N_5 を誘導してしまい，モジュラ束であることに矛盾.

$[0, x_{n-1}]$ の高さは $n-1$ で帰納法の仮定より任意の極大チェインの長さは $n-1$ である．さらに，$[0, x_{n-1} \wedge y_{m-1}]$ の高さは，$n-2$ でなくてはならない．なぜなら 0 から $x_{n-1} \wedge y_{m-1}$ までの任意の極大チェイン C に x_{n-1} を付け加えたものは，$x_{n-1} :\succ x_{n-1} \wedge y_{m-1}$ から $[0, x_{n-1}]$ の極大チェインになり，長さは $n-1$ である．よって C の長さは $n-2$ となる．また，C に y_{m-1} を付け加えたものは $x_{n-1} \wedge y_{m-1} \prec: y_{m-1}$ より，$[0, y_{m-1}]$ の長さ $n-1$ の極大チェインである．$[0, y_{m-1}]$ の高さは，$n-1$ 以下なので帰納法より，$n-1$ に一致する．すると，結局 $m=n$ でなくてはいけない． □

命題 1.32. 高さ有限の束 $\mathcal{L}$ の束に対し以下は同値：

(a) $\mathcal{L}$ はモジュラ束.

(b) 高さ関数 h が以下のモジュラ等式を満たす：

$$h(x) + h(y) = h(x \wedge y) + h(x \vee y) \quad (x, y \in \mathcal{L}). \tag{1.7}$$

証明. $\mathcal{L}$ をモジュラ束とする．2 元 x, y をとる．JD 条件より，$h(x \vee y) - h(x)$ は，$[x, x \vee y]$ の高さに一致することに注意する．同様に $h(y) - h(x \wedge y)$ は，$[x \wedge y, y]$ の高さに一致する．$[x, x \vee y]$ と $[x \wedge y, y]$ は同型なので高さは一致する．よって等式が出る.

逆に高さ関数がモジュラ等式を満たすとする．3 元 x, y, z で $x \succeq z$ なるものを考えよう．モジュラ等式を繰り返し使うと

$$\begin{aligned}
h(x \wedge (y \vee z)) &= h(x) + h(y \vee z) - h(x \vee y \vee z) \\
&= h(x) + h(y) + h(z) - h(y \wedge z) - h(x \vee y) \\
&= h(x \wedge y) + h(z) - h(x \wedge y \wedge z) \\
&= h((x \wedge y) \vee z)
\end{aligned}$$

を得る．ここで $x \succeq z$ なので $x \vee y = x \vee y \vee z$，$y \wedge z = x \wedge y \wedge z$ を使った．$x \wedge (y \vee z) \succeq (x \wedge y) \vee z$ かつ $h(x \wedge (y \vee z)) = h((x \wedge y) \vee z)$ なので，$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee z$ が成立しなければならない（(1.4) の原理). □

1.3.3　セミモジュラ束，幾何束

（上方）セミモジュラ束（(upper-)semimodular lattice）とは，つぎの（上方）セミモジュラ律を満たす束である：

（上方）セミモジュラ律： $x \wedge y \prec: x \Rightarrow y \prec: x \vee y$

双対的な条件 $x \vee y \succ: x \Rightarrow y \succ: x \wedge y$ は下方セミモジュラ律という．下方セミモジュラ律を満たす束を下方セミモジュラ束（lower-semimodular lattice）という．下方セミモジュラ束は，（上方）セミモジュラ束の双対である.

例 1.33 (分割束)**.** 有限集合 E のすべての分割からなる集合 $\mathcal{P}(E)$ を考える．$\mathcal{P}(E)$ 上の細分関係による半順序をいれる．すなわち，分割 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ に対して，$\mathcal{X} \preceq \mathcal{Y}$ が成り立つことを $\mathcal{X}$ の各元が $\mathcal{Y}$ のどれかの元に含まれる，として定義する．すると $\{\{e\} \mid e \in E\}$ が最小元で $\{\{E\}\}$ が最大元である．$\mathcal{X} = \{X_1, X_2, \ldots, X_k\}$, $\mathcal{Y} = \{Y_1, Y_2, \ldots, Y_l\}$ のミート $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$ は共通細分 $\{X_i \cap Y_j\}_{i,j}$ で与えられる．よってミート半束であり，最大元があるので束となる．分割 $\mathcal{X}$ の直下の元は，$\mathcal{X}$ のある元を 2 つに分割したものに置きかえて得られる分割である．このことから $\mathcal{X}$ の高さは $n - 1 - |\mathcal{X}|$ がわかる．

次に分割束がセミモジュラになることを見る．2 つの分割 $\mathcal{X},\mathcal{Y}$ について $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y} \prec: \mathcal{X}$ なる状況を考える．これは，$\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$ は，$\mathcal{X}$ のある元 X を 2 つ X_1, X_2 に分割して得られるということである．そして，X 以外の任意の元は，$\mathcal{Y}$ のどれかの元に含まれる．$\mathcal{Y}$ において，X_1 を含む元を Y_1，X_2 を含む元を Y_2 とする．そして，$\mathcal{Y}$ において Y_1, Y_2 を $Y_1 \cup Y_2$ に置きかえて得られる分割を $\mathcal{Y}'$ とすると，$\mathcal{Y}'$ は $\mathcal{Y}$ の直上の元で，さらに $\mathcal{X}$ の上界でもある（Y は X を含んでいるので）．なので $\mathcal{Y}' = \mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ であって，セミモジュラ律が得られた．

補題 1.34. モジュラ束はセミモジュラ束である．

証明. モジュラ束において，$x \wedge y \prec: x$ となっているとする．もしも，$y \prec: x \vee y$ でないなら，$y \prec z \prec x \vee y$ なる元 z がある．$z \prec x \vee y$ より，z は y の上界でない．つまり，$z \wedge y = y$ でない．なので，$x \wedge y \preceq z \wedge y \prec x$ であるが，$x \wedge y \prec: x$ であったので $x \wedge y = z \wedge x$. すると，$z \wedge (x \vee y) = z \neq y = (z \wedge x) \vee y$ となりモジュラ等式に矛盾． □

モジュラ束は，下方セミモジュラ束でもある（双対をとってもモジュラ束だから）．なお，上方かつ下方セミモジュラ束はモジュラ束に一致することが知られている．

例 1.35. E を有限次元ベクトル空間 V の（非ゼロ）ベクトルの部分集合とする．E は V の基底を含むことにする．E の部分集合によってスパンされる部分空間からなる族を $\mathcal{S}_E \subseteq \mathcal{S}(V)$ とし，包含に関する半順序をいれる．すると，$X, Y \in \mathcal{S}_E$ なら $X + Y \in \mathcal{S}$ となり，ジョインは $\mathcal{S}(V)$ のものと一致する．したがって，ジョイン半束となり，最大元 V，最小元 $\{0\}$ があるので $\mathcal{S}_E$ は束になる（補題 1.15, $\mathcal{S}(V)$ が (F) を満たすので $\mathcal{S}_E$ も満たす）．このとき，ミート $X \wedge Y$ は，$X \cap Y \cap E$ からスパンされる空間である．また，この場合でも次元 dim はランク関数となる．なぜなら X が Y の直下の元なら Y は $v \in (Y \setminus X) \cap E$ と $X \cap E$ からスパンされる空間に等しく，$\dim Y = \dim X + 1$ が成り立つ．さらに dim は，不等式

$$\dim X + \dim Y \geq \dim X \wedge Y + \dim X + Y \quad (X, Y \in \mathcal{S}_E) \tag{1.8}$$

を満たす．これは等式 (1.6) と $X \wedge Y \subseteq X \cap Y$ からわかる．後で見るようにこの不等式からただちにセミモジュラ性が示される．

この束 $\mathcal{S}_E$ は，X を $X \cap E$ に対応させることで，べき集合族 2^E の部分集合ともみなせる．このときは，X, Y のミートは，$X \cap Y$ に一致して，ジョインは，$X \vee Y = \bigcap\{Z \in \mathcal{S}_E \mid X \cup Y \subseteq Z\}$ となる．要素数 $|X|$ は高さ関数を与えないことに注意する．

セミモジュラ性は部分束や双対には遺伝しないが区間には遺伝する．

補題 1.36. セミモジュラ束の任意の区間はセミモジュラ束である．

証明は明らかだろう．

命題 1.37. 高さ有限のセミモジュラ束は JD 条件を満たす．

証明. 高さ n に関する帰納法を使う．$n = 1$ のときは明らかで $n \geq 2$ と仮定してよい．高さ n を達成する極大チェインを $0 = x_0 \prec: x_1 \prec: \cdots \prec: x_n = 1$ とし，任意の極大チェインを $0 = y_0 \prec: y_1 \prec: \cdots \prec: y_m = 1$ とする．$n = m$ を示す．$x_1 = y_1$ のときは，$[x_1, 1]$ に帰納法を適用すればよい．$x_1 \neq y_1$ とする．$x_1 \wedge y_1 = 0 \prec: x_1$ なのでセミモジュラ律から $x_1 \vee y_1$ は，x_1, y_2 の直上の元となる．よって，命題 1.31 の証明の議論を，順序を反転させて適用すれば $n = m$ を得る．

セミモジュラ束特有の大事な注意：$x_{n-1} \wedge y_{m-1}$ は，x_{n-1}, y_{m-1} の直下の元とは限らないの命題 1.31 のときのように「最大元から下に向かって」証明することはできない． □

命題 1.38. 高さ有限の束 $\mathcal{L}$ の束に対し以下は同値：

(a) $\mathcal{L}$ はセミモジュラ束．

(b) 高さ関数 h が以下の劣モジュラ不等式を満たす：

$$h(x) + h(y) \geq h(x \wedge y) + h(x \vee y) \quad (x, y \in \mathcal{L}). \tag{1.9}$$

この不等式はセミモジュラ不等式とも呼ばれる．

証明. $\mathcal{L}$ をセミモジュラとし，2 元 x, y をとる．JD 条件より，$h(x) - h(x \wedge y)$ は $[x \wedge y, x]$ の高さで $h(x \vee y) - h(y)$ は $[y, y \vee x]$ の高さである．よって，$[x \wedge y, x]$ の極大チェインより長くない $[y, x \vee y]$ の極大チェインが構成できればよい．$x \wedge y = u_0 \prec: u_1 \prec: \cdots \prec: u_k = x$ を $[x \wedge y, x]$ の極大チェインとする．それに対して，$\vee y$ を作用させた $[y, x \vee y]$ のチェイン

$$y = u_0 \vee y \preceq u_1 \vee y \preceq \cdots \preceq u_k \vee y = x \vee y$$

を考える．このチェインが極大をあることを示す．それは，$u_i \vee y \prec u_{i+1} \vee y$ ならば $u_i \vee y \prec: u_{i+1} \vee y$ を示せばよい．まず $u_i \vee y \not\succeq u_{i+1}$ である（そうでないと $u_i \vee y = u_i \vee y \vee u_{i+1} = y \vee u_{i+1}$）．したがって，$(u_i \preceq)(u_i \vee y) \wedge u_{i+1} \prec u_{i+1}$ であるが，$u_i \prec: u_{i+1}$ より $(u_i \vee y) \wedge u_{i+1} = u_i \prec: u_{i+1}$ である．セミモジュラ律より，$u_i \vee y \prec: (u_i \vee y) \vee u_{i+1} = y \vee u_{i+1}$．

次に，高さ関数 h がセミモジュラ不等式を満たすとする．高さに関する帰納法をつかう．$x \wedge y \prec: x$ なる x, y を考える．帰納法によって，$x \vee y = 1$ と仮定してよい．特に，$x \prec 1$ なので，帰納法により，$[0, x]$ はセミモジュラで JD 条件がなりたつ．すると，$h(x \wedge y) = h(x) - 1$ が成立．$h(x) + h(y) \geq h(x \wedge y) + h(x \vee y) = h(x) - 1 + h(x \vee y)$ より，$h(x \vee y) - h(y) \leq 1$．$h$ は整数値で $h(x \vee y) \geq h(y)$ より，$h(x \vee y) - h(y) \in \{0, 1\}$ で $h(x \vee y) - h(y) = 0$ はありえない（そうでないとすると $x \vee y = y$, $x \preceq y$, $x \wedge y = x$ で矛盾）．よって，$h(x \vee y) - h(y) = 1$．これは $y \prec: x \vee y$ と等価． □

幾何束（geometric lattice）とは，有限高さのセミモジュラ束であって，任意の元がアトムのジョインとして書けるものである．例 1.35 の $\mathcal{S}_E$ は幾何束であり，その代表的な例である．幾何束と（単純）マトロイド（matroid）の同等性はよく知られている．マトロイドの立場からは例 1.35 は線形マトロイドと呼ばれるものである．なお，分割束（例 1.33）も幾何束でマトロイドの観点からは完全グラフのサイクルマトロイドにしている．サイクルマトロイドは線形マトロイドなので分割束は，例 1.35 の特殊ケースである．

幾何束とはならないが重要なセミモジュラ束のクラスを最後に挙げる．

例 1.39. アンチマトロイド（antimatroid）とは，有限集合 E の部分集合の族 $\mathcal{A} \subseteq 2^E$ であって，次の３条件を満たすものである．

- $\emptyset, E \in \mathcal{A}$.
- $X, Y \in \mathcal{A}$ なら $X \cup Y \in \mathcal{A}$.
- 非空な $X \in \mathcal{A}$ に対してある $e \in X$ が存在して $X \setminus \{e\} \in \mathcal{A}$.

アンチマトロイドにはそれ自体にたくさんの例があり基本的な離散構造として認識されている．例えば，木の頂点部分集合であって取り除いても木になるものからなる部分集合族，$\mathbb{R}^n$ の有限点集合の部分集合であって凸集合の補集合となるものからなる部分集合族，などである．

アンチマトロイド $\mathcal{A}$ に包含による順序をいれると，２つ目の条件より，X, Y のジョインは $X \cup Y$ で与えられ，半束となる．１つ目の条件より，最大元と最小元が存在するのでミートも存在して $X \wedge Y =$

$\bigcup\{Z \mid Z \subseteq X \cap Y\}$ となる．3 番目の条件より，$X \in \mathcal{A}$ の高さは要素数 $|X|$ に一致する．すると $|X| + |Y| = |X \cap Y| + |X \cup Y|$ と $X \wedge Y \subseteq X \cap Y$ より

$$|X| + |Y| \geq |X \wedge Y| + |X \cup Y| \quad (X, Y \in \mathcal{A})$$

が成り立つのでセミモジュラ束であることがわかる．

1.4　文献案内

次の本の第 2 章が束論を扱っていて，組合せ論・離散数学の立場からは読みやすいと思う．

- M. Aigner: *Combinatorial Theory*, Springer-Verlag, New-York. 1979.

条件 (F) をベースにして議論をすすめるやり方もこの本にしたがった．マトロイドとの関係についても書いてある．

現在，次の本が束論の定番の教科書のようである．

- G. Grätzer: *Lattice Theory: Foundation*, Birkhäuser/Springer Basel AG, Basel, 2011.

最近出た続編ではさまざまなトピックを扱っている．

- G. Grätzer and F. Wehrung (eds.): *Lattice Theory: Special Topics and Applications. Vol. 1.* Birkhäuser/Springer, Cham, 2014.
- G. Grätzer and F. Wehrung (eds.): *Lattice Theory: Special Topics and Applications. Vol. 2.* Birkhäuser/Springer, Cham, 2016.

Vol 2 にアンチマトロイド・凸幾何を解説した章がある．

セミモジュラ束に焦点をあてた

- M. Stern: *Semimodular Lattices: Theory and Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999

も有用な情報源である．

束論の創始者の Birkhoff の本

- G. Birkhoff: *Lattice Theory, Third Edition*, American Mathematical Society, Providence RI, 1967

もあるが，版を追うごとにページ数が増えていき，初版（1940 年）がコンパクト（155 ページ）で筆者にとっては読みやすく有用であった．しかし，初版は入手困難かもしれない．東大の総合図書館の書庫にはボロボロのものがあった．

日本語の本では，

- 伊理正夫，藤重悟：応用代数，コロナ社，東京，1988

の第 2 章に束論の簡単な解説がある．マトロイドや DM 分解についての解説もある．

モジュラ束と射影幾何の関係については

- 秋月康夫，滝沢精二： 射影幾何学，共立出版，東京，1957

の第 1, 2 章が参考になると思う．

第2章　分配束：Birkhoffの表現定理

この章で分配束に焦点をあて，応用上重要な Birkhoff の表現定理を証明する．この定理は次のことを主張するものである：

> 高さ n の分配束 $\mathcal{L}$ はある有限集合 P 上のリング族 $\mathcal{R} \subseteq 2^P$ に同型である．P の要素数は n に等しく，$\mathcal{R}$ は，P 上の半順序構造によって決まる．

一般に，高さ n の分配束の要素数は，n に関する指数オーダーである．一方で P の要素数は n で，半順序の情報は，$O(n^2)$ に過ぎない．すなわち，分配束 $\mathcal{L}$ は，半順序集合によってコンパクトに表現される．特に P を保持することよって，$\mathcal{L}$ の全要素を陽に保持せずに $\mathcal{L}$ を計算機で効率的に扱うことが可能となる．

2.1　Birkhoffの表現定理

半順序集合のイデアルとトポロジカルオーダー　まず，半順序集合から分配束・リング族が得られることを説明する．半順序集合 P のイデアル（ideal）とは，部分集合 X であって，$x \in X$ かつ $y \preceq x$ なら $y \in X$ を満たすものであった．$\mathcal{I}(P) \subseteq 2^P$ を P のイデアルからなる部分集合族とし，包含関係による順序を入れる．

補題 2.1. 半順序集合 P のイデアル族 $\mathcal{I}(P)$ はリング族である．特に包含関係に関して分配束になる．

証明. I, J をイデアルとする．$y \preceq x \in I \cap J$ のとき，I はイデアルなので $y \in I$．同様に $y \in J$．$y \preceq x \in I \cup J$ のとき，$x \in I$ または $x \in J$ である．一般性を失わずに $x \in I$ とすると，I はイデアルなので $x \in I \subseteq I \cup J$. □

この逆を主張するのが Birkhoff の表現定理である．次に，情報科学で頻繁に出てくる半順序集合のトポロジカルオーダーについて復習し，イデアルとの関係を説明する．有限半順序集合 P のトポロジカルオーダーとは，P の全要素の列 $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ であって，$u_i \preceq u_j$ なら $i \leq j$ を満たすものである．

補題 2.2. 有限半順序集合 P の部分集合 I について以下は同値：

(a) I がイデアルである．

(b) I はあるトポロジカルオーダー $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ の最初の部分 $\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ $(k \leq n)$ になっている．

証明. (b) $\Rightarrow$ (a) はトポロジカルオーダーの定義より従う．(a) $\Rightarrow$ (b). I の中で，$\preceq$ に関して極小な元をとり u_1 とする．次に，$I \setminus \{u_1\}$ の中で，$\preceq$ に関して極小な元をとり u_2 とする．次に $I \setminus \{u_1, u_2\}$ の中で極小な元を・・・このプロセスを $I = \{u_1, \ldots, u_k\}$ となるまで繰り返す．そして，$P \setminus I$ の極小な元を同様に取り除いていくことを繰り返すと所望のトポロジカルオーダーを得る． □

トポロジカルオーダーの集合は $\preceq$ を決める．

補題 2.3. 有限半順序集合 P の 2 元 x, y について以下は同値：

(a) $x \prec y$ が成り立つ．

(b) 任意のトポロジカルオーダー $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ に対して，x が y より先に現れる．すなわち $i < j$ に対して $(u_i, u_j) = (x, y)$.

証明. (a) ⇒ (b) は明らか．(b) ⇒ (a)．対偶を示す．$x \prec y$ でないなら，x と y が比較不能か $x \succ y$ である．後者の場合は，どんなトポロジカルオーダーについても y が x より最初に現れるので (b) は成り立たない．x と y が比較不能とする．x の主イデアル $I(x)$ と y の主イデアル $I(y)$ の和 $I(x) \cup I(y)$ はイデアルである（補題 2.1）．さらにそれから x, y を除いた $J := (I(x) \cup I(y)) \setminus \{x, y\}$ もイデアルである ($z \preceq u \in J$ なら z は x, y でありえないので $z \in J$ となる)．すると，P から J を除くと，x, y は（比較不能なので）極小元となる．上の補題 2.2 の証明のように J を最初に取り除いて，次に x を除いてから，トポロジカルオーダーが作れる．同様に，J を最初に取り除いて，次に y を除いてからも，トポロジカルオーダーが作れる．これは，(b) が成り立たないことを示している． □

既約元　分配束に対応する半順序を構成するために既約元の概念を導入する．元 x が（ジョイン）既約 (join-irreducible) とは，$x \neq 0$ であって，$x = y \vee z$ なら $x = y$ か $x = z$ が成り立つときをいう．

補題 2.4. $\mathcal{L}$ を高さ有限の半束とする．

(1) a が既約 $\Longleftrightarrow$ 直下の元が一意に存在．特にアトムは既約である．

(2) $x = \bigvee\{a : \text{既約} \mid a \preceq x\}$.

空集合に対するジョインは最小元であった．(F) を満たすので最小元でなければ直下の元が存在することにも注意.

証明. (1) もしも a の直下の元が 2 つ $x, y (\neq a)$ あれば $a = x \vee y$ と書けるので既約ではない．逆に直下の元 b が一意に存在すると，$a = x \vee y$ とする．$x, y \prec a$ なら $x, y \preceq b$, $x \wedge y \preceq b \prec a$ となってしまうので x と y のどちらかは a に一致しなければならない.

(2) x 自身が既約なときは明らか．そうでないとすると x は直下の元たちのジョインである．直下の元は，x よりも高さが小さいので，高さに関する帰納法を用いればよい． □

Birkhoff の表現定理　$\mathcal{L}^{\mathrm{ir}} \subseteq \mathcal{L}$ を既約元からなる部分集合とし，$\mathcal{L}$ の半順序を制限することで $\mathcal{L}^{\mathrm{ir}}$ を $\mathcal{L}$ の部分半順序集合とみなす.

定理 2.5 (Birkhoff の表現定理)**.** 有限高さの分配束 $\mathcal{L}$ は既約元集合 $\mathcal{L}^{\mathrm{ir}}$ のイデアル族 $\mathcal{I}(\mathcal{L}^{\mathrm{ir}})$ と同型である．同型写像 $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{I}(\mathcal{L}^{\mathrm{ir}})$ は，

$$x \mapsto \{a \in \mathcal{L}^{\mathrm{ir}} \mid a \preceq x\} \tag{2.1}$$

で与えられる．逆写像は，

$$I \mapsto \bigvee_{a \in I} a \tag{2.2}$$

となる．

まず半束の場合についてもこの定理が部分的には成立することを示す．このような考察は，分配束の半束バージョンであるメディアン半束に対する拡張を論ずる際に有用である．写像 φ を一般の半束の場合に拡張しておく．

補題 2.6. $\mathcal{L}$ を高さ有限の半束とする．$\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{I}(\mathcal{L}^{\mathrm{ir}})$ は順序を保つ単射である．また，$I \in \varphi(\mathcal{L})$ の逆元は，(2.2) で与えられる．特に，逆写像 $\varphi^{-1} : \varphi(\mathcal{L}) \to \mathcal{L}$ も順序を保つ.

証明. $\varphi(x)$ は確かに $\mathcal{I}(\mathcal{L}^{\mathrm{ir}})$ のイデアルであることに注意する．補題 2.4 の (2) から φ^{-1} の式と単射性がわかる．$x \preceq y \Leftrightarrow \varphi(x) \subseteq \varphi(y)$ も明らか． □

補題 2.7. 高さ有限の分配束 $\mathcal{L}$ と 2 元 $x, y \in \mathcal{L}$, $x \prec: y$ に対して，ある元 z が存在して $[0, y] \setminus [0, x] = [z, y]$ が成り立ち，z は $[z, y]$ 内の $\mathcal{L}$ における唯一の既約元である．

証明. $U := [0, y] \setminus [0, x]$ は，$y = x \vee u$ となる元 u からなる集合である．すると $u, u' \in U$ に対し，分配律から $x \vee (u \wedge u') = (x \vee u) \wedge (x \vee u') = y \wedge y = y$ なので，$u \wedge u' \in U$．一方，$u \vee u' \in U$ は明らか $(y \succeq x \vee (u \vee u') \succeq x \vee u = y)$．したがって，$U$ には，最小元 z があって，$U = [z, y]$ とならなければならない．$x \wedge z$ は z の直下の元である（下セミモジュラ性，あるいはモジュラ等式 (1.7) より）．一方，$z \succeq w$ なら，最小性より，$x \succeq w$ である．したがって，$x \wedge z \succeq w$．よって，直下の元は一意である．z 以外の元 $v \in [z, y]$ に対しても $x \wedge v \prec: v$ で $[z, v]$ における直下の元がとれるので v 以外は既約ではない．□

補題 2.8. 高さが有限 h の分配束は有限束であり，既約元の個数は h に等しい．

証明. 1 の直下の元 x をとって，上のようにして $\mathcal{L} \setminus [0, x] = [z, 1]$ を考えると $\mathcal{L} = [0, x] \cup [z, 1]$（非交差和）で $[0, x]$, $[z, 1]$ は，両者とも高さ $h - 1$ 以下である．前者の高さは，$h - 1$ で後者はただ一つの既約元 z を含んでいる．高さに関する帰納法により，$\mathcal{L}$ の元の個数が有限個であり，$\mathcal{L}$ の既約元の個数は h になる．ここで部分束 $[0, x]$ における既約元は $\mathcal{L}$ においても既約であることに注意する．□

定理 2.5 の証明. 補題 2.6 から，φ が全射であることをいえば十分である．X をイデアルとする．$|X|$ に関する帰納法を用いる．X が空なら最小元 0 の像である．$|X| \geq 1$ とする．これに対して，有限半順序集合 $\mathcal{L}^{\mathrm{ir}}$ のトポロジカルオーダー $z_1, z_2, \ldots, z_n$ であって，$X = \{z_1, z_2, \ldots, z_k\}$ なるものがとれる．ここで，$X' := \{z_1, \ldots, z_{k-1}\}$ と置く．X' もイデアルである．帰納法により，ある元 $x \in \mathcal{L}$ に存在して $\varphi(x) = X'$．さて，$y := x \vee z_k$ と置くと $y \succ x$ である．なぜなら，$z_k \not\preceq x$ $(z_k \notin \varphi(x))$ だから．$\varphi(y) = X$ を示そう．ここで，$x \wedge z_k \prec: z_k$ とならなくてはいけない．そうでないとすると $x \wedge z_k \prec: z' \prec z_k$ なる z' をとる．すると $x \prec: x \vee z'$ で，上の補題を $[0, x \vee z']$ と x に対して適用すると既約元 $u \notin \varphi(x)$ であって，$u \preceq z' \prec z_k$ がとれてしまう．これは，X がイデアルであることに矛盾する．すると，$x \prec: y (= x \vee z_k)$ が成り立ち，同様な議論から $[0, y] = [0, x] \cup [y, z_k]$(非交差) となり，$[y, z_k]$ の $\mathcal{L}$ における既約元は z_k のみである．よって，$\varphi(y) = \varphi(x) \cup \{z_k\} = X$ となる．□

定理 2.9. 高さ有限 h のブール束は，要素数 h の集合 S 上のべき集合束 2^S と同型である．

証明. 高さ有限のブール束における既約元はアトムに他ならないことを示す．アトムでない元 x の直下の元 x' をとると $[0, x]$ もブール束なので x' の $[0, x]$ における補元 $y (= x)$ が存在して，$x' \vee y = x$ である．よって，x は既約ではない．一方，アトムは既約であり，互いに比較不能である．互いに比較不能な元からなる半順序集合のイデアル族はべき集合族に一致するので定理の主張が示された．□

極大チェインとトポロジカルオーダーの関係　以上の議論から以下がわかる．

命題 2.10. $\mathcal{L}$ を高さ有限の分配束とする．このとき，$\mathcal{L}$ の極大チェインの集合と $\mathcal{L}^{\mathrm{ir}}$ のトポロジカルオーダーの集合は以下のようにして一対一に対応する：

- 極大チェイン $(0 = x_0 \prec: x_1 \prec: \cdots \prec: x_n = 1)$
  $\longmapsto$ トポロジカルオーダー $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, where $[0, x_i] \setminus [0, x_{i-1}] = [z_i, x_i]$.
- トポロジカルオーダー $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$
  $\longmapsto$ 極大チェイン $(0 = x_0 \prec: x_1 \prec: \cdots \prec: x_n = 1)$, where $x_i = x_{i-1} \vee z_i$.

ここで，$z_1, z_2, \ldots, z_i$ は x_i 以下の既約元集合に一致するのでイデアルになる．よって，$z_j \prec z_i$ なら $j < i$ となり，確かに $(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ はトポロジカルオーダーになる．

分配束の半順序集合による表現と一意性　有限分配束 $\mathcal{L}$ がある半順序集合 P のイデアル族 $\mathcal{I}(P)$ と同型となっているとき，$\mathcal{L}$ は P で表現されているということにする．P は同型性を除いて一意に決まる．

命題 2.11. $\mathcal{I}(P) \simeq \mathcal{I}(P') \Leftrightarrow P \simeq P'$.

証明. $\mathcal{I}(P) \simeq \mathcal{I}(P')$ なら $\mathcal{I}(P)^{\mathrm{ir}} \simeq \mathcal{I}(P')^{\mathrm{ir}}$ なので $P \simeq \mathcal{I}(P)^{\mathrm{ir}}$ がいえれば十分である．P の元 x に対して，主イデアル $I(x)$ を対応させることで写像 $P \to \mathcal{I}(P)$ が得られるが，実はこれが既約元への全単射 $P \to \mathcal{I}(P)^{\mathrm{ir}}$ である．なぜなら，イデアル $I \subseteq P$ は，極大元たちの和 $I = \bigcup_{x:\text{極大}} I(x)$ でかけ，I が分配束 $\mathcal{I}(P)$ において，既約であることとある x の主イデアル $I = I(x)$ となることは同値になるからである．さらに $x \preceq y \Leftrightarrow I(x) \subseteq I(y)$ なので順序も保存される．よって，$P \simeq \mathcal{I}(P)^{\mathrm{ir}}$ である． □

リング族に対する精密化　応用の場面では，分配束はある有限集合上のリング族として現れる．その際，そのリング族を表現する半順序集合は，既約元によるものより便利なものがある．$\mathcal{R} \subseteq 2^E$ を有限集合 E 上のリング族とする．最小元は $X_* := \bigcap_{X \in \mathcal{R}} X$，最大元は $X^* := \bigcup_{X \in \mathcal{R}} X$ で与えられる．$\mathcal{R}$ の分配束としてのジョイン既約元 Z に対して，その（一意に決まる）直下の元 Z' との差集合 $D_Z = Z \setminus Z'$ を対応させる．$\mathit{\Pi}$ をそのような差集合からなる集合とする．

命題 2.12. (1) 2 つの異なる既約元 Z, W に対して，$D_Z \cap D_W = \emptyset$.

(2) 任意の極大チェイン $X_* = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_n = X^*$ に対して，

$$\mathit{\Pi} = \{X_i \setminus X_{i-1} \mid i = 1, 2, \ldots, n\}.$$

特に $\mathit{\Pi}$ の $X^* \setminus X_*$ の分割である．

証明. (2) を示す．任意の i に対して，$X_i = X_{i-1} \cup Z$，$Z' = X_{i-1} \cap Z$ となることを見た．したがって $X_i \setminus X_{i-1} = Z \setminus Z'$ である（ベン図を描いてみよ）．すべての既約元は，このようにして現れるので (1) もわかる． □

したがって $\mathit{\Pi}$ は $X^* \setminus X_*$ の分割であって，各元は既約元と一対一に対応している．そこで，$\mathit{\Pi}$ 上の半順序 $\preceq$ を $D \preceq F \Leftrightarrow Z \subseteq W$ where $D = Z \setminus Z'$, $F = W \setminus W'$, Z, W, Z', W' は既約元とその直下の元, として定義する．よって，リング族の台集合の分割上の半順序集合による表現が得られた．

命題 2.13. $\mathcal{R}$ は $\mathcal{I}(\mathit{\Pi})$ と同型である．$\mathcal{I}(\mathit{\Pi})$ から $\mathcal{R}$ への同型写像は，

$$\mathit{\Lambda} \mapsto X_* \cup \bigcup_{D \in \mathit{\Lambda}} D \quad (\text{非交差和})$$

で与えられる．

こちらの表現がなぜ便利かというと：

- $\mathit{\Pi}$ が台集合の分割なのでイメージしやすく，半順序の自然な意味付けも得られることがある．
- リング族が何らかの形で与えられ，その半順序集合表現が欲しいとき，既約元を見つける必要がなく，「任意の」極大チェインを最小元から最大元まで探索すればよい．そのような探索の実行と，2 つの差集合の比較ができれば目標の半順序表現が得られる．

3 章と 4 章において，具体的な例題でこれを実践する．

2.2　劣モジュラ関数と基本分割

応用の場面では，分配束が現れる背景には劣モジュラ関数の存在に起因していることがしばしばある．実際，劣モジュラ関数の最小化元の集合がなす集合族はリング族になり，その意味では分配束と劣モジュラ関数は表裏一体の存在であるといってよいだろう．ここでは，劣モジュラ関数と分配束・リング族の関係について簡単に説明する．

E を有限集合とする．E の部分集合族 2^E 上の関数 $f : 2^E \to \mathbb{R}$ が劣モジュラ（submodular）であるとは，

$$f(X) + f(Y) \geq f(X \cap Y) + f(X \cup Y) \quad (X, Y \subseteq E) \tag{2.3}$$

を満たすときをいう．

注意 2.14. 定義領域をリング族 $\mathcal{R} \subseteq 2^E$ にする場合や 2^E のままで値域を $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ することもある．$\{0,1\}^n$ と 2^E の同型性（例 1.14）を利用して，劣モジュラ関数を $f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ であって

$$f(x) + f(y) \geq f(\min(x, y)) + f(\max(x, y)) \quad (x, y \in \{0,1\}^n)$$

と定義してもよい．また，一般の（分配）束上で $f(x) + f(y) \geq f(x \wedge y) + f(x \vee y)$ を満たす関数 f を劣モジュラ関数という．

f を最小化する元のなす集合 $\mathcal{D}(f) \subseteq 2^E$ と書く．すなわち

$$\mathcal{D}(f) := \{X \subseteq E \mid f(X) \leq f(Y)\ (\forall Y \subseteq E)\}. \tag{2.4}$$

補題 2.15. 劣モジュラ関数 $f : 2^E \to \mathbb{R}$ に対して，$\mathcal{D}(f)$ は E 上のリング族である．すなわち，

$$X, Y \in \mathcal{D}(f) \Rightarrow X \cap Y, X \cup Y \in \mathcal{D}(f). \tag{2.5}$$

証明. $X, Y \in \mathcal{D}(f)$ なら，$f(X) \leq f(X \cup Y)$, $f(Y) \leq f(X \cap Y)$ なので $f(X) + f(Y) \leq f(X \cup Y) + f(X \cap Y)$ であるが，劣モジュラ不等式から等号が成り立つ．したがって，$f(X) = f(Y) = f(X \cup Y) = f(X \cap Y)$ なので，$X \cup Y, X \cap Y \in \mathcal{D}(f)$. □

劣モジュラ関数は多項式時間で最小化できる．すなわち，ある多項式 p が存在して高々 $p(|E|)$ 回の関数値呼び出しによって最小値・最小化元を求めることができ，さらに，$\mathcal{D}(f)$ の半順序集合表現も得られる．一応，そのようなジェネリックなアルゴリズムがあるが，多くの具体的な問題では特化した高速で簡明なものが知られている．

基本分割　パラメータを含む劣モジュラ関数の最小化元たちをすべてのパラメータに対して一挙に表現する基本分割の理論を紹介する．説明の都合上に劣モジュラ関数のかわりに優モジュラ関数で考える．優モジュラ関数とは，

$$f(X) + f(Y) \leq f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \quad (X, Y \subseteq E) \tag{2.6}$$

を満たす関数で，いい換えると $-f$ が劣モジュラ関数となるものである．最小化のかわりに最大化で考える．このとき，最大化元集合 $\mathcal{D}(f)$ がリング族になる．

２つの優モジュラ関数 f, h の非負結合の最大化問題を考える．ここで２つ目の優モジュラ関数 h は，次の意味で（狭義）単調減少とする：

$$h(X) > h(Y) \quad (X, Y \in E : X \subset Y). \tag{2.7}$$

応用上は

$$h(X) = |E \setminus X|$$

がよく現れる．そして，非負結合係数はパラメータ $\lambda \in [0,1]$ によって指定されるものとする．すなわち，次の最大化問題を考える．

$$\begin{aligned} \text{Max.} \qquad & \lambda f(X) + (1-\lambda)h(X) \\ \text{s.t.} \qquad & X \in 2^E. \end{aligned}$$

また，優（劣）モジュラ性は非負結合に関して閉じているので，この問題の目的関数は優モジュラである．したがって，$\lambda \in [0,1]$ を 1 つ決めたときの最大化元集合 $\mathcal{D}^\lambda$ は，リング族になり半順序集合で表現される．実は，すべての λ について同時に 1 つの半順序集合で表現することができることを示そう．

それを説明するために，この問題を等価な問題に書き換える．今，2^E から 2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ への関数 $\varphi : 2^E \to \mathbb{R}$ を

$$\varphi(X) := (h(X)\ f(X))^\top \quad (X \in 2^E) \tag{2.8}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} \text{Max.} \qquad & (1-\lambda\ \lambda)^\top \varphi(X) \\ \text{s.t.} \qquad & X \in 2^E. \end{aligned}$$

とも書ける．これは，有限集合 $\varphi(2^E) \subseteq \mathbb{R}^2$ の凸包となる凸多角形上の線形計画法である．$\lambda = 0$ のときは，h の単調性から $X = E$ が唯一の最適解で $\varphi(E) = (h(\emptyset), f(\emptyset))$ である．λ を 0 から 1 へ動かしていくと，最適解 X の像 $\varphi(X)$ は，その凸多角形 Q の極大面をなす折れ線上を $(h(\emptyset), f(\emptyset))$ から左上方向へと移動していく．$\lambda = 1$ のとき，f の最大化元集合の像となる点または水平線分（最大化元が唯一でないとき）が，$(0,1)$ 方向を最大化する．

凸多角形 Q の極大点集合からなる折れ線の折れ曲がり点と端に φ でマップされる元 $X \subseteq E$ からなる部分集合を $\mathcal{E} \subseteq 2^E$ とおこう．

補題 2.16. (1) φ は，$\mathcal{E}$ 上で単射である．

(2) $\mathcal{E} \subseteq 2^E$ はチェインである．

証明. (1) $X, Y \in \mathcal{E}$ が φ で同じ点にマップされたとする．すなわち，$\varphi(X) = \varphi(Y)$．一方，優モジュラ不等式より

$$\begin{aligned} f(X) + f(Y) &\le f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \\ h(X) + h(Y) &\le h(X \cup Y) + h(X \cap Y) \end{aligned}$$

これより

$$\varphi(X) = \varphi(Y) \le \frac{1}{2}(\varphi(X \cup Y) + \varphi(X \cap Y)) \tag{2.9}$$

が成り立つ．ここで $\le$ は $\mathbb{R}^2$ のベクトル順序である．さて，$\varphi(X \cup Y)$, $\varphi(X \cap Y)$ も凸多角形 Q に属していて，線分 $[\varphi(X \cup Y), \varphi(X \cap Y)]$ の中点が右辺である．$\varphi(X) = \varphi(Y)$ は凸多角形 Q の端点なので，$\varphi(X) = \varphi(Y) = \varphi(X \cup Y) = \varphi(X \cap Y)$ 以外ありえない（図を描いてみよ）．特に $h(X) = h(Y) = h(X \cup Y) = h(X \cap Y)$ であるが，h の狭義単調性により $X = Y$ とならなければならない．

(2) $X, Y \in \mathcal{E}$ が折れ線上で線分 $[\varphi(X), \varphi(Y)]$ を構成している場合に X, Y が比較可能であることを示せばよい．上のようにして優モジュラ不等式を使うと

$$\varphi(X) + \varphi(Y) \le \varphi(X \cup Y) + \varphi(X \cap Y) \tag{2.10}$$

を得るが，この式は，（線分 $[\varphi(X), \varphi(Y)]$ の中点）$\le$（$[\varphi(X \cup Y), \varphi(X \cap Y)]$ の中点）を意味している．すると，等号が成立しなければならならず，結局，$[\varphi(X), \varphi(Y)] = [\varphi(X \cup Y), \varphi(X \cap Y)]$ が成立する（そうでないと後者の線分が Q の外に飛び出してしまう）．$(\varphi(X), \varphi(Y)) = (\varphi(X \cup Y), \varphi(X \cap Y))$ の場合，$h(X) = h(X \cup Y)$ が成り立ち，h の狭義単調性より $X \subseteq Y$ を得る．$(\varphi(X), \varphi(Y)) = (\varphi(X \cap Y), \varphi(X \cup Y))$ の場合は，同様に $h(X) = h(X \cap Y)$ より，$Y \subseteq X$ を得る．□

$\mathcal{E}$ は，チェインなので $\emptyset = X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \cdots \subset X_k$ となっているとしてよい．λ_i を折れ線を構成する線分 $[\varphi(X_{i-1}), \varphi(X_i)]$ が最大点となるパラメータとする．すると，

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k \leq 1$$

となって，

- $\mathcal{D}^{\lambda_i}$ は，最小元 X_{i-1}，最大元 X_i のリング族．
- 任意の $\lambda \in (\lambda_i, \lambda_{i+1})$ に対して，$\mathcal{D}^{\lambda}$ は X_i だけからなる．

それぞれのリング族 $\mathcal{D}^{\lambda_i}$ は，$X_i \setminus X_{i-1}$ の差集合分割の半順序集合 Π_i のイデアル族として表現できる．

$\mathcal{D}$ を $\mathcal{D}^{\lambda}$ のすべての λ に関する和とすると，$\mathcal{D}$ もリング族で $\mathcal{D}^{\lambda_i}$ の和である：

$$\mathcal{D} := \bigcup_{\lambda \in [0,1]} \mathcal{D}^{\lambda} = \bigcup_{1 \leq i \leq k} \mathcal{D}^{\lambda_i}.$$

$\mathcal{D}$ の半順序表現は，$\mathcal{D}^{\lambda_i}$ たちの表現から構成される．$\mathcal{D}^{\lambda_i}$ は，$X_i \setminus X_{i-1}$ の差集合分割の半順序集合 Π_i のイデアル族として表現できるので，それらの合併 $\Pi := \bigcup_i \Pi_i$ を考える．Π は，X_k の分割である．任意の $i < j$, $Z \in \Pi_i, W \in \Pi_j$ に $Z \prec W$ と半順序を追加することで，$\mathcal{D}$ の半順序表現が得られる．図を参照．このようにすべてのパラメータに関する最大元集合とその変化の様子が，E の部分集合の分割上の 1 つの半順序で捉えることができる．これを（優モジュラ関数対 f, h に関する）基本分割 (principal partition) といって，1960 年代から 70 年代にかけて伊理正夫，冨澤信明ら日本人研究者によって発展させられた．基本分割の応用例はたくさんあるが次節でＤＭ分解の精密化に応用されることを見る．

第3章　安定結婚問題

この章では，安定結婚問題と関連する分配束構造について解説する．各 n 人の男女が結婚相手を探している状況を考える．各人は n 人の異性に対して選好順序を持っている．このとき，妥当な男女マッチングをどのように定義して，そしてそのマッチングはどのように求められるのか，を考えるのが安定結婚問題である．Gale と Shapley は妥当なマッチングとして，**安定マッチング**なるものを導入し，さらに安定マッチングの 1 つが常に求まる Gale-Shapley アルゴリズム (GS アルゴリズム) を提案することで，安定結婚問題において**必ず安定マッチングが存在する**ことを示した．この問題・アルゴリズムは，多対一に自然に拡張でき，研修医配属などへの実応用がある．2012 年度のノーベル経済学賞（Roth と Shapley）は，安定マッチングの理論と応用が対象になっている．大学においても研究室配属などに実際に応用されている．東京大学においても進学選択方式（進振り）に応用されている．

安定マッチングは一意と限らず一般に複数存在する（n に関して指数サイズ）．安定マッチングからなる族には分配束の構造が入り Birkhoff の表現定理によって半順序集合を用いてコンパクトに表現される．この表現は，安定マッチングの中からさらに最適なものを見つける際に応用される．

安定マッチングに関する定番の教科書として

- D. Gusfield and R. W. Irving: *The Stable Marriage Problem: Structure and Algorithms*, MIT press, Cambridge, MA, 1989.

がある．本章をこの本を参考にして作成した．参考文献番号が書かれていない定理等についてもこの本を参照のこと．日本語の本では

- 宮崎修一: 安定マッチングの数理とアルゴリズム～トラブルのない配属を求めて～，現代数学社, 京都，2018

が参考になる．

3.1　安定マッチングと GS アルゴリズム

男女はそれぞれ n 人とする．各人は n 人の異性**全員**に対して，選好を表す全順序を持つとする．ある人 u が，異性 v よりも異性 w を好むとき，$w \prec_u v$ と表す．$w \prec_u v$ または $w = v$ のとき，$w \preceq_u v$ と表す．（完全）マッチングとは男女のペアの集合 M であって，各人がちょうど 1 度 M 内のペアに現れるものをいう．マッチング M における u の相手を $p_M(u)$ と表す．以降，M と書いたら，マッチングを表す．安定マッチングの概念は安定でない状況によって定義される．

定義 3.1 (ブロッキングペア，不安定ペア)**.** M に含まれないペア (x, y) について，$y \prec_x p_M(x)$ かつ $x \prec_y p_M(y)$ となるとき，(x, y) を**ブロッキングペア**と呼ぶ．

ブロッキングペア (x, y) の 2 人は M におけるそれぞれのペアを解消して，自分たちがペアになることを望むであろう．その意味でこのマッチングは不安定といえる．

定義 3.2 (安定マッチング)**.** ブロッキングペアがないマッチングを**安定マッチング**と呼ぶ．

例 3.3. 男性集合を $\{a, b, c\}$，女性集合を $\{1, 2, 3\}$ として以下のような選好リストが与えられる状況を考える．

$$
\begin{array}{c|ccc}
a & 2 & 3 & 1 \\
b & 3 & 1 & 2 \\
c & 2 & 1 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
1 & a & b & c \\
2 & b & c & a \\
3 & c & a & b
\end{array}
$$

選好順序は，左から右へ $\prec_u$ となっているとする．次のマッチングは，不安定である．

$$
\begin{array}{c|ccc}
a & 2 & \mathbf{3} & \boxed{1} \\
b & \boxed{3} & 1 & 2 \\
c & \boxed{2} & 1 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
1 & \boxed{a} & b & c \\
2 & b & \boxed{c} & a \\
3 & c & \boldsymbol{a} & \boxed{b}
\end{array}
$$

四角で囲んである対がマッチングのペアを表している．太字で示してある $(3, a)$ がブロッキングペアである．安定マッチングの例としては，

$$
\begin{array}{c|ccc}
a & 2 & 3 & \boxed{1} \\
b & 3 & 1 & \boxed{2} \\
c & 2 & 1 & \boxed{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
1 & \boxed{a} & b & c \\
2 & \boxed{b} & c & a \\
3 & \boxed{c} & a & b
\end{array}
$$

や

$$
\begin{array}{c|ccc}
a & 2 & \boxed{3} & 1 \\
b & 3 & \boxed{1} & 2 \\
c & \boxed{2} & 1 & 3
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|ccc}
1 & a & \boxed{b} & c \\
2 & b & \boxed{c} & a \\
3 & c & \boxed{a} & b
\end{array}
$$

がある．

本章の目的は，安定マッチングがなす束構造を明らかにすることである．その前に安定マッチングの存在性を確かめなければならない．

定理 3.4. 安定マッチングはいつも存在する．

Gale と Shapley は安定マッチングを必ず 1 つ出力するアルゴリズムを提案したことで，安定マッチングは常に存在することを示した．

Algorithm 1 Gale-Shapley アルゴリズム

1: 全員をフリー（パートナーがいない状態）にする．
2: フリーな男性 x は，今まで断られていない女性の中で最も好む女性 y にプロポーズする．y は，フリーならば，x とパートナーとなり，パートナー x' がいれば，x' と x の好きな方とパートナーとなる．
3: すべての男女がパートナーを持てば，そのペアを出力して終了．そうでなければ，2:へ．

GS アルゴリズムは，その構成から，受入保留（Deferred Acceptance）アルゴリズムとも呼ばれる．

定理 3.5. GS アルゴリズムは高々 n^2 反復で終了し，その出力は安定マッチングである．

証明. アルゴリズムの構成から以下がわかる：

- 男性がプロポーズする女性の順位は下がっていく．特に同じ女性に 2 度プロポーズすることはない．
- 1 度プロポーズを受けた女性は常に誰かとペアになっていて，ペアになる男性の順位は上がっていく．
- 各女性は複数の男性とペアになることはできない．同時に各男性は複数の女性とペアになることはできない．

したがって，少なくとも高々 n^2 反復後に男性は誰にもプロポーズできなくなる．もしも，ある男性がすべての女性からリジェクトされたすると，各女性は少なくとも 1 度はプロポーズされていることになり，誰かとペアになっているはずである．そのときは，n 人の女性それぞれに（異なる）パートナーがいるので，n 人すべての男性にはパートナーがいるはずである．つまり，男性がすべての女性からリジェクトされることはない．以上の議論より，高々 n^2 反復後に GS アルゴリズムは停止して完全マッチングを出力する．

次に，出力された完全マッチング（M と置く）が安定であることをいう．$y \prec_x p_M(x)$ なる任意のペア $(x, y) \notin M$ を考える．つまり，x は M での相手より y を好む．アルゴリズムの構成から，x はどこかの時点で y にリジェクトされたことになり，その時点で，y は x より好きな男性とペアになっていることになる．上で見たように，女性は 1 度誰かとペアになったら，それ以降はパートナーが悪化することはないため，$p_M(y) \prec_y x$．よって，(x, y) はブロッキングペアになりえない．よって，出力された完全マッチング M は安定である．□

3.2　安定マッチング集合の分配束構造

一般に，安定結婚問題の例題には，安定マッチングが複数存在する．GS アルゴリズムでは，その中の 1 つの（実は，男性にとって最適，かつ，女性にとって最悪な）安定マッチングが求まる．ある安定結婚問題のインスタンスに対し，安定マッチングのすべての集合を $\mathcal{M}$ と表す．安定マッチング間に適切に半順序 $\preceq$ を定めることで，$(\mathcal{M}, \preceq)$ は分配束になることが示される．

安定マッチング間の半順序関係　安定マッチング M と M' に対し，ある人 u が $p_M(u) \prec_u p_{M'}(u)$ のとき「u は M' より M を好む」といって $M \prec_u M'$ と書く．また，$M \preceq_u M'$ は，$p_M(u) \prec_u p_{M'}(u)$ か $p_M(u) = p_{M'}(u)$ を表すものとする．

定義 3.6 (（男性側視点の）優越)**.** M と M' を安定マッチングとする．M が M' を（男性側視点で）**優越する**とは，任意の男性 x に対し，$M \preceq_x M'$ が成り立つことをいう．このとき，$M \preceq M'$ と書く．

明らかに $\preceq$ は反射律，推移律，反対称律を満たすので，$(\mathcal{M}, \preceq)$ は半順序集合となる．女性側視点の優越関係も同様に出来て，その順序の下でも $\mathcal{M}$ は半順序集合となるが，実は，それは $(\mathcal{M}, \preceq)$ の双対となる．

定理 3.7. M と M' を安定マッチングとする．$(x, y) \in M \setminus M'$ について，

$$M \prec_x M' \iff M' \prec_y M.$$

証明. $\mathcal{X} := \{x \mid M \prec_x M'\}$, $\mathcal{Y} := \{y \mid M \prec_y M'\}$, $\mathcal{X}' := \{x \mid M' \prec_x M\}$, $\mathcal{Y}' := \{y \mid M' \prec_y M\}$ と置く．すなわち，$\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ は，それぞれ，M' より M を好む男性，女性集合である．$\mathcal{X}', \mathcal{Y}'$ は，M より M' を好む男性，女性集合である．$\mathcal{X} \cup \mathcal{X}', \mathcal{Y} \cup \mathcal{Y}'$ は M と M' で相手が異なる男性，女性集合である．したがって，

$$|\mathcal{X}| + |\mathcal{X}'| = |\mathcal{Y}| + |\mathcal{Y}'|$$

である．完全マッチング M を男性集合から女性集合への全単射 $(x \mapsto p_M(x))$ と見るとき，それが，$\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}'$，$\mathcal{X}'$から $\mathcal{Y}$ への写像を誘導することをいえばよい．上の式からそれぞれ全単射になり，題意が示される．

$(x, y) \in M \setminus M'$ を考える．$x \in \mathcal{X}$ のとき $y \in \mathcal{Y}$ となりえない．もしそうだとすると，(x, y) は M' におけるブロッキングペアとなり矛盾．よって $y \in \mathcal{Y}'$．M を M' に置き換えて同様に考えると，$x \in \mathcal{X}'$ のとき $y \in \mathcal{Y}$．□

系 3.8. 女性側視点の優越関係は，男性側視点の優越関係の双対である．

証明. $M \preceq M'$ のとき，上の証明において，$\mathcal{X}'$ が空となることと同値だが，それは，$\mathcal{Y}$ が空となることと同値である．つまり，$M' \preceq^* M$．□

安定マッチングの族は分配束　次に $(\mathcal{M},\preceq)$ が分配束となることを示そう．まず，$(\mathcal{M},\preceq)$ が束になること，すなわち任意の 2 つの安定マッチングに対し，ミートとジョインが定義できることを示す．

補題 3.9. M と M' を安定マッチングとする．

(1) 各男性 x に対し，M での相手と M' での相手のうち，その男性により好きな相手をペアに割り当てると，新たな安定マッチングが得られる．それはミート $M \wedge M'$ に一致する．

(2) 各男性 x に対し，M での相手と M' での相手のうち，その男性により嫌いな相手をペアに割り当てると，新たな安定マッチングが得られる．それはジョイン $M \vee M'$ に一致する．

そもそもこの方法で各男性に女性を割り当てた場合，マッチングになることからして自明でない．さらにそれが安定マッチングになるというのが驚きである．

証明. (1). 新たに作られた男女ペアの集合を N と書く．まず，N がマッチングになることを示す．各男性には異なる女性が割り当てられることをいえばよい．仮に異なる男性 x と x' が N で同じ女性 y を割り当てられたとする．$(x,y)\in M$，$(x',y)\in M'$ であったとする．$x \neq x'$ だから $x \prec_y x'$ と $x' \prec_y x$ のいずれかが成り立つ．まず $x \prec_y x'$ を考える．N の構成から，$y \prec_x p_{M'}(x)$．よって M' において (x,y) がブロッキングペアとなり，M' が安定マッチングであることに矛盾．$x' \prec_y x$ の場合も同様．したがって，各男性は異なる女性が割り当てられ，N は完全マッチングである．とくに，各女性も M か M' での相手が割り当てられていることになる．

次に，N が安定であることをいう．仮に N においてブロッキングペア $(x,y)\notin N$ が存在するとする．N の構成から，$p_N(y) = p_M(y)$ と $p_N(y) = p_{M'}(y)$ のいずれかは必ず成り立つ．$p_N(y) = p_M(y)$ とすると，(x,y) は N のブロッキングペアだから，$x \prec_y p_N(y) = p_M(y)$．また，$y \prec_x p_N(x) \preceq_x p_M(x)$．したがって，$M$ において (x,y) がブロッキングペアとなり，M が安定マッチングであることに矛盾．$p_N(y) = p_{M'}(y)$ の場合も同様．したがって，N は安定マッチングである．

M, M' の共通下界となる安定マッチング L においては，各男性 x において $p_L(x) \preceq_x p_M(x), p_L(x) \preceq_x p_{M'}(x)$ が成り立つが，N の構成法から $p_L(x) \preceq_N p_N(x)$ である．これは N が $M \wedge M'$ であることをいっている．

(2)．(1) の操作は女性側から見ると，各女性はそれぞれの相手のうち，より嫌いな相手とペアになる（系 3.8）．女性と男性の役割を入れ替えることによって (2) が出る． □

系 3.10. (1) $M \wedge M'$ において，各女性はそれぞれの相手のうち，より嫌いな相手とペアになる．

(2) $M \vee M'$ において，各女性はそれぞれの相手のうち，より好きな相手とペアになる．

定理 3.11. $(\mathcal{M},\preceq)$ は分配束．

これを証明するために安定マッチングの半順序集合がある集合上のリング族と同型になることを示す．それは，安定マッチングを P 集合と呼ばれる集合で表現することにより，優越関係を包含関係で置き換えることによって示される．E^* ですべての男女対の集合を表す．$|E^*| = n^2$ である．

定義 3.12 (P 集合). 安定マッチング M に対し，$\{(x,y)\in E^* \mid y \preceq_x p_M(x)\}$ を M の $\boldsymbol{P}$ **集合**と呼び，$P(M)$ と表す．さらに，$P(\mathcal{M}) \subseteq 2^{E^*}$ は安定マッチング集合 $\mathcal{M}$ に対応する P 集合の族を表す．

すると以下が成立する．証明は定義と補題 3.9 からただちに得られる．

命題 3.13. 写像 $M \mapsto P(M)$ は，$\mathcal{M}$ から $P(\mathcal{M})$ への全単射であり，以下が成立する．

(1) $M' \preceq M \iff P(M') \subseteq P(M)$.

(2) $P(M \vee M') = P(M) \cup P(M'),\ P(M \wedge M') = P(M) \cap P(M')$.

特に，$P(\mathcal{M})$ はリング族で $\mathcal{M}$ と同型である．

リング族は分配束なので $\mathcal{M}$ が分配束であることがわかった．特に，有限束であるので最小元 M_* と最大元 M^* が存在する．前者 M_* は，男性によって最も望ましい安定マッチングであり，同時に女性にとっては最悪な安定マッチングである．後者 M^* は，その逆である．

定理 3.14. GS アルゴリズムは，$\preceq$ に関する最小元，すなわち，男性最適女性最悪安定マッチングを出力する．

証明. GS アルゴリズムで得られる安定マッチングが M_* と異なるとする．すると，GS アルゴリズムで，男性 x が M_* における相手 y にリジェクトされる反復がある．そのようなことが起きる「最初」の反復を考える．そのとき y は，$x' \prec_y x$ なる男性 x' とペアになっている．y は，x' の M_* における相手 y' とは異なる．x' は y にプロポーズしたから y とペアになっているわけであるが，もしも，$y' \prec_{x'} y$ であるとすると，x' は，M_* における相手 y' にすでにリジェクトされていることになる．それは，x, y のとり方に矛盾する．したがって，$y \prec_{x'} y'$ であるが，そうなると，(x', y) が M_* のブロッキングペアになって M_* の安定性に矛盾する．□

直上の元とローテーション　第 2 章で扱った Birkhoff の表現定理とその精密化により，分配束・リング族はコンパクトに表現できる．我々の次の目標は， この安定マッチングのなす分配束 $\mathcal{M}$ を表現する半順序集合を求めることである．リング族 $P(\mathcal{M})$ で考えるとき，この半順序集合は，$M \prec\!\!: M'$ となる安定集合 M, M' の差集合 $P(M') \setminus P(M)$ を元とする $P(\mathcal{M})$ の分割上の半順序集合として実現される．

そこで，$M \prec\!\!: M'$ の特徴付けと M' がどのような操作で M から得られるかを調べる．そのためにローテーションという概念・操作を導入しよう．その名前からも想像できるように，ある安定マッチングが与えられた際に，何人かの男性が集まって輪になり，ペアの相手を 1 人ずつ横にスライドさせ（それ以外の男性はペアの相手を変えないで）新たな安定マッチングを作るイメージである．

安定マッチング M と男性 x に対し，$s_M(x)$ と $next_M(x)$ を次のように定義する：

- $s_M(x)$: **M での相手より x の方が好き**な女性のうち，**x が最も好む**女性
- $next_M(x) := p_M(s_M(x)) \Longleftrightarrow (next_M(x), s_M(x)) \in M$

$s_M(x)$ は存在しないこともある．

定義 3.15 ((露出)ローテーション)**.** M を安定マッチング, 男女対の列 $\rho = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{r-1}, y_{r-1})$ が M に関する**露出ローテーション**，あるいは，M で**露出するローテーション**，であるとは，

- $y_i = p_M(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, r-1)$
- $y_{i+1} = s_M(x_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, r-1)$

を満たすときをいう．添え字 i は $i \bmod r$ で考える．ρ が露出する安定マッチングが存在するとき，ρ を単に**ローテーション**という．

観察. 定義 3.15 より，$next_M(x_i) = x_{i+1}$.

定義 3.16 (ローテーションの削除)**.** 安定マッチング M から露出ローテーション ρ を**削除する**とは，$\rho = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{r-1}, y_{r-1})$ とすると，ρ に含まれる x_i については，ペアの相手を $y_i \to y_{i+1}$ にして，ρ に含まれない男女については相手を変えないことをいう．ローテーション削除で新たに得られた完全マッチングを M/ρ と書く．

実は M/ρ は安定マッチング M の直上の安定マッチングを与える．

定理 3.17. M を安定マッチング，M' を完全マッチングとする．以下は同値である．

(a) $M \prec\!\!: M'$．すなわち，M' は M の直上の安定マッチングである．

(b) M で露出するいずれかのローテーション ρ に対して $M' = M/\rho$.

特に，M の直上にある安定マッチングと M で露出するローテーションは一対一に対応する．

証明. (b) $\Rightarrow$ (a). まず M/ρ が M に優越される安定マッチングであることをいう． (x, y) が M/ρ のブロッキングペアであるとする．すなわち，$y \prec_x p_{M/\rho}(x)$ かつ $x \prec_y p_{M/\rho}(y)$ とする．ローテーションの定義から，すべての女性は M/ρ において M での相手以上の相手とペアになっていることと合わせると，$x \prec_y p_{M/\rho}(y) \preceq_y p_M(y)$．このとき x は ρ に含まれなければならない．$\because$ もし ρ に含まれなければ，$y \prec_x p_{M/\rho}(x) = p_M(x)$ より (x, y) は M においてもブロッキングペアになり，M が安定マッチングであることに矛盾．したがって，$y \prec_x p_{M/\rho}(x) = s_M(x)$ かつ $x \prec_y p_M(y)$ であるが，$s_M(\cdot)$ の定義からこれは矛盾．よって，M/ρ は安定マッチング．M/ρ の構成から，すべての男性は M/ρ より M を好むか，M/ρ と M で同じ相手とペアになってるかのいずれかなので，$M \prec M/\rho$.

次の事実により，$M \prec N \prec M/\rho$ なる安定マッチング N は存在しないことがいえる．

(∗) $\rho = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{r-1}, y_{r-1})$ をローテーションとする．任意の $i \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ について，$y_i \prec_{x_i} y \prec_{x_i} y_{i+1}$ を満たす y を考えると，任意の安定マッチングで，(x_i, y) はペアになりえない．

実際， ρ が露出する安定マッチングを M とする．$s_M(x_i) = y_{i+1}$ の定義から，$p_M(y) \prec_y x_i$．(x_i, y) が安定マッチング N でペアになっているとすると，x_i と y の両方が N より M を好む．これは定理 3.7 に矛盾．

(a) $\Rightarrow$ (b). M と M' で異なるパートナーを持つペアからなる露出ローテーションを実際に見つけることができることをいう．M と M' で異なるパートナーを持つ男性の集合を Z と書く．まずは，$x \in Z$ について，$x' := next_M(x) (\Longleftrightarrow (x', s_M(x)) \in M)$ が存在し，さらに $x' \in Z$ であることをいう．$(x, y) \in M' \setminus M$ とする．$M \prec M'$ より，$x = p_{M'}(y) \prec_y p_M(y)$．$\therefore s_M(x)$ は存在する．よって $x' = next_M(x)$ は存在する．次に，$x' \in Z$ をいう．もし $x' \notin Z$ で $(x', s_M(x)) \in M'$ とすると，M' において，$(x, s_M(x))$ がブロッキングペアになる．$\because$ まず $p_{M'}(x') = s_M(x)$ より，$p_{M'}(x) \neq s_M(x)$．よって $s_M(\cdot)$ の定義から，$s_M(x) \prec_x p_{M'}(x)$ と $x \prec_{s_M(x)} p_M(s_M(x)) = p_{M'}(s_M(x)) (= x')$ が成り立つ．$\therefore M'$ において，$(x, s_M(x))$ がブロッキングペアになり，M' の安定性に矛盾するので，$x' \in Z$.

次に，露出ローテーションを見つける．Z を頂点集合とする有向グラフ $H(M)$ を構成する．$x \to next_M(x)$ の有向枝を追加する．上の議論より，$next_M(x) \in Z$ であることから，確かにこのような枝は追加できる．$H(M)$ の各頂点からは，ちょうど一本の枝が伸びているため，$H(M)$ には閉路が存在する．$next_M(x)$ および $H(M)$ の定め方より，その閉路は，M で露出するローテーションに含まれる男性がローテーションの順に並んでいる．したがって露出ローテーション ρ が存在する．M/ρ が M に優越される安定マッチングであることは上で示した．さらに構成法および (∗) より $M/\rho \preceq M'$ である．よって，$M \prec M/\rho \preceq M'$ と $M \prec: M'$ より，$M' = M/\rho$ である． □

以上の議論で，安定マッチング族を表現する半順序集合の構成する準備が出来た．

安定マッチング族を表現する半順序集合の構成　まず, 男性プロポーズ型 GS アルゴリズムで, 最小元, すなわち男性最適安定マッチング M_* を求める． 同様に, 最大元, 女性最適安定マッチング M^* も女性プロポーズ型 GS アルゴリズムで求めておく．次に M_* から最大元 M^* への極大鎖 $M_* \prec: M_1 \prec: \cdots \prec: M_k = M^*$ をたどる．それは，各 M_i で露出ローテーション ρ を見つけ，$M_{i+1} = M_i/\rho$ とすればよい．定理 3.17 (a) $\Rightarrow$ (b) の証明において，M' を女性最適安定マッチング M^* にすることによって，M_i の（すべての）露出ローテーション，そして，直上の元が求められる．

これで E^* の分割 $\Pi(\mathcal{M}) = \{P(M_i) \setminus P(M_{i-1})\}$ が得られ，各元はローテーションに対応している．$|E^*| = n^2$ なので，分割の個数 = 極大鎖の長さは高々 n^2 である．$\Pi(\mathcal{M})$ 上の半順序のイデアル族として $P(\mathcal{M})$ が得られるわけであるが，その半順序は $\mathcal{M}$ の既約元を列挙して比較する事によってわかる．男性と女性の役割をかえて，M^* から M_* へと女性側から見たローテーションを削除して極大鎖を下降し

ていくプロセスを考える．M' から M へ下降したとき，男性側から見たら $M' = M/\rho$ となるローテーション ρ がある．このとき ρ をたどるということにする．そこで，与えられたローテーション ρ に対して，M^* から M_* へ，「できるだけ ρ をたどらない」下降プロセスを考える．つまり ρ 以外でたどれるものがあればそっちをたどるというふうに．すると，あるステップで，ρ しかたどれなくなる安定マッチング M_ρ が得られるが，それは，直下の元が唯一，ということなので，既約元である．よって，各ローテーション ρ に対して，対応する既約安定マッチング M_ρ が求まる．それらを $\preceq$ で比較することにより，目的であった $\Pi(\mathcal{M})$ 上の半順序を得る．実は，もっと効率よく $\Pi(\mathcal{M})$ 上の半順序を求めることができるがそれは省略する．

$\Pi(\mathcal{M})$ のイデアル I は安定マッチング M に対応しているわけであるが，$\Pi(\mathcal{M})$ のトポロジカルオーダーで最初の部分が I になっているものを考え，その順で M_* から I のローテーションを削除していくことで M が得られるのである．

安定マッチング族上での最適化　GS アルゴリズムで出力される安定マッチングは，男性プロポーズの場合，男性最適かつ女性最悪であり，男女間で公平性がない．そこで，一方の性別や個人を優遇することなく，各人に対して公平であるといえる安定マッチングがいくつか提案されている．ここでは，**最小不満度**安定マッチングを紹介する．x のリストにおける y の順位を $r(x,y)$ と表し，y のリストにおける x の順位を $r(y,x)$ と表す．$r(x,y)$ は x が y に対して抱える不満，$r(y,x)$ は y が x に対して抱える不満を表しているといえる．最小不満度安定マッチングは，各人の不満の総和，すなわち

$$\sum_{(x,y)\in M} \{r(x,y) + r(y,x)\}$$

を最小化する．安定マッチング集合の分配束構造，およびそのコンパクト表現を与えるローテーション半順序集合を用いることで，多項式時間で計算可能となる．最小カット問題に帰着できることを利用する．安定マッチング M の重みを

$$w(M) := \sum_{(x,y)\in M} \{r(x,y) + r(y,x)\}$$

と置く．最小不満度安定マッチングはこの $w(M)$ を最小化する安定マッチングである．

また，ローテーション $\rho = (x_0, y_0), (x_1, y_1), \ldots, (x_{r-1}, y_{r-1})$ の重みを

$$w(\rho) := \sum_{i=0}^{r-1} \{r(x_i, y_i) + r(y_i, x_i)\} - \sum_{i=0}^{r-1} \{r(x_i, y_{i+1}) + r(y_i, x_{i-1})\}$$

と置く．M に ρ が露出しているとすると，$w(\rho) = w(M) - w(M/\rho)$ である．

M に対応する $\Pi(\mathcal{M})$ のイデアルを J とする．すなわち，M_* から J に含まれるローテーションをすべて削除したら，M が得られるとする．このとき，

$$w(M) = w(M_*) - \sum_{\rho\in J} w(\rho)$$

である．$w(M_*)$ は定数だから，$w(M)$ を最小化するには $f(M) := \sum_{\rho\in J} w(\rho)$ を最大化すればよい．実はこの問題が最小カット問題に帰着できる．

1. $\Pi(\mathcal{M}) \cup \{s, t\}$ を頂点とするグラフを作成．

2. 異なる $\rho, \rho' \in \Pi(\mathcal{M})$ に対し，$\rho \prec \rho'$ なら (ρ', ρ) の枝を追加し，各枝容量は $+\infty$ とする．枝の向きに注意．

3. $\rho \in \Pi(\mathcal{M})$ に対し，$w(\rho) \geq 0$ なら，(s, ρ) の枝を追加し，枝容量は $w(\rho)$ とする．$w(\rho) < 0$ なら，(ρ, t) の枝を追加し，各枝容量は $|w(\rho)|$ とする．

2. で定めた枝集合を E，3. で定めた枝集合を F として，作成した有向グラフを $G = (V, E \cup F)$ と表す．このとき，以下の補題が成立する．

補題 3.18. G の $s-t$ 最小カットを (S^*, T^*) と置くと，$S^* \setminus \{s\}$ は最小不満度安定マッチングを表す $\Pi(\mathcal{M})$ のイデアルである．

証明. 次の 2 つの主張を示す．(S, T) を任意の G の $s-t$ カットとする．

主張. (S, T) のカット容量が $+\infty \iff S \setminus \{s\}$ は $\Pi(\mathcal{M})$ のイデアルでない．

主張. (S, T) をカット容量が有限の任意の $s-t$ カットとする．上の主張より，$S \setminus \{s\}$ はイデアルである．このイデアルが表す安定マッチングを M，カット容量を $C(S, T)$ とすると，$C(S, T) = (\text{ 定数 }) - f(M)$ が成立．

これらがいえれば，$S^* \setminus \{s\}$ は $f(\cdot)$ が最大の安定マッチング，すなわち最小不満度安定マッチングを表すことがわかる．

（1 つ目の主張の証明）

$(\Longrightarrow)$ (S, T) のカット容量が $+\infty$ なら，E に含まれる枝がカットに含まれる．よって，$\exists \rho, \rho' \in \Pi(\mathcal{M})$ s.t. $(\rho', \rho) \in E, \rho' \in S, \rho \in T$ が成り立つ．$(\rho', \rho) \in E$ より，$\rho \prec \rho'$．$\rho' \in S \setminus \{s\}$ だが，$\rho \notin S \setminus \{s\}$ なので，$S \setminus \{s\}$ は $\Pi(\mathcal{M})$ のイデアルでない．

$(\Longleftarrow)$ $S \setminus \{s\}$ が $\Pi(\mathcal{M})$ のイデアルでないなら，$\exists \rho, \rho'$ s.t. $\rho \prec \rho'$ かつ $\rho' \in S \setminus \{s\}$ だが $\rho \notin S \setminus \{s\}$．$\rho \neq s$ と合わせて，$\rho \in T$．このとき，枝 (ρ', ρ) の容量が (S, T) のカット容量に含まれ，$+\infty$ となる．

（2 つ目の主張の証明）

$$
\begin{aligned}
C(S,T) &= \sum_{\substack{\rho \in T \setminus \{t\}: \\ w(\rho) \geq 0}} w(\rho) + \sum_{\substack{\rho \in S \setminus \{s\}: \\ w(\rho) < 0}} |w(\rho)| \\
&= \sum_{\rho:\ w(\rho) \geq 0} w(\rho) - \sum_{\substack{\rho \in S \setminus \{s\}: \\ w(\rho) \geq 0}} w(\rho) - \sum_{\substack{\rho \in S \setminus \{s\}, \\ w(\rho) < 0}} w(\rho) \\
&= (\text{定数}) - \left(\sum_{\substack{\rho \in S \setminus \{s\}: \\ w(\rho) \geq 0}} w(\rho) + \sum_{\substack{\rho \in S \setminus \{s\}, \\ w(\rho) < 0}} w(\rho) \right) \\
&= (\text{定数}) - f(M).
\end{aligned}
$$

□

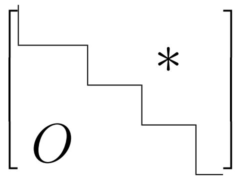
系 3.19. 最小不満度安定マッチングは多項式時間で求まる．

不満を表す関数として，関数 r を一般化した重み関数を利用する最小重み安定マッチングと呼ばれるものも研究されている．こちらも同様の方法により多項式時間で求められる．

第4章　DM分解

行列の DM 分解（Dulmage–Mendelson, 50 年代）とは，行置換と列置換の下での行列の標準形である．すなわち，A を（正方とは限らない）行列，P, Q を置換行列として，

$$A \mapsto PAQ =$$



のような左下にゼロが集まるような形にブロック三角化を行う変形である．非ゼロ項の行と列の間に成り立つ関係を明らかにできることから，DM 分解はスパース行列の解析に有用な技術である．

本章では，DM 分解を分配束・Birkhoff の表現定理の立場から解説し，DM 分解を効率的に求めるアルゴリズムを示す．このアルゴリズムは，DM 分解の背景にあるリング族・分配束を表現する半順序集合を実際に求めるものである．

4.1　DM 分解とは

$n \times m$ 行列 $A = (a_{ij})$ に対応して，$U = \{1, 2, \ldots, n\}$ と $V = \{1', 2', \ldots, m'\}$ を頂点集合とする 2 部グラフ $G_A = (U, V; E)$ を考える．ただし E は U と V の頂点を結ぶ枝集合で，

$$ij' \in E \iff a_{ij} \neq 0$$

を満たすように定義する．つまり，U は A の行番号の集合，V は A の列番号の集合に対応しており，G_A は A の各非零成分に対してその行番号の頂点と列番号の間に枝を結んでできる 2 部グラフである（図 4.1）．すると，A のゼロブロックは G_A の安定集合（独立集合）に対応する．ここで，$S \subseteq U \cup V$ が**安定集合**とは，S 内の点同士を結ぶような枝が存在しないことをいう．S が安定集合のとき，$S \cap U$ に対応する行番号と $S \cap V$ に対応する列番号による A のブロックはゼロブロックになる．なお，U や V 自体も G_A の安定集合であることに注意する．これは A の空なゼロブロックに対応する．以降，安定集合をペア $(X, Y) = (S \cap U, S \cap V)$ で表すことにする．

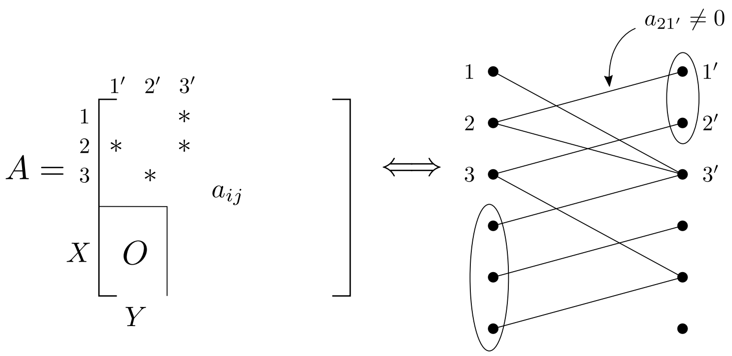


図 4.1: A に対応する 2 部グラフ G_A

DM 分解の直感的な意味は，**サイズの大きな**ゼロブロックにしたがって行列を並び替え，三角化するものである．ここで，ゼロブロックのサイズとは行数と列数の和を意味する．すると，A のサイズの大きなゼロブロックは，G_A の**サイズの大きな**安定集合に対応する．ここで，安定集合のサイズとは要素数のことを指す．

補題 4.1. (X,Y) と (X',Y') が共に（最大）安定集合なら，$(X\cup X', Y\cap Y')$ と $(X\cap X', Y\cup Y')$ も共に（最大）安定集合．

証明. $Y\cap Y' \subseteq Y$ より，$Y\cap Y'$ と X の間を結ぶ枝はない．同様に $Y\cap Y'$ と X' の間を結ぶ枝もないので，$Y\cap Y'$ と $X\cup X'$ の間を結ぶ枝は存在しない．同様に，$X\cap X'$ と $Y\cup Y'$ の間にも枝はない．よって $(X\cup X', Y\cap Y')$ と $(X\cap X', Y\cup Y')$ は安定集合．最大性は

$$|X|+|Y|+|X'|+|Y'| = |X\cup X'|+|Y\cap Y'|+|X\cap X'|+|Y\cup Y'| \tag{4.1}$$

から従う． □

べき集合族の直積 $2^U\times 2^V$ 半順序 $\leq$ を

$$(X,Y)\leq (X',Y') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} X\subseteq X' \text{ かつ } Y\supseteq Y'$$

で定義する．これはべき集合束 2^U と 2^V の双対 $(2^V)^*$ の直積束であり，ブール束である．前補題は，安定集合の族，最大安定集合の族は，$2^U\times(2^V)^*$ の部分束であるということをいっている．

系 4.2. 最大安定集合のなす半順序集合は分配束になる．特に

$$(X,Y)\wedge(X',Y') = (X\cap X', Y\cup Y'),$$
$$(X,Y)\vee(X',Y') = (X\cup X', Y\cap Y').$$

定義 4.3 (DM 分解)**.** G_A の最大安定集合のなす束の極大鎖

$$(X_0,Y_0)<(X_1,Y_1)<(X_2,Y_2)<\cdots<(X_\ell,Y_\ell) \tag{4.2}$$

を 1 つ決め，A を図 4.2 のように並び換える．

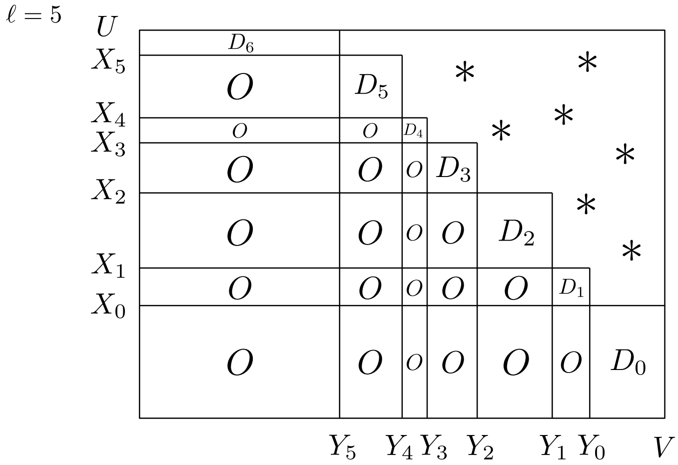


図 4.2: DM 分解

なおこのとき，各ブロック $D_0, D_1, \ldots, D_{\ell+1}$ は

- D_0：縦長（$\because$ D_0 が存在するなら $|V|<|X_0|+|Y_0|$ なので）
- $D_{\ell+1}$：横長

- $D_1, D_2, \ldots, D_\ell$：正方（$\because |X_k| + |Y_k| = |X_{k+1}| + |Y_{k+1}|$）

となる．

例 4.4. 次の行列に

$$A = \begin{array}{|c|ccccccc|}
\hline
 & 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' \\
\hline
1 & & & & & & a_{16} & a_{17} \\
2 & & a_{22} & & & & & \\
3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & a_{35} & & \\
4 & & & a_{43} & & & a_{46} & \\
5 & & & & & & & a_{57} \\
6 & a_{61} & & & a_{64} & a_{65} & & \\
7 & & & & & & & a_{77} \\
\hline
\end{array}$$

に対して DM 分解を適用すると

$$PAQ = \begin{array}{|c|ccc|c|c|c|c|}
\hline
 & 4' & 5' & 1' & 2' & 3' & 6' & 7' \\
\hline
6 & a_{64} & a_{65} & a_{61} & & & & \\
3 & & a_{35} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & & \\
\hline
2 & & & & a_{22} & & & \\
\hline
4 & & & & & a_{43} & a_{46} & \\
\hline
1 & & & & & & a_{16} & a_{17} \\
\hline
5 & & & & & & & a_{57} \\
7 & & & & & & & a_{77} \\
\hline
\end{array}$$

となる．安定集合の極大鎖 $(X_0, Y_0) < (X_1, Y_1) < (X_2, Y_2) < (X_3, Y_3)$ は

$$\begin{aligned}
(X_0, Y_0) &= (57, 4'5'1'2'3'6'), \\
(X_1, Y_1) &= (571, 4'5'1'2'3'), \\
(X_2, Y_2) &= (5714, 4'5'1'2'), \\
(X_3, Y_3) &= (57142, 4'5'1')
\end{aligned}$$

である．

DM 分解の自由度と一意性について　DM 分解には極大チェインのとり方の自由度がある．DM 分解のブロック構造は極大チェインのとり方によってどう変わるのだろうか．これはリング族に対する Birkhoff の表現定理によって理解される．最大安定集合 (X, Y) に $X \cup (V \setminus Y) \subseteq U \cup V$ を対応させることで最大安定集合の族を，$U \cup V$ 上のリング族とみなすこともできる．その対応の下で極大チェイン (4.2) は，リング族の極大チェインになる：

$$X_0 \cup (V \setminus Y_0) \subset X_1 \cup (V \setminus Y_1) \subset X_2 \cup (V \setminus Y_2) \subset \cdots \subset X_k \cup (V \setminus Y_k)$$

命題 2.12 の議論から，差集合の族

$$(X_i \setminus X_{i-1}) \cup (Y_{i-1} \setminus Y_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, k-1)$$

は，チェインのとり方によらず一意に決まる．また，$X_i \setminus X_{i-1}$ は，ブロック D_i の行インデックスの集合で，$Y_{i-1} \setminus Y_i$ は列インデックスの集合に他ならない．したがって，別の極大チェインをとったときは，ブロック D_0, D_∞ の以外のブロック D_i を並べかえたものになる．その並べ方は，リング族を表現する $\{D_i\}$ 上の半順序のトポロジカルオーダーに対応している．したがって，最大安定集合のなす分配束・リング族を表現する半順序集合が DM 分解を自由度を込めて完全に決定する．

DM 分解を求めたいとき，最大安定集合の極大チェインがなんでもよいから 1 つ求まればよいのであるが，愚直に（最大）安定集合をすべて列挙・探索すると，莫大な時間がかかってしまう．なぜなら（最大）安定集合の個数は，$|U|, |V|$ の指数関数になってしまうからである．一方で，最大安定集合を表現する半順序集合の要素数は高々 $|U| + |V|$ なので非常にコンパクトである（$U \cup V$ の分割なので）．次節において，DM 分解と対応する半順序集合を求める効率的なアルゴリズムを解説する．

劣モジュラ関数の最小化元集合として　安定集合の族は，$2^U \times (2^V)^*$ の部分束であるので，最大安定集合 (X, Y) は，その束上で要素数 $|X| + |Y|$ を最大化するものである．したがって，

$$\begin{array}{rc} \text{Max.} & |X| + |Y| \\ \text{s.t.} & (X, Y) \in 2^U \times (2^V)^* : \text{安定} \end{array}$$

の最大化元である．目的関数は (4.1) より（優）モジュラである．したがって，最大安定集合族は，（優）モジュラ関数の最大化元集合のなすリング族と解釈できる．

よりダイレクトな見方を説明する．今は，最大安定集合のみに関心があるので，任意の $X \subseteq U$ に対して，極大な $Y \subseteq V$ であって，$X \cup Y$ が安定集合となるものを考えれば十分である．そのような Y は一意に決まり

$$Y = V \setminus \{y \in V \mid \exists x \in X, (x, y) \in E\}$$

である．そこで $\Gamma : 2^U \to 2^V$ を

$$\Gamma(X) := \{y \in V \mid \exists x \in X, (x, y) \in E\} \quad (X \subseteq U) \tag{4.3}$$

と定義する．すると，最大安定集合は $|X| + |V \setminus \Gamma(X)| = |V| + |X| - |\Gamma(X)|$ を最大化する X に対して $(X, V \setminus \Gamma(X))$ とも書ける．したがって，

$$\begin{array}{rc} \text{Min.} & |\Gamma(X)| - |X| \\ \text{s.t.} & X \in 2^U \end{array}$$

を考えてもよい．

補題 4.5. $X \mapsto |\Gamma(X)| - |X|$ は劣モジュラ．

証明. $X \mapsto |\Gamma(X)|$ が劣モジュラであることをいえば十分である．まず

$$\begin{array}{rcl} \Gamma(X \cup X') & = & \Gamma(X) \cup \Gamma(X') \\ \Gamma(X \cap X') & \subseteq & \Gamma(X) \cap \Gamma(X') \end{array}$$

を観察する．それから劣モジュラ性

$$\begin{array}{rcl} |\Gamma(X)| + |\Gamma(X')| & = & |\Gamma(X) \cap \Gamma(X')| + |\Gamma(X') \cup \Gamma(X)| \\ & \geq & |\Gamma(X \cap X')| + |\Gamma(X \cup X')| \end{array}$$

が導かれる．□

次節で，この最小化問題と最適値が同じになる「双対の」最大化問題を考えることになる．双対最大化問題の最適解から，最大安定集合の分配束を表現する半順序集合が得られる．

4.2　DM 分解を求めるアルゴリズム

4.2.1　安定集合と点被覆（点カバー）

まず，安定集合と点カバーと呼ばれるものの関係について説明する．$G = (V, E)$ を任意のグラフとする．

定義 4.6. $C \subseteq V$ が点カバー $\overset{\text{def}}{\iff} \forall ij \in E,\ \{i, j\} \cap C \neq \emptyset$.

図 4.3 の例では，C は点カバーになっている．

補題 4.7. $C \subseteq V$ が点カバー $\iff V \setminus C$ が安定集合.

証明. ⇒) $V \setminus C$ が安定集合でなければ $V \setminus C$ の頂点間に枝があり，C は点カバーではない（図 4.4(a)）．⇐) $V \setminus C$ が安定集合なら，すべての枝は $V \setminus (V \setminus C) = C$ に接続している（図 4.4(b)）．□

系 4.8. S が最大安定集合 $\iff V \setminus S$ は最小点カバー.

よって，最大安定集合を求めるためには最小点カバーが求まればよい．

4.2.2　マッチングと点カバー

次に，マッチングと点カバーの関係を調べる．特に 2 部グラフでは最大マッチングを求めることで最小点カバーが求まることを示す．

定義 4.9. $M \subseteq E$ がマッチング $\overset{\text{def}}{\iff} \forall ij, kl \in M,\ \{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$.

補題 4.10 (弱双対性)**.** M を任意のマッチング，C を任意のカバーとすると，$|M| \leq |C|$.

証明. 以下のようにして M から C への単射が作れる（図 4.5）．$ij \in M$ について，C がカバーであることから端点 i と j のどちらかは C に含まれる．そこで，ij を C に含まれている端点（i と j の両方が含まれている場合は任意の一方）に写す写像を考える．M はマッチングであるから，この写像は単射．□

定理 4.11 (König–Egervary)**.** G が 2 部グラフなら

$$\max_{M:\text{マッチング}} |M| = \min_{C:\text{カバー}} |C| \ \left(= |U| + |V| - \max_{S:\text{安定集合}} |S| \right).$$

以下，König–Egervary の定理をアルゴリズム的に証明する．$G = (U, V; E)$ を 2 部グラフとする．

定義 4.12 (残余グラフ)**.** $M \subseteq E$ をマッチングとする．G の M による残余グラフ $\overrightarrow{G}_M$ とは，G の各枝を次のようにして有向枝に置き換えて作られる有向グラフである．

- 枝 ij が M に含まれるときは，2 本の有向枝 ij と ji に置き換える．
- 枝 ij が M に含まれないときは，有向枝 ij に置き換える．

また，U_0 を M でカバーされていない U の頂点，V_∞ を M でカバーされていない V の頂点と置く．

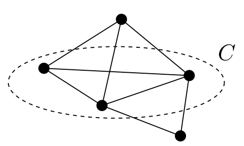
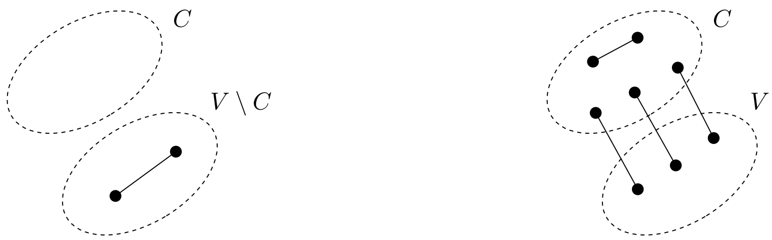


図 4.3: 点カバーの例



(a) $V \setminus C$ が安定集合ではない場合.　　　(b) $V \setminus C$ が安定集合の場合.

図 4.4: 点カバーと安定集合の関係.

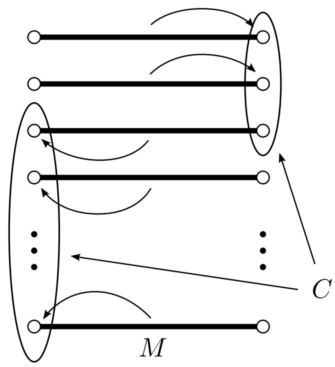


図 4.5: M から C への単射

図 4.6 に，G の M による残余グラフ $\overrightarrow{G}_M$ の例を示す．この残余グラフを利用することで，以下のように最大マッチングが特徴付けられる．

補題 4.13. 以下は同値.

1. M は最大マッチング.
2. $\overrightarrow{G}_M$ において U_0 から V_∞ へ到達するパスは存在しない.
3. 次の条件 (*) を満たす頂点集合 R が存在する：

$$U_0 \subseteq R,\ R \cap V_\infty = \emptyset,\ \overrightarrow{G}_M \text{ において } R \text{ から出る枝は存在しない.} \tag{*}$$

証明. 2 ⇒ 3）2 を満たすとき，R として $\overrightarrow{G}_M$ 上で U_0 からたどり着ける点全体を取ればよい.
1 ⇒ 2）$\overrightarrow{G}_M$ 上で 2 のようなパスがあるとすると，対応する G 上のパスで M に含まれる枝と M に含まれない枝を交換することで，M のサイズが 1 増やせる（図 4.7a）．よって M は最大でない.
3 ⇒ 1）(*) を満たす R を考える（図 4.7b）．すると，左下から右上に向かうような枝は $\overrightarrow{G}_M$ に存在しないので，$C = (U \setminus R) \dot\cup (V \cap R)$ は点カバーとなる（図 4.7b で四角で囲った頂点集合）．また，右下から左上に向かうような枝も存在しないので，$R \cap V$ と $U \setminus R$ で M の枝を共有することはない．よって C から M への単射が作れるので，$|C| \le |M|$ となる．補題 4.10 より $|C| = |M|$ かつ M は最大マッチング．□

上の証明は 2 部グラフの最大マッチングを求めるための増加道アルゴリズムを導く．すなわち，$M = \emptyset$ から始めて，各反復では $\overrightarrow{G}_M$ 上で U_0 から V_∞ へのパスを探し，そのようなパスが見つかればパスに沿って M を更新する．そのようなパスが存在しなければ，M は最大マッチングである．このとき上の証明より，$|M| = |C|$ を満たすカバー C の存在も保証される．このことから König–Egervary の定理が従う.

系 4.14. M が最大マッチングのとき,

$$C \text{ が最小カバー} \iff (*) \text{ を満たす } R \text{ によって } C = (U \setminus R) \dot\cup (V \cap R) \text{ と書ける.}$$

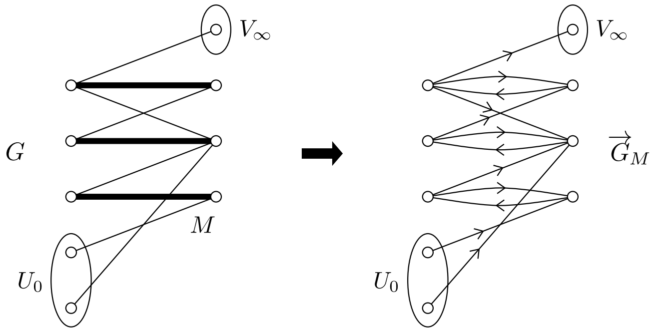
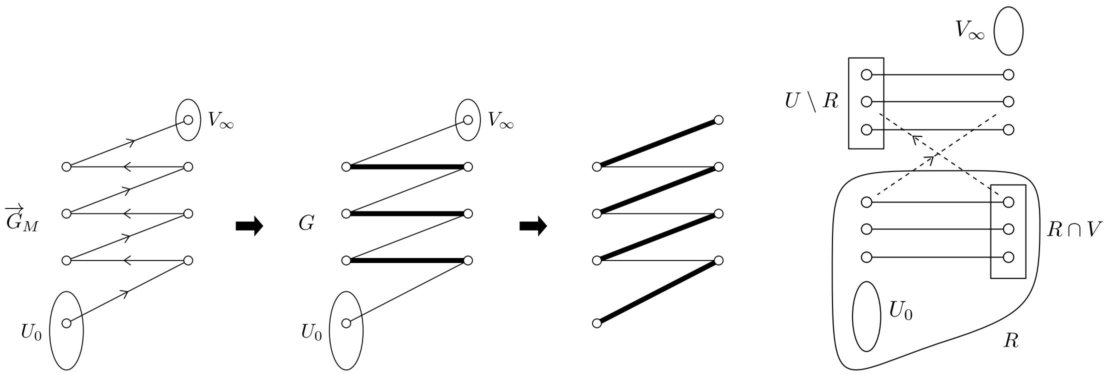


図 4.6: マッチング M による残余グラフ $\overrightarrow{G}_M$ の構成



(a) 2 のパスに沿って M のサイズが増やせる．　(b) (*) を満たす R が存在する場合．

図 4.7: 補題 4.13 の証明．

4.2.3　DM 分解とマッチング

M を G の最大マッチングとする．$\overrightarrow{G}_M$ から，U_0 から到達可能な点と V_∞ に到達可能な点を取り除いたグラフを $\overrightarrow{G}'_M$ と置く（図 4.8）．$\overrightarrow{G}'_M$ の強連結成分分解を考えると，強連結成分の集合 $\mathcal{P}_M$ 上に半順序 $\preceq$ を定義できる．ここで $X, Y \in \mathcal{P}_M$ に対し，$X \preceq Y$ は Y から X に到達可能であることとして定義する．$\mathcal{P}_M$ の部分集合 $\mathcal{I}$ が $X \preceq Y \in \mathcal{I}$ ならば $X \in \mathcal{I}$ を満たすとき，$\mathcal{I}$ を**イデアル**という．

補題 4.15. C が最小カバー $\Longleftrightarrow$ $\mathcal{P}_M$ のイデアル $\mathcal{I}$ によって

$$C = (U \setminus R) \,\dot\cup\, (V \cap R), \quad \text{ただし } R = \{U_0 \text{ から到達可能}\} \,\dot\cup\, \bigcup_{X \in \mathcal{I}} X$$

と書ける．

つまり，最小カバーの族と $\mathcal{P}_M$ のイデアルの族は一対一に対応している．したがって，最小カバーの極大鎖は $\mathcal{P}_M$ のトポロジカルオーダーに対応する．最大安定集合の極大鎖は，最小カバーの極大鎖から各集合の補集合を取れば得られる．

以上をまとめると，行列 A の DM 分解を求めるためには次の手順を踏めばよいことがわかった．

1. $G = G_A$ の最大マッチング M を求める．
2. $\overrightarrow{G}'_M$ を強連結成分分解して半順序集合 $\mathcal{P}_M$ を得る．
3. $\mathcal{P}_M$ のトポロジカルオーダーから最大安定集合の極大鎖を得る．

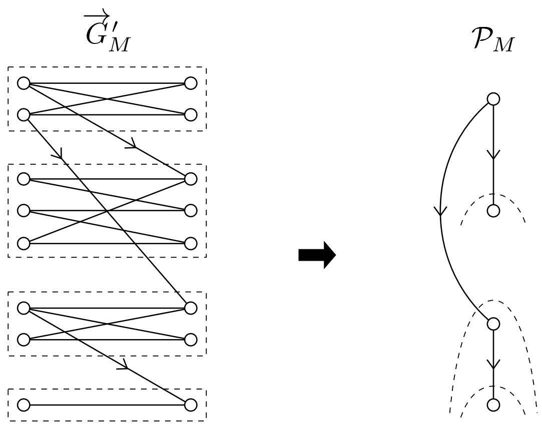


図 4.8: $\overrightarrow{G}'_M$ の強連結成分

4.2.4　基本分割による DM 分解の精密化

2.2 節で紹介した基本分割の考え方を利用すると端のブロック D_0, D_∞ がさらに細かく分割されることがわかる．DM 分解のときは，部分行列の「サイズ」を行数と列数の和で定義したが，これを一般化してパラメータ $\lambda \in [0,1]$ によって部分行列の「重み付きサイズ」が $\lambda\times$ 行数 $+$ $(1-\lambda)\times$ 行数で与えられるとする．対応して，最大の「重み付きサイズ」を持つゼロブロックを求める問題は，以下のようになる．

$$\begin{array}{rl} \text{Max.} & \lambda|X| + (1-\lambda)|Y| \\ \text{s.t.} & (X,Y) \in 2^U \times (2^V)^* : \text{安定}. \end{array}$$

$\lambda = 1/2$ のときが，DM 分解に対応していた．$Y = V \setminus \Gamma(X)$ と Y を消去すれば，2.2 節で扱ったパラメトリック優モジュラ関数最大化になり，基本分割の考え方が適用できる．ここでは得られるブロック対角化の構造を図的に見るために，変数を削除せずに考える．写像 φ : 安定集合 $\to \mathbb{R}^2_+$ を

$$(X,Y) \mapsto (|Y|, |X|)$$

として，その像の凸包 Q を考えよう．上の問題は Q 上での線形関数 $(\lambda, 1-\lambda)$ の最大化と見ることができる．

Q の極大面は，上に凸な $(|V|, 0)$ から $(0, |U|)$ を結ぶ折れ線であり，端の点や折れ曲がり点に写像される安定集合の族 $\mathcal{E}$ は一意に決まり，それらはチェインをなしている（補題 2.16）．

$$\mathcal{E} : (V,\emptyset) = (V_0, U_0) < (V_1, U_1) < \cdots < (V_k, U_k) = (\emptyset, U)$$

対応して，パラメータ領域も $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_k \leq 1$ と分割する．ここで，$\{\lambda_i\}$ は最適解が一意でないパラメータ集合で $\lambda = \lambda_i$ のときの最適解集合は (V_{i-1}, U_{i-1}) を最小元，(V_i, U_i) を最大元，とする分配束である．それを $\mathcal{S}_i$ とする．$\bigcup_i \mathcal{S}_i$ の極大チェインによって，行列を並べ換えると，DM 分解を部分構造として含むブロック対角化が得られる．得られるゼロブロックの「軌跡」が凸多角形 Q の極大面と一致することに注意されたい．この分解は冨澤によるもので，パラメトリック最大フロー問題を解くことによって効率的に求められる．

4.3　発展的話題：非可換 Edmonds 問題と DM 分解の一般化

4.3.1　Edmonds 問題

$A_1, A_2, \ldots, A_k$ を体 $\mathbb{Q}$ 上の $n \times m$ 行列とし，線形シンボリック行列 $A := x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_kA_k$ を考える．ここで $x_1, x_2, \ldots, x_k$ は変数である．$A_1, \ldots, A_k$ をうまく取ると，様々な組合せ最適化問題が

A のランクを求める問題に帰着できる．Edmonds は 1967 年に「A のランクを多項式時間で求めることはできるか」という問いを提起した．この問題は **Edmonds 問題**と呼ばれている．A がシンボリック行列でなければ，行列式の計算によってランクを求めることができる．しかし，シンボリック行列に対して愚直に行列式を計算すると，項の数は指数的に爆発してしまう．

例 4.16. 2 部グラフ $(U, V; E)$ の最大マッチング（のサイズを求める）問題は Edmonds 問題に帰着される．$n = |U|$，$m = |V|$，$E = \{i_1 j_1, \ldots, i_k j_k\}$ として，行列 A_ℓ は (i_ℓ, j_ℓ) 成分のみが 1，他の成分は 0 であるような行列とする．このとき，$A = x_1 A_1 + \cdots + x_k A_k$ のランクは $(U, V; E)$ の最大マッチングサイズに一致する．この事実は，A が正方のとき

$$\det A = \sum_{M:\text{マッチング}} (\pm 1) \prod_{i_\ell j_\ell \in M} x_\ell$$

から，「$\det A \neq 0 \Leftrightarrow$ 完全マッチングが存在」，に注意すればわかる．したがって，各 A_ℓ の非零成分が 1 つの場合の Edmonds 問題は多項式時間で解ける．また既に見たように，

$$\begin{aligned}\operatorname{rank} A &= 2\text{ 部グラフの最大マッチングサイズ}\\ &= \text{最小カバーの要素数}\\ &= n + m - \text{最大安定集合のサイズ}\end{aligned}$$

となる．

各変数 x_i に具体的な値を代入すると，ランクはガウスの消去法で簡単に求めることができる．さらに

$$\operatorname{rank} A = \max_{x_i \in \mathbb{Q}} \left(\operatorname{rank} \sum_i x_i A_i \right)$$

が成り立つ．$x_1, \ldots, x_k$ にランダムに値を割り当てたとき，うまく行列式の各項が打ち消し合ってしまうと，ランクが右辺の max を達成しないことが起こりうる．しかし直感的には，そのようなことが起こる確率は小さそうに思える．この直感は正しいことが知られている．

定理 4.17 (Lovász, 1979)**.** $\operatorname{rank} A$ は乱択多項式時間で求まる．

証明には，Schwartz–Zippel の補題と呼ばれるものを使う．

演習 4.18 (*)**.** これを調べてまとめよ．

$\operatorname{rank} A$ の計算を決定的多項式時間にできるかどうかは計算量理論における重大な未解決問題である．これが解けると，回路計算量の分野でブレークスルーをもたらすらしい（Kabanets–Impagliazzo, 2004）．

演習 4.19 (**)**.** これを調べてまとめよ．

4.3.2　非可換 Edmonds 問題

2015 年辺りから，Edmonds 問題は新しい発展を見せている．これまでは，$A = x_1 A_1 + x_2 A_2 + \cdots + x_k A_k$ において変数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ は互いに可換（$x_i x_j = x_j x_i$）とし，ランクは A を Q 上の多項式環 $\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_k]$ 上の行列と見たときのランクであった（あるいは有理関数体 $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_k)$ 上で考えてもよい）．この定義には，可換環上の行列の行列式は well-defined であることを利用している．

最近導入された新しい見方は，変数 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ を互いに非可換（$x_i x_j \neq x_j x_i$）とし，A を $\mathbb{Q}\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ 上の行列と見ることである．ここで $\mathbb{Q}\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ は $x_1, \ldots, x_k$ によって生成された自由環であり，非可換環である．例えば，$5x_1 x_2 x_1 + x_3 x_1^2 x_3$ のようなものが $\mathbb{Q}\langle x_1, \ldots, x_k \rangle$ の要素になる．

定義 4.20. A の非可換ランク nc-rank A は次のように定義される：

$$\text{nc-rank}\, A := \min\{r \mid \exists B \in \mathbb{Q}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle^{n\times r},\ \exists C \in \mathbb{Q}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle^{r\times m},\ A = BC\}.$$

この定義は環上の行列の inner rank と呼ばれるものである．$\mathbb{Q}\langle x_1, \ldots, x_k\rangle$ は自由斜体 $\mathbb{Q}(\langle x_1, \ldots, x_k\rangle)$ なるものに埋め込まれる．これは有理関数体 $\mathbb{Q}(x_1, \ldots, x_k)$ の非可換版といえる．A の非可換ランク nc-rank A は，A を $\mathbb{Q}(\langle x_1, \ldots, x_k\rangle)$ 上の行列と見てランクを考えたものに一致する．

演習 4.21. rank $A \leq$ nc-rank A を示せ．

演習 4.22. 斜体とその上の線形代数（行列のランクなど）について調べよ．

nc-rank A について，次の公式が重要である．次の最大化問題を考える：

$$\begin{array}{lll} \text{(P)} & \text{Maximize} & s+t \\ & \text{subject to} & SA_iT \text{ の左下 } s\times t \text{ ブロックはゼロブロック} \quad (i=1,2,\ldots,k), \\ & & S, T : \mathbb{Q} \text{ 上の正則行列.} \end{array}$$

定理 4.23 (Fortine, Reutenauer, 2004)**.** nc-rank A は $n+m$ から (P) の最大値を引いたものに一致する．

演習 4.24. 定理 4.23 の nc-rank $A \leq n + m - \max\,(\mathrm{P})$ を証明せよ．

演習 4.25 (*)**.** 定理 4.23 の nc-rank $A = n + m - \max\,(\mathrm{P})$ を証明せよ．

定理 4.26 (Garg, Gurvits, Oliveira, Wigderson (FOCS 2015))**.** nc-rank は多項式時間で求まる（$\mathbb{Q}$ 上）．

Garg らの結果の後，Ivanyos, Qiao, Subrahmanyam (2016, 2017) は一般の体上で nc-rank が多項式時間で求まることを示した．Hamada, Hirai (2017, 2016 年度卒論) は DM 分解の拡張（次節）という動機から nc-rank の双対問題（P）（と等価な問題）を考察し，多項式時間アルゴリズムを与えた．

Garg らアルゴリズムは $\mathbb{Q}$ 上でしか動かず，(P) の最適値はわかるが最適解は得られない．Ivanyos たちのアルゴリズムは，増加道アルゴリズムのベクトル空間への拡張ともいえるもので，一般の体上で動き，(P) の最適解も得られるが，非常に難解で複雑である．Hamada, Hirai のアルゴリズムは，(P) をモジュラ束上の劣モジュラ関数の最適化と見て CAT(0) 空間とよばれる非正曲率距離空間上の凸最適化問題に埋め込み，CAT(0) 空間上の凸最適化アルゴリズムを使うものである．アルゴリズムは概念的にシンプルで任意の体で動き，(P) の最適解も得られる．しかし，多項式時間であるが非常に遅く，$\mathbb{Q}$ 上では，ビットサイズのバウンドの保証がない．

以下の演習問題で見るように非可換ランクの理論は，2 部マッチング理論の代数的拡張（〜代数的組合せ最適化），そして，分配束上からモジュラ束上への劣モジュラ性の拡張というテーマにつながるものである．

注意 4.27. 各 A_i が例 4.16 に挙げたような非零成分をちょうど 1 つだけ持つ行列のときには，(P) は安定集合問題に一致し，定理 4.23 は

$$\text{rank}\, A = \text{最大マッチングのサイズ} = n + m - \text{最大安定集合のサイズ} = \text{nc-rank}\, A$$

となる．特に，この場合は rank $A =$ nc-rank A である．

演習 4.28. 各 A_i が例 4.16 に挙げたような非零成分をちょうど 1 つだけ持つ行列のときに，(P) が安定集合問題に一致することを証明せよ．

演習 4.29. 問題 (P) は

$$\begin{array}{ll} \text{Maximize} & \dim X + \dim Y \\ \text{subject to} & A_i(X,Y) = \{0\} \quad (i=1,2,\ldots,k) \\ & X \subseteq \mathbb{Q}^n,\ Y \subseteq \mathbb{Q}^m : \text{ベクトル部分空間} \end{array}$$

と書けることを示せ．ここで A_i は写像 $\mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q}^m \ni (x, y) \mapsto x^\top A_i y \in \mathbb{Q}$ と見る．さらに，問題 (P) は以下のようにも書けることを示せ．

$$\begin{aligned} &\text{Maximize} \quad m + \dim X - \dim \sum_{i=1}^{k} XA_i \\ &\text{subject to} \quad X \subseteq \mathbb{Q}^n : \text{ベクトル部分空間} \end{aligned}$$

ここで，$XA_i := \{x^\top A_i \mid x \in X\}$ である．

演習 4.30. ベクトル空間 $\mathbb{Q}^n$ の部分空間全体からなる族 $\mathcal{M}$ を包含関係で順序付けた半順序集合と見ると，$\mathcal{M}$ はモジュラ束になることを示せ．このとき，ジョインは $+$, ミートは $\cap$ で与えられ，以下の等式を満たすことを示せ：

$$\dim X + \dim Y = \dim(X + Y) + \dim X \cap Y \quad (X, Y \in \mathcal{M}).$$

なお，モジュラ束とは束 $\mathcal{L}$ であって，$a, b, c \in \mathcal{L}$ で，$c \preceq a$ なら $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ を満たすものである．

演習 4.31. $\mathcal{M}$ 上の関数 F を $X \mapsto -\dim X + \dim \sum_{i=1}^{k} XA_i$ と定義するとき，F は次の意味で劣モジュラであることを示せ：

$$F(X) + F(Y) \geq F(X + Y) + F(X \cap Y) \quad (X, Y \in \mathcal{M}).$$

4.3.3　DM 分解の一般化，分割行列

$\mathbb{Q}$ 上の線形シンボリック行列 $A = x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_kA_k$ に $\mathbb{Q}$ 上の正則行列 S, T をかけてブロック対角化することを考える．S, T は $\mathbb{Q}$ 上なので，それは各行列 A_i を同時に同じ形にブロック対角化することである．

$$A_i \mapsto SA_iT = \begin{bmatrix} & * \\ O & \end{bmatrix}$$

DM 分解の考え方を拡張することによって，このような場合にも最もゼロブロックが大きくなる分解が定まることを見る．ベクトル空間のペア (X, Y) $(X \subseteq \mathbb{Q}^n, Y \subseteq \mathbb{Q}^m)$ が安定であるとは，すべての i で $A_i(X, Y) = \{0\}$ を満たすことと定義する．最大安定ペア (X, Y) は，$\dim X + \dim Y$ が最大になる安定ペアで問題 (P) の最適解である．

補題 4.32. (X, Y) と (X', Y') が共に（最大）安定ペアなら，$(X + X', Y \cap Y')$ と $(X \cap X', Y + Y')$ も共に（最大）安定ペア．

証明. $Y \cap Y' \subseteq Y$ より，$A_i(Y \cap Y', X) = \{0\}$．同様に $A_i(Y \cap Y', X') = \{0\}$．よって，$A_i(Y \cap Y', X + X') = A_i(Y \cap Y', X) + A_i(Y \cap Y', X') = \{0\}$．したがって $(X + X', Y \cap Y')$，そして，$(X \cap X', Y + Y')$ は安定ペア．最大性は

$$\dim X + \dim Y + \dim X' + \dim Y' = \dim X + X' + \dim Y \cap Y' + \dim X \cap X' + \dim Y + Y'$$

から従う． □

安定ペア全体の族に，半順序 $\leq$ を

$$(X, Y) \leq (X', Y') \overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow} X \subseteq X' \text{ かつ } Y \supseteq Y'$$

で定義する．

系 4.33. 最大安定ペアのなす半順序集合はモジュラ束になる．特に

$$(X,Y)\wedge(X',Y')=(X\cap X',Y+Y'),$$
$$(X,Y)\vee(X',Y')=(X+X',Y\cap Y').$$

定義 4.34 (一般化 DM 分解)**.** 最大安定ペアのなす束の極大鎖

$$(X_0,Y_0)<(X_1,Y_1)<(X_2,Y_2)<\cdots<(X_\ell,Y_\ell)$$

を 1 つ決め，正則行列 S,T を次のように決める：S の最後から $\dim X_j$ 行は，X_j の基底になっている．T の最初から $\dim Y_j$ 列は，Y_j の基底になっている．すると SAT は，以下の定義 3 のようにブロック三角化される（$U=\mathbb{Q}^n, V=\mathbb{Q}^m$）：なおこのとき，各ブロック $D_0,D_1,\dots,D_{k+1}$ は

- D_0：縦長（$\because$ D_0 が存在するなら $\dim V<\dim X_0+\dim Y_0$ なので）
- D_{k+1}：横長
- $D_1, D_2, \dots, D_k$：正方（$\because \dim X_j+\dim Y_j=\dim X_{j+1}+\dim Y_{j+1}$）

となる．

注意 4.35. 別の極大鎖によって A を並びかえても，できる「ブロック構造」は変わらない．これはモジュラ束の Jordan–Hölder の定理より示せる．

演習 4.36 (**)**.** $A=A_1x_1+A_2x_2$ のときの DM 分解と行列ペンシル (A_1,A_2) に対するクロネッカー標準形の関係を調べよ．

最大安定ペアは，nc-rank の問題 (P) の最適解でなので，問題 (P) を解くことによって求まるが，最大安定ペアの極大鎖が（多項式時間で）求まるかはわかっていない．

最後に，線形シンボリック行列 A として，特に次の形のものを考える：

$$A=\begin{pmatrix} A_{11}x_{11} & A_{12}x_{12} & \cdots & A_{1\nu}x_{1\nu}\\ A_{21}x_{21} & A_{22}x_{22} & \cdots & A_{2\nu}x_{2\nu}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{\mu1}x_{\mu1} & A_{\mu2}x_{\mu2} & \cdots & A_{\mu\nu}x_{\mu\nu}\end{pmatrix}.$$

ここで，$x_{\alpha\beta}$ は変数で，$A_{\alpha\beta}$ は，$\mathbb{Q}$ 上の（適切なサイズの）行列である．このような行列を分割行列という（Ito, Iwata, Murota 1994）．このとき，DM 分解の変換行列 S,T として，

$$S=P\begin{pmatrix} S_1 & O & \cdots & O\\ O & S_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & O\\ O & \cdots & O & S_\mu\end{pmatrix},\quad T=\begin{pmatrix} T_1 & O & \cdots & O\\ O & T_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & O\\ O & \cdots & O & T_\nu\end{pmatrix}Q \tag{4.4}$$

の形のものをとることができる．ここで，P,Q は置換行列である．

演習 4.37. これを示せ．

各 $A_{\alpha\beta}$ が 1×1 行列のときは，2 部グラフに対応する行列で DM 分解は上述の DM 分解に一致する．各 $A_{\alpha\beta}$ が 1 列からなるときは，DM 分解は Murota による組合せ的標準形 (CCF) に相当する．

各部分行列 $A_{\alpha\beta}$ が 2×2 行列のとき，$\operatorname{rank}A$ が，$2\mu+2\nu-\max(\mathrm{P})$ で与えられることがわかっていた（Iwata, Murota 1995）．それは非可換ランクの視点から見ると $\operatorname{rank}A=\operatorname{nc-rank}A$ ということである．Hirai, Iwamasa 2020 では，この型の分割行列に対し「マッチング」という代数的かつ組合せ的な概念を導入し，ランクが「最大マッチング」で与えられることを示し，「最大マッチング」を求める増加道タイプの組合せ的多項式時間アルゴリズムを与えている．

演習 4.38 (***卒論・修論相当)**.** 2×2 型分割行列の DM 分解を与えるアルゴリズムを設計せよ．

第5章　メディアングラフ

この章では，束を貼り合わせたような構造を持つグラフについて解説する．そのようなグラフの代表例としてメディアングラフがある．メディアングラフは，ある意味で，ツリーと分配束の共通の拡張といえるもので，情報科学の至るところに現れるのであるがそれがメディアングラフであるとは認識されていないことも多い．例えば，2-SAT の解集合には，メディアングラフの構造が入り，2-SAT はそのメディアングラフのコンパクトな表現とみなせる．この事実は，束論の立場からはメディアングラフと同等な構造であるメディアン半束に対する Birkhoff 型定理と理解される．安定結婚問題から男性・女性の区別を無くした問題を安定ルームメイト問題というが，その解集合全体が 2-SAT で表現できることは以前から知られていた．しかし，メディアングラフ・メディアン半束との関連が指摘されたのはわりと最近である．純粋数学の幾何学的群論という分野では，CAT(0) 立方複体（立方体を貼り合わせた空間であって非正な曲率を持つもの）が重要な対象となっているが，CAT(0) 立方複体の 1-スケルトンは，メディアングラフであり，その逆に，メディアングラフの超立方体部分グラフに立方体を詰めて得られる距離空間は，CAT(0) 立方複体である．この事実を基点として，メディアングラフやその関連するグラフの幾何学的群論への活用がすすんでいる．こういったメディアングラフやその一般化を扱う理論は，メトリックグラフ理論（metric graph theory）と呼ばれることもある．この章は，その束論からの入門という位置付けである．

メディアングラフの性質や束との関係はいくつかは forklore になってしまっている．

- J. Chalopin, V. Chepoi, H. Hirai and D. Osajda: Weakly modular graphs and nonpositive curvature, *Memoirs of the AMS*, 268, no.1309, (2020)

にここで述べた概念や定理の出典の情報がある．

この章では，半順序集合は (F) を満たすものとし，半束は最小元 0 を持つものとする．

5.1　モジュラグラフとメディアングラフ

$G = (V, E)$ を連結無向グラフとする（V は有限とは仮定しない）．頂点間の距離 $d = d_G : V \times V \to \mathbb{R}_+$ を

$$d(x, y) := \min\{P \text{ の枝数} \mid P \text{ は } x \text{ と } y \text{ を結ぶパス}\} \quad (x, y \in V) \tag{5.1}$$

と定義する．この距離 d に対して，頂点集合 V は距離空間となる．G の部分グラフ $G' = (V', E')$ が等長 (isometric) であるとは，

$$d_G(x, y) = d_{G'}(x, y) \quad (x, y \in V')$$

が満たされるときをいう．

2 頂点 x, y の距離区間 $I(x, y)$ を

$$I(x, y) := \{z \in V \mid d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)\} \tag{5.2}$$

と定義する．3 頂点 x, y, z のメディアン（median）とは，$I(x, y) \cap I(y, z) \cap I(z, x)$ に属する頂点のこと

である．いい換えると

$$\begin{aligned} d(x,y) &= d(x,w)+d(w,y), \\ d(y,z) &= d(y,w)+d(w,z), \\ d(z,x) &= d(z,w)+d(w,x) \end{aligned}$$

を満たす点 w のことである．このとき x,y,z は w を経由して最短で行き来できる．上の式を解くことでメディアン w から x,y,z への距離は，

$$\begin{aligned} d(x,w) &= (d(x,y)+d(x,z)-d(y,z))/2, \\ d(y,w) &= (d(y,x)+d(y,z)-d(x,z))/2, \\ d(z,w) &= (d(z,x)+d(z,y)-d(x,y))/2 \end{aligned}$$

となる．メディアンはいつも存在するとは限らない．

モジュラグラフ（modular graph）とは，任意の 3 点に対しメディアンが存在するグラフのことである．メディアングラフ（median graph）とは，任意の 3 点に対してもメディアンが「一意に」存在するグラフのことである．

例 5.1. 以下はメディアングラフの例である：

- 木,
- 超立方体グラフ,
- グリッドグラフ, $\mathbb{Z}^n$ の l_1 距離が 1 の点対を枝で結んで得られるグラフ,
- 分配束のハッセ図から枝の向きを無くして得られる無向グラフ．

最後の例については，次節以降の議論で明らかになる．モジュラグラフの例としては，

- 完全 2 部グラフ $K_{n,m}$ $(1 \le n \le m)$,
- モジュラ束のハッセ図から枝の向きを無くして得られる無向グラフ

がある．なお，$2 \le n < m$ のとき，$K_{n,m}$ はメディアングラフでない．特に，$K_{2,3}$ はメディアングラフでないが，それは（分配束でない）モジュラ束 M_3 と対応している．

まずは，モジュラグラフの最も基本的な性質を明らかす．

補題 5.2. モジュラグラフは 2 部グラフである．

証明. 2 部でないと奇数長の（単純）サイクル C がある．さらに等長部分グラフとなるものをとることができる．C は 3 点以上含まなければならない．C から 3 点 x,y,z をとって，それらのメディアン w を考える．$d(x,y)+d(y,z)+d(z,x)$ が奇数なので $d(x,y)+d(y,z)-d(z,x)$ も奇数である．すると $d(x,w)$ は整数ではなくなってしまう．したがって，x,y,z のメディアンは存在しない． □

さて，モジュラグラフの議論においては，メディアンの存在性から導かれる次の性質が有用となる：

(QC) 4 点 $x,y,z,u \in V$ であって，$d(x,u)-1=d(y,u)=d(z,u)$ なるものに対してある $w \in V$ が存在して $d(w,u)=d(x,u)-2$ となる．

実は，この条件はセミモジュラ律のアナロジーともみなせる．

補題 5.3. G を連結 2 部グラフとする．以下は同値である．

(a) G はモジュラグラフ．

(b) G は (QC) を満たす．

証明に入る前に 2 部グラフで一般に成り立つ次の性質を注意する．

- 2 部グラフの任意の頂点 z と枝 xy について $d(x,z)-d(y,z)\in\{-1,1\}$．

なぜなら，もしも $d(x,z)-d(y,z)=0$ なら奇数長のサイクルを含んでしまうからである．

証明. (a) $\Rightarrow$ (b). (QC) において，w として y,z,u のメディアンをとることができる．

(b) $\Rightarrow$ (a). 任意の 3 点 x,y,z を考える．$y\notin I(x,z)$, $x\notin I(y,z)$ と仮定してよい．そうでなければ y または x がメディアンである．x から y への最短パスを考える．そのパスの頂点を順に $x=x_0,x_1,x_2,\ldots,x_k=y$ とする．すると $d(x_i,z)-d(x_{i+1},z)\in\{-1,1\}$ である．もしも，$d(x_{i-1},z)-d(x_i,z)=1=d(x_i,z)-d(x_{i+1},z)$ なる i があると，(QC) によって，x_{i-1},x_{i+1} に隣接するある w が存在して $d(x_i,z)=d(w,z)-2$ となる．最短パスにおいて x_i を w に置きかえても最短のままで $\sum_i d(x_i,z)$ は減少する．これを繰り返す．最後にはそのような頂点が存在しなくなる．そのときは，$d(x_i,z)-d(x_{i-1},z)=1=d(x_{i+1},z)-d(x_i,z)$ となるインデックス i が一意に存在して，x_i がメディアンである． □

補題 5.4. G を連結 2 部グラフとする．以下は同値である．

(a) G はメディアングラフ．

(b) G はモジュラグラフで $K_{2,3}$ を部分グラフとして含まない．

証明. (a) $\Rightarrow$ (b). 部分グラフ $K_{2,3}$ は G の中で等長的になることに注意する．$K_{2,3}$ はメディアングラフではないので (b) が成り立つ．

(b) $\Rightarrow$ (a). x,y,z が 2 つの異なるメディアン m,m' と持ったとしよう．$x,y,z\in I(m,m')$ を仮定してよい．例えば $x\notin I(m,m')$ とすると x を x,m,m' のメディアンに置き換えることができるからである．すると $d(x,m)=d(y,m)=d(z,m)=d(x,m')=d(y,m')=d(z,m')=:k$ が成立する．それはすべての $u,v\in\{x,y,z\},u\neq v$ について成り立つ以下の等式を解くことでわかる．

$$d(u,m)+d(m,v)=d(u,m')+d(m',v)=d(u,v),\quad d(m,u)+d(u,m')=d(m,m').$$

$k=1$ ならば x,y,z,m,m' が誘導する部分グラフは $K_{2,3}$ である．$k>2$ とする．$x'\in I(x,m')$ で x に隣接する頂点とする．x',m,y のメディアンを y'，x',m,z のメディアンを z' とすると y',z' は m に隣接している．x',y',z' のメディアン m'' は，x',y' に隣接している．最後に m'',m,x のメディアン x'' を考えると x'' は，m,m'' に隣接している．x'',y',z',m,m'' は $K_{2,3}$ を誘導する．（図を描きながら考えるとわかりやすい） □

弱モジュラグラフ　モジュラグラフは 2 部グラフであったが，その 2 部とは限らないグラフへの拡張として弱モジュラグラフ（weakly modular graph）と呼ばれるグラフがある．(QC) に似た条件として (TC) を考える：

(TC) 3 点 $x,y,u\in V$ であって，$d(x,y)=1$, $d(x,u)=d(y,u)=k>0$ なるものに対してある $w\in V$ が存在して $d(w,u)=k-1$ となる．

(QC) と (TC) を満たす連結グラフを弱モジュラグラフという．2 部グラフにおいては，(TC) の状況は現れないので，2 部弱モジュラグラフはモジュラグラフに他ならない．メトリックグラフ理論では，モジュラグラフより弱モジュラグラフの設定の下で議論をすすめることが自然な場合も多い．

5.1.1　基点オーダーと距離区間の束構造

$G=(V,E)$ を連結無向グラフとする．$x_0 \in V$ を任意の頂点とする．x_0 に関する基点オーダー（basepoint order）とは，V 上の 2 項関係 $\preceq_{x_0}$ であって，

$$x \preceq_{x_0} y \Leftrightarrow x \in I(x_0,y) \quad (\Leftrightarrow d(x_0,y) = d(x_0,x) + d(x,y)) \tag{5.3}$$

と定義される．

補題 5.5.　(1) $\preceq_{x_0}$ は V 上の半順序である．

(2) $(V,\preceq_{x_0})$ は x_0 を最小元として持ち，JD 条件を満たす．

証明. (1) は，$y \in I(x_0,x)$ なら $I(x_0,y) \subseteq I(x_0,x)$ に注意すると（推移律が）わかる．(2) $I(x_0,y)=[x_0,y]$（右辺は $\preceq_{x_0}$ における区間）と，$[x_0,y]$ の極大チェイン $\Leftrightarrow$ x_0,y を結ぶ最短パス（の頂点集合）に注意すると，$[x_0,y]$ の極大チェインの長さは，$d(x_0,y)$ であることがわかる．すると，任意の区間 $[x,y]$ の極大チェインの長さは，$d(x,y)$ に等しくなければならない．　□

注意 5.6. G が 2 部グラフなら $(V,\preceq_{x_0})$ のハッセ図は，G の各枝に向きを付けたものである．これは $d(z,x)-d(z,y) \in \{-1,1\}$ $(xy \in E)$ からわかる．G が 2 部でないとハッセ図では存在しなくなる枝がある．

次の性質によって，メディアングラフは分配束の貼り合わせという描像が見えてくる．

命題 5.7. $G=(V,E)$ を連結 2 部グラフとする．以下は同値である．

(a) G はメディアングラフ．

(b) 任意の $x,y \in V$ について，$(I(x,y),\preceq_x)$ は分配束．

証明. (b) $\Rightarrow$ (a)．まず G はモジュラグラフであることを示す．(QC) を示す．$x,y,z,u \in V$ であって，$d(x,u)-1 = d(y,u) = d(z,u)$ なるものを考える．$(I(x,u),\preceq_u)$ において，$y \prec: x :\succ z$ なので $y :\succ y \wedge z \prec: z$ となる．これは，$w = y \wedge z$ にすることで (QC) を満たすということを意味する．よって，G はモジュラグラフであることがわかった．もし，G が $K_{2,3}$ を部分グラフとして含むとその部分グラフの 2 点 x,y を選ぶと $(I(x,y),\preceq_x)$ が束 M_3 を部分束として含んでしまう．よって $K_{2,3}$ を含むことはできず G はメディアングラフである．

(a) $\Rightarrow$ (b)．任意の $x,y \in V$ をとる．まず $(I(x,y),\preceq_x)$ がモジュラ束であることを示す．$u,v \in I(x,y)$ に対して，u,v,x のメディアン w を考えると w は u,v のミート $u \wedge v$ に一致しなくてはならない．なぜなら，w' を u,v の共通下界とすると，w',u,v のメディアンは，x,u,v のメディアンでもあるので一意性より w に一致，これは $w' \preceq_x w$ を意味している．同様にして y,u,v のメディアンはジョイン $u \vee v$ に一致する．

$(I(x,y),\preceq_x)$ が部分束 M_3 を含むとする．このとき，M_3 において $x \prec: y$ なるペアの距離 $d(x,y)$ はペアのとり方によらず決まる（モジュラ等式より）．このことから M_3 における最大元，最小元は，それ以外の 3 点の異なるメディアンになり，G がメディアングラフであることに矛盾する．したがって，$(I(x,y),\preceq_x)$ は，M_3 を含みえず，分配束となる．　□

この命題において，メディアングラフをモジュラグラフに分配束をモジュラ束に変えたものは成り立たない．実際，$K_{3,3}$ から任意の枝 xy を除いたグラフ $K_{3,3}^-$ はモジュラグラフであるが，$I(x,y)$ は束ではない．正しい一般化は以下のようになる（証明は省略）．

命題 5.8. $G=(V,E)$ を連結 2 部グラフとする．以下は同値である．

(a) G はモジュラグラフで $K_{3,3}^-$ を部分グラフとして含まない．

(b) 任意の $x, y \in V$ について，$(I(x,y), \preceq_x)$ はモジュラ束.

$K_{3,3}^-$ を部分グラフとして持たない強モジュラグラフと呼ぶ．2 部性の仮定を除いた命題 5.8 のさらなる一般化は以下のようになる（証明は省略).

命題 5.9. $G = (V, E)$ を (TC) を満たす連結グラフとする．以下は同値である.

(a) G は弱モジュラグラフであって，K_4^- を誘導部分グラフとして含まず，$K_{3,3}^-$ を等長部分グラフとして含まない.

(b) 任意の $x, y \in V$ について，$(I(x,y), \preceq_x)$ はモジュラ束であって，$I(x,y)$ は G の等長部分グラフを誘導する.

K_4^- とは完全グラフ K_4 から 1 本枝を除いたグラフである．K_4^- を誘導部分グラフとして含まず，$K_{3,3}^-$ を等長部分グラフとして含まない弱モジュラグラフを swm グラフ（素敵な弱モジュラグラフ）と呼ばれ，弱モジュラグラフの中でもとりわけ良い部分クラスであることを示されている.

5.1.2　束・半束の被覆グラフからの特徴付け

半順序集合の被覆グラフ（covering graph）とは，$x \prec: y$ または $y \prec: x$ となるペア (x,y) に無向枝を与えて得られる無向グラフである．被覆グラフとはハッセ図を表す有向グラフから枝の向きを無くした無向グラフのことである.

命題 5.10. $\mathcal{L}$ を下方セミモジュラ律を満たす半束とし，高さ関数を h，被覆グラフの距離関数を d とする．このとき，$x, y \in \mathcal{L}$ に対して以下が成立する.

(1) $d(x,y) = h(x) + h(y) - 2h(x \wedge y)$.

(2) $I(x,y) = \{z \in \mathcal{L} \mid x \wedge y \preceq z = (z \wedge x) \vee (z \wedge y)$ かつ $(z \wedge x, z \wedge y)$ はモジュラペア $\}$.

ここでモジュラペアとは，モジュラ等式を満たす元のペアのことをいう[1].

証明. まず，任意の区間は下方セミモジュラ束なので JD 条件を満たすことに注意する．特に $x \preceq y$ なら $d(x,y)$ は区間 $[x,y]$ の高さ $h(y) - h(x)$ である．したがって，$d(x,y) = d(x, x \wedge y) + d(x \wedge y, y)$ を示せばよい.

(1). $d(x,y)$ に関する帰納法を使う．$z \in I(x,y)$ で y に隣接する元 z を考える．帰納法により $d(x,z) = d(x, x \wedge z) + d(x \wedge z, z) = h(x) + h(y) - 2h(x \wedge z)$ である.

$z \prec: y$ のとき：もしも $x \wedge z = x \wedge y$ なら $d(x,y) = d(x,z) + 1 = d(x, x \wedge z) + d(x \wedge z, z) + 1 = d(x, x \wedge y) + d(x \wedge y, z) + 1 = d(x, x \wedge y) + d(x \wedge y, y)$ で題意成立．2 番目の等号に帰納法を使った．4 番目に JD 条件と $z \in [x \wedge y, y]$ を使った．もしも，$x \wedge z \prec x \wedge y$ なら，$d(x,z) = d(x, x \wedge z) + d(x \wedge z, z) \geq 1 + d(x, x \wedge y) + d(x \wedge z, z) \geq 1 + d(x, x \wedge y) + d(x \wedge y, y) \geq d(x,y) + 1$ が成り立つ．一番目の等号は帰納法により，2 番目の不等号は，$x \wedge z \prec x \wedge y \preceq y$ と JD 条件により，3 番目の不等号 $d(x \wedge z, z) \geq d(x \wedge y, y)$ は，$[x \wedge z, y]$ に JD 条件を使って，$x \wedge z, x \wedge y, y$ をとおる最短パスと $x \wedge z, x, y$ をとおる最短パスを比較すると導かれる．4 番目は三角不等式である．しかし，$d(x,z) = d(x,y) + 1$ は最初の仮定 $d(x,z) = d(x,y) - 1$ に矛盾している.

$z \prec: y$ のとき: もし $x \wedge y = x \wedge z$ なら帰納法により題意成立．$x \wedge y \prec x \wedge z$ なら $(x \wedge z) \vee x = z :\prec x$ でセミモジュラ律より，$z \wedge y = x \wedge z \wedge y :\succ x \wedge y$ で帰納法により題意成立.

[1]なお，このモジュラペアの定義には注意がいる．本当は，一般の束の 2 元に対し「モジュラである」という非対称な 2 項関係が定義されていて，セミモジュラ束の場合は対称な関係となり（M-symmetric であるという），それがセミモジュラ不等式が等号で成り立つことと同値となる，というのが正しい導入である．一般の束においてモジュラ等式が成立するペアはこの意味でモジュラとは限らない.

(2). モジュラペア (x,y) に対しては，$d(x,y)=h(x)+h(y)-2h(x\wedge y)=2h(x\vee y)-h(x)-h(y)$ に注意すると，$x, x\wedge z, z, z\wedge y, y$ の順でハッセ図を下降，上昇，下降，上昇すると最短パスになることがわかる．よって ($\supseteq$) がわかる．逆向きを示す．$z\in I(x,y)$ を任意にとる．すると (1) より $d(x,y)=d(x,x\wedge z)+d(x\wedge z,z)+d(z,z\wedge y)+d(z\wedge y,y)\geq d(x,x\wedge z)+d(x\wedge z,(x\wedge z)\wedge(y\wedge z))+d((x\wedge z)\wedge(y\wedge z),y\wedge z)+d(y\wedge z,y)\geq d(x,y)$. したがって $x\wedge y=(x\wedge z)\wedge(y\wedge z)=x\wedge y\wedge z$，つまり，$x\wedge y\preceq z$ であって，不等号が等号で成立しなければならない．そのためには $z=(z\wedge x)\vee(z\wedge y)$ であって $(z\wedge x, z\wedge y)$ はモジュラペアでなくてはいけない．□

系 5.11. $\mathcal{L}$ をモジュラ束，$x,y\in\mathcal{L}$ に対し，以下が成立する：

(1) $d(x,y)=h(x\vee y)-h(x\wedge y)$.

(2) $I(x,y)=\{z\in[x\wedge y, x\vee y]\mid z=(z\wedge x)\vee(z\wedge y)=(z\vee x)\wedge(z\vee y)\}$.

さて命題 5.10 を用いて，被覆グラフがメディアングラフになる半束を特徴付けよう．半束 $\mathcal{L}$ に対して次の条件 (LFL) を導入する：

(LFL) 任意の 3 点 x,y,z に対して，

$$x\vee y\vee z \text{ が存在する} \iff x\vee y,\ y\vee z,\ z\vee x \text{ が存在する}.$$

左 $\Rightarrow$ 右はいつも成り立つことに注意する．

メディアン半束とは，任意の主イデアルが分配束であって，(LFL) が成り立つ半束のことである．

命題 5.12. 半束 $\mathcal{L}$ について以下は同値：

(a) $\mathcal{L}$ はメディアン半束.

(b) $\mathcal{L}$ の被覆グラフはメディアングラフ.

証明. (a) $\Rightarrow$ (b). 3 点 $x,y,z\in\mathcal{L}$ を任意にとる．そして，$u:=x\wedge y$, $v:=y\wedge z$, $w:=z\wedge x$ とすると，$u\preceq x\succeq w$, $u\preceq y\succeq v$, $y\preceq z\succeq w$ なので $u\vee v$, $v\vee w$, $w\vee u$ が存在する．したがって条件 (LFL) より $u\vee v\vee w$ が存在する．すると $m:=u\vee v\vee w=(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\vee(z\wedge x)$ が x,y,z のメディアンになる．なぜなら $m=((x\wedge y)\vee(y\wedge z))\vee((y\wedge z)\vee(z\wedge x))$ で $(x\wedge y)\vee(y\wedge z)\in[y\wedge z,y]$, $(y\wedge z)\vee(z\wedge x)\in[y\wedge z,z]$ のジョインなので $m\in I(y,z)$ である．同様にして $m\in I(x,y)$, $m\in I(z,x)$ がわかる．

したがって被覆グラフはモジュラグラフである．よって $K_{2,3}$ を含まないことを示せばよい．今 $K_{2,3}$ を含んだとするとその 5 頂点は部分束 M_3 を誘導してしまうので区間が分配束であること (命題 5.7) に矛盾する．

(b) $\Rightarrow$ (a). まず，$x\preceq y$ に対して $I(x,y)=[x,y]$ を示す．それには $d(x,y)$ が $[x,y]$ の高さを一致することを示せばよい．そうでないとすると極大チェイン $x=x_0\prec: x_1\prec:\cdots\prec: x_k=y$ であって $k>d(x,y)$ なるものがある．すると，あるインデックス $i>0$ があって $d(x,x_{i-1})+1=d(x,x_i)=d(x,x_{i+1})+1$ となる．そうなる最初のインデックスを考える．そして $k>d(x,y)$ となる極大チェイン C であって，そのインデックス i が最小になるものを考える．(QC) を x_i, x_{i-1}, x_{i+1}, x に適用すれば，x_{i-1}, x_{i+1} の共通隣接点 y であって，$d(x,x_{i-1})-1=d(x,y)=d(x,x_{i+1})-1$ なるものがとれる．ここで $x_{i-1}\prec: y\prec: x_{i+1}$ でなくてはいけない．そうでないとすると $\prec:$ が直下を表していることに矛盾するか $x_{i-1}\prec: x_i\prec: x_{i+1}\prec: y\prec: x_{i-1}$ とサイクルができてしまう．極大チェイン C において x_i を y に置きかえても極大チェインであるが，インデックスが減少するか $x_{i-2}=y$ となってしまう．どちらも矛盾である．よって，$[x,y]$ は，$(I(x,y),\preceq_0)$ と同型である．命題 5.7 より，任意の区間は分配束である．

最後に (LFL) を示す．$x,y,z\in\mathcal{L}$ で $x\vee y, y\vee z, z\vee x$ が存在するものを考える．$x\vee y, y\vee z, z\vee x$ のメディアン m が $x\vee y\vee z$ となることを示す．$x\vee y$ から m までの最短パス $x\vee y=u_0,u_1,\ldots,u_k=m$ を考える．もしも $u_{i-1}:\succ u_i$ なるインデックス i があったとして矛盾を導く．最初の i を考える．任意の区間は

分配束であることに注意すると下方セミモジュラ律により $(x\vee y)\wedge u_i \prec\colon x\vee y$ で，$(x\vee y)\wedge u_i \in I(x\vee y, m)$ であり，$I(x\vee y, y\vee z)\cap I(x\vee y, x\vee z)$ の元でもある．命題 5.10 より，$(x\vee y)\wedge u_i \succeq (x\vee y)\wedge(y\vee z) \succ y$ $(x\vee y)\wedge u_i \succeq (x\vee y)\wedge(x\vee z) \succ x$ であるが，これは，$x\vee y :\succ (x\vee y)\wedge u_i \succeq x\vee y$ となって矛盾．したがってそのようなインデックスは存在せず $x\vee y \preceq m$ となる．同様に $y\vee z \preceq m$, $z\vee x \preceq m$．よって，$x\vee y\vee z \preceq m$ であるが，モジュラ律と命題 5.10 に注意すると $x\vee y = y\vee z = z\vee x = x\vee y\vee z = m$ である．□

系 5.13. 束 $\mathcal{L}$ について以下は同値：

(a) $\mathcal{L}$ は分配束．

(b) $\mathcal{L}$ の被覆グラフはメディアングラフ．

系 5.14. $G=(V,E)$ をメディアングラフとする．任意の頂点 $x_0\in V$ に対して，$(V,\preceq_{x_0})$ はメディアン半束．特に，メディアングラフはメディアン半束の被覆グラフである．

証明. $(V,\preceq_0)$ の被覆グラフは G に一致する（注意 5.6）．$x,y\in V$ のミート $x\wedge y$ は，x,y,x_0 のメディアンで与えられる．命題 5.12 を適用すると $(V,\preceq_0)$ はメディアン半束であるこがわかる．□

つぎにモジュラ束の場合を考えよう．任意の主イデアルが分配束であって，(LFL) が成り立つ半束をモジュラ半束と呼ぶ．

命題 5.15. 半束 $\mathcal{L}$ について以下は同値：

(a) $\mathcal{L}$ はモジュラ半束．

(b) $\mathcal{L}$ の被覆グラフはモジュラグラフ．

証明のスケッチ. 命題 5.12 の証明がほとんど成り立つ．半束の被覆グラフは $K_{3,3}^-$ を含みえないことに注意して，命題 5.8 を適用する．□

系 5.16. 束 $\mathcal{L}$ について以下は同値：

(a) $\mathcal{L}$ はモジュラ束．

(b) $\mathcal{L}$ の被覆グラフはモジュラグラフ．

向き付け可能モジュラグラフ　半束の被覆グラフとして現れるグラフはどのようなものだろうか．ハッセ図となる枝の向き付けが存在するということを考慮すると次の条件が必要条件であることがわかる．

(OM) 枝のある向き付けが存在して，任意の長さ 4 のサイクル (x,y,z,w,x) は，

$$x\to y \ \Leftrightarrow\ z\to w$$

と向き付けられている．

4 サイクルの他の向き付けでは，枝が被覆関係でなくなってしまったり，有向サイクルができてしまったり，あるいは，ミートの非存在が導かれる．

(OM) を満たすモジュラグラフを，向き付け可能モジュラグラフ (orientable modular graph) という．もちろん，モジュラ束やモジュラ半束の被覆グラフは向き付け可能モジュラグラフである．ただし，すべての向き付け可能モジュラグラフは，モジュラ半束の被覆グラフとして得られるわけではない．$K_{3,3}$ や $K_{3,3}^-$ は，向き付け可能モジュラグラフではない．したがって，向き付け可能モジュラグラフは，強モジュラグラフである．メディアングラフは，メディアン半束の被覆グラフであるので向き付け可能である．以上より包含関係がわかる．

メディアングラフ $\subset$ 向き付け可能モジュラグラフ $\subset$ 強モジュラグラフ $\subset$ swm グラフ

向き付け可能モジュラグラフは，多項式時間で解ける離散最適化問題と不思議な関係がある．実際，このグラフは，グラフ上の施設配置問題の計算複雑度分類の研究の中で導入されたものである．驚くべきことに，その問題においては，土台となるグラフが向き付け可能モジュラグラフなら多項式時間可解，そうでなければ，NP 困難，という 2 分定理が示されている．これを契機にして，向き付け可能モジュラグラフや swm グラフ上で劣モジュラ関数のような「離散凸関数」の理論を展開する試みが始まっている．

5.2　メディアン半束と PIP

前節の命題，系によってメディアングラフとメディアン半束は同等な構造であることがわかった．この節では，メディアン半束に対する Birkhoff 型定理の拡張を解説する．

まず，分配束を表現したイデアル族にあたるものを定義する．P を半順序集合とし，$\preceq$ を半順序とする．P にさらに以下を満たす対称な 2 項関係 $\frown$ が与えられているとする．

- $x \frown y$ なら x, y の共通上界は存在しない．
- $x \preceq y$ かつ $x \frown z$ なら $y \frown z$

$\frown$ を非整合関係という．$x \frown y$ となるペア x, y のことを非整合対という．$P = (P, \preceq, \frown)$ を非整合対付き半順序集合 (poset with inconsistency pairs) といって，PIP と呼ぶ．P の整合イデアル (consistent ideal) とは，非整合対を含まないイデアルのことである．整合イデアルからなる族を $\mathcal{S}(P) \subseteq 2^P$ と書き，包含 $\subseteq$ に半順序をいれる．

補題 5.17. PIP P に対して，整合イデアル族 $\mathcal{S}(P)$ はメディアン半束である．ミートは $\cap$ で，ジョインは存在するなら $\cup$ で与えられる．

証明. 整合イデアルは交わりに関して閉じている（イデアルが閉じているので）．したがって，$\mathcal{S}(P)$ は半束になり，$\wedge = \cap$ である．また，整合イデアル X, Y のジョイン $X \vee Y$ が存在するなら $X \cup Y \subseteq X \vee Y$ であって，$X \cup Y$ はイデアルで非整合対を持たないので整合イデアルで $X \cup Y = X \vee Y$ である．よってジョインは $\cap$．特に，主イデアルは，リング族になり，分配束である．

次に，整合イデアル X, Y, Z であって，ジョイン $X \cup Y$, $Y \cup Z$, $X \cup Z$ が存在するとしよう．さて，イデアル $X \cup Y \cup Z$ は非整合対を含みえない．含んだとすると $X \cup Y$, $Y \cup Z$, $Z \cup X$ のどれかが含んでしまい矛盾が起きる．したがってジョイン $X \cup Y \cup Z$ が $\mathcal{S}(P)$ に存在する． $\square$

この逆を主張するのが次の定理である．

定理 5.18. 高さ有限の $\mathcal{L}$ をメディアン半束とする．$\mathcal{L}$ を既約元集合 $\mathcal{L}^{\mathrm{ir}}$ 上に 2 項関係 $\frown$ を

$$x \frown y \ \Leftrightarrow\ x \text{ と } y \text{ はジョインを持たない}$$

と定義する．このとき，$\mathcal{L}^{\mathrm{ir}} = (\mathcal{L}^{\mathrm{ir}}, \preceq, \frown)$ は PIP で，$\mathcal{L}$ と $\mathcal{S}(\mathcal{L}^{\mathrm{ir}})$ は同型となる．同型写像 $\varphi : \mathcal{L} \to \mathcal{S}(\mathcal{L}^{\mathrm{ir}})$ と逆写像は

$$\begin{array}{rcl} x & \mapsto & \{a \in \mathcal{L}^{\mathrm{ir}} \mid a \preceq x\}, \\ I & \mapsto & \displaystyle\bigvee_{a \in I} a \end{array}$$

で与えられる．

証明. $\frown$ は非整合関係である．実際，x と z がジョインを持たないとすると x と z の共通上界は空であって，z は $y \succeq x$ なる y ともジョインを持ちえないからである．補題 2.6 から φ の像が $\mathcal{S}(\mathcal{L}^{\mathrm{ir}})$ であることをいえばよい．まず，x の主イデアルの任意の 2 元はジョインを持つのでこのことから $\varphi(x)$ が整合イデアルである．逆に整合イデアル I を考える．このとき，$\bigvee_{a \in I} a$ が存在することを示せばよい．まず，そのためにメディアン半束において

- $x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_k$ が存在する $\Leftrightarrow$ 任意の i, j に対して $x_i \vee x_j$ が存在する

が成り立つことをいう．$\Leftarrow$ をいえばよい．$k > 3$ に関する帰納法によって $u := x_1 \vee x_2 \vee \cdots \vee x_{k-2}$ は存在する．そして，$u \vee x_{k-1}, u \vee x_k$ も存在する．仮定より $x_{k-1} \vee x_k$ も存在するので $u \vee x_{k-1} \vee x_k$ も存在する．これを用いると I の任意の有限集合のジョインが存在する．高さは有限なので結局 I のジョインが存在する． □

例 5.19. 非整合関係のみからなる PIP P を考える．このとき P は，非整合対を枝とした持つ無向グラフ G に同一視できる．この同一視の下では，整合イデアル族は，G の安定集合からなる族と一致する．

メディアンリング族　リング族のメディアン版を考えよう．集合 S 上のメディアンリング族 $\mathcal{M} \subseteq 2^S$ を以下を満たす部分集合族として定義する：

- $X, Y \in \mathcal{M} \Longrightarrow X \cap Y \in \mathcal{M}.$
- $X, Y, Z \in \mathcal{M},\ X \cup Y \subseteq Z \Longrightarrow X \cup Y \in \mathcal{M}.$
- $X, Y, Z \in \mathcal{M},\ X \cup Y, Y \cup Z, Z \cup X \in \mathcal{M} \ \Longrightarrow X \cup Y \cup Z \in \mathcal{M}.$

包含を半順序にすることで $\mathcal{M}$ がメディアン半束になることは明らかだろう．ミートは $\cap$，ジョインは（存在するなら）$\cup$ である．

$\mathcal{M}$ の高さは有限としよう．この場合も PIP による表現として S の交わりない部分集合の族を元とするものがとれる．

補題 5.20. 2 つの極大チェイン $X_0 \subset X_1 \subset \cdots \subset X_n, Y_0 \subset Y_1 \subset \cdots \subset Y_m$ とインデックス i, j に対して $X_i \setminus X_{i-1} = Y_j \setminus Y_{j-1}$ または $(X_i \setminus X_{i-1}) \cap (Y_j \setminus Y_{j-1}) = \emptyset$ が成り立つ．

証明. その 2 つの極大チェインと X_n の主イデアル $I(X_n)$ の中で $X_n \cap Y_m$ を含む極大チェイン C' と Y_m の主イデアル $I(Y_m)$ の中で $X_n \cap Y_m$ を含む極大チェイン D' をくらべて，命題 2.12 (2) を適用すればよい． □

各極大元 X に対し，それに至る極大チェイン C_X を 1 つとる．極大チェイン C_X の差集合をすべての極大元 X にわたって和集合をとることで得られる族 Π は，$X^* \setminus X_*$ の分割である．ここで X_* は $\mathcal{S}$ の最小元，X^* は極大元の和集合である．Π は $\mathcal{S}$ の既約元集合に対応する．半順序関係，非整合関係を Π 上に定義することで，Π は，PIP となり，その整合イデアルの族は，$\mathcal{S}$ と同型となる．

2-SAT との関係　最後にメディアン半束と 2-SAT との関係を説明する．2-SAT とは，クローズが 2 つのリテラルからなる CNF の充足解を求める問題である．つまり，以下のような論理式

$$\varphi = (x_1 \vee x_3) \wedge (\overline{x_2} \vee x_1) \wedge (x_4 \vee \overline{x_5}) \wedge \cdots \wedge (\overline{x_4} \vee \overline{x_2})$$

の充足解を求める問題である．一般の SAT とは異なり，2-SAT を解の存在・非存在は，貪欲的に変数に 0, 1 を割り当てていくことによって効率的に判定できる（考えてみよ）．2-SAT の解集合には，メディアン半束の構造が入ることを示そう．充足解が存在する 2-SAT インスタンス φ を考える．その解の 1 つ $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \{0, 1\}^n$ をとる．任意の i について $z_i = 1$ なら φ の変数 x_i を $\overline{x_i}$ に置きかえ，$\overline{x_i}$ を x_i に置き換える．すると $(0, 0, \ldots, 0)$ が解となる 2-SAT インスタンスを得る．なので，最初から φ は $(0, 0, \ldots, 0)$ を充足解として持つ 2-SAT インスタンスとする．このとき，論理式 φ の中には，$x_i \vee x_j$ のようなクローズは存在しないことに注意する．この 2-SAT の解 $y \in \{0, 1\}^n$ に対して，集合 $X_y \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ を $i \in X_y \Leftrightarrow y_i = 1$ と対応させる．すると集合族 $\mathcal{S}(\varphi) \subseteq 2^{\{1,2,\ldots,n\}}$ を得る．

補題 5.21. $\mathcal{S}(\varphi)$ はメディアンリング族である．

証明． $X, Y \in \mathcal{S}(\varphi)$ を考える．このとき，$x_i \vee \overline{x_j}$, $j \in Y \not\ni i$ または $j \in X \not\ni i$ なるクローズや $\overline{x_i} \vee \overline{x_j}$, $i, j \in X$ または $i, j \in Y$ なるクローズが存在しないということと同値である．よって $x_i \vee \overline{x_j}$, $j \in X \cap Y \not\ni i$ なるクローズや $\overline{x_i} \vee \overline{x_j}$, $i, j \in X \cap Y$ なるクローズは存在しない．このことから $X \cap Y \in \mathcal{S}(\varphi)$ がわかる．同様な議論から，もしも，ある $Z \in \mathcal{S}(\varphi)$ があって $X \cup Y \subseteq Z$ なら $\overline{x_i} \vee \overline{x_j}$, $i, j \in Z$ なるクローズはないので $X \cup Y \in \mathcal{S}(\varphi)$ である．

$X, Y, Z, X \cup Y, Y \cup Z, Z \cup X \in \mathcal{S}(\rho)$ なら，$\overline{x_i} \vee \overline{x_j}, i, j \in X \cup Y \cup Z$ なるクローズが存在しないので $X \cup Y \cup Z \in \mathcal{S}(\rho)$ である．□

証明を見てわかるとおり $\overline{x_i} \vee \overline{x_j}$ が非整合対 $i \frown j$ の役割を果たすわけである．一方，$x_i \vee \overline{x_j}$ は半順序関係 $i \prec j$ に対応している．この観察から，有限メディアン半束を 2-SAT 解集合として表す方法も予想がつくだろう．メディアン半束 $\mathcal{L}$ を PIP $P = (P, \preceq, \frown)$ の整合イデアル族として表現する．PIP P から次のようにして 2-SAT インスタンス φ を構成すればよい．

- $i \prec j$ ならクローズ $x_i \vee \overline{x_j}$ を φ に追加．
- $i \frown j$ ならクローズ $\overline{x_i} \vee \overline{x_j}$ を φ に追加．

得られた 2-SAT の解集合族 $\mathcal{S} \subseteq \{0, 1\}^n$ は $\mathcal{L}$ と同型となる．$\mathcal{S}$ の被覆グラフでは，２点間の距離はハミング距離で与えられる（命題 5.10(1) を応用する）．すなわち，それは超立方体グラフの等長部分グラフとなっていることを意味する．メディアングラフはいつもメディアン半束の被覆グラフであったので以下の定理が得られた．

定理 5.22. 有限メディアングラフは超立方体グラフの等長部分グラフである．