組合せ最適化セミナー「代数的組合せ最適化」補足と演習問題

平井広志
東京大学大学院 情報理工学系研究科
数理情報学専攻
hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

平成 31 年 8 月 6 日

1 Part I の補足

1.1 自由環 $\mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$

文字 $x_1, x_2, \ldots, x_k$ を有限個並べたもの

$$w = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$$

を語 (word) と呼ぶ．空の語を 1 とかく．２つの語 $w = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}, w' = x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{m'}}$ の積 ww' は，連結

$$ww' := x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m} x_{j_1} x_{j_2} \cdots x_{j_{m'}}$$

で定義される．語の $\mathbb{K}$ 線形結合からなる集合 $\mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$ と書く．和と積が自然に定義され，$\mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$ は（非可換）環となる．1 が積の単位元で，0 が和の単位元である．$\mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$ の元は,

$$5x_1x_2x_1^2 + 2x_5x_3x_2x_3$$

のような形をしている．$x_1x_1 = x_1^2$ と略した．語 $w = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_m}$ の長さ m を次数と呼んで，$\deg w$ とかく．$\mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$ の元 $a = \sum_w a_w w$ の次数を

$$\deg a := \max\{\deg w \mid a_w \neq 0\}$$

で定義する．

補題 1 (Weak algorithm)**.** 非ゼロな $a_1, a_2, \ldots, a_\ell \in \mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$ が，$\deg a_1 \leq \deg a_2 \leq \cdots \leq \deg a_\ell$ を満たし，d 従属，すなわち，ある $b_1, b_2, \ldots, b_\ell \in \mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$ が存在して,

$$\deg(a_1b_1 + \cdots + a_\ell b_\ell) < \max_i \deg a_i b_i$$

となったとする．このとき，ある $j \in [\ell]$ と，$c_1, c_2, \ldots, c_{j-1} \in \mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$ があって,

$$\deg(a_j - a_1c_1 - \cdots - a_{j-1}c_{j-1}) < \deg a_j, \quad \deg(a_ic_i) \leq \deg a_j \ (i \in [j-1]).$$

Proof. $d = \deg a_1 b_1 = \cdots = \deg a_\ell b_\ell$ と仮定してよい．すると

$$\deg b_1 \geq \deg b_2 \geq \cdots \geq \deg b_\ell$$

となる．b_ℓ のなかで最大次数をもつ項を βw $(\beta \in \mathbb{K} \setminus \{0\}, w : \mathrm{word})$ とする．すると

$$\beta a_\ell w + \sum_{i=1}^{\ell-1} a_i (b_i)^*$$

は，次数 d 未満でなければならない．ここで，$(b_i)^*$ は，b_i から，suffix が w でない項をのぞいたものである．$\deg b_i \geq \deg b_\ell$ にも注意する．したがって

$$a_\ell + (1/\beta) \sum_{i=1}^{\ell-1} a_i (b_i)^* / w$$

は $\deg a_\ell$ 未満で，$\deg a_i (b_i)^*/w = \deg a_\ell$ である． □

これは，ある種のユークリッドの互除法を与える．$a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ が生成する右イデアルを考える．生成系 $a_1, a_2, \ldots, a_\ell$ が d 従属だと，次数がへるようにある元 a_j をとりかえる，あるいは，除くことができる．これを繰り返すことで，d 独立な生成系（基底）にできる．特に，任意のイデアルは，加群としてみると自由加群になる．このような環を自由イデアル環（free ideal ring; fir）という．PID の一般化である．

1.2 Fortin-Reutenauer の定理の証明

易しい方向はスライドで示した．$A = \sum_{i=1}^k A_i x_i$ の inner rank が r として，$\mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle$ 上で

$$A = FG$$

と分解されたとする．ここで，$F \in \mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle^{n \times r}$, $G \in \mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k \rangle^{r \times m}$ である．我々の目標は，ある $\mathbb{K}$ 上の正則行列 P, Q によって

$$PAQ = \begin{pmatrix} B & C \\ O & D \end{pmatrix},$$

O は，$t \times u$ ゼロ行列，$n + m - t - u = r$，となることを示すことである．

Claim 1. F の各要素の次数は，1 以下としてよい．[非可換性使用]

Proof. 新たな非可換変数 $y_1, y_2, \ldots, y_n$ を用意する．もしも F に次数が 2 以上の要素があるとすると，FG が次数 1 なので，行ベクトル $y^\top F$ の元が補題 1 の条件を満たすことになる．$\mathbb{K}\langle x, y \rangle$ 上，正則（可逆）な行列 W によって，$y^\top FW$ を d 独立になるようにすると，$y^\top A = y^\top FW(W^{-1}G)$ な FW の次数は，1 以下，W の y_i に 1 を代入して，F, G を $FW, (W^{-1}G)$ におきかえればよい． □

F の次数は 1 としてよい．もしもゼロなら F は，$\mathbb{K}$ 上の行列で，行変形は，$n - r$ 行をゼロにできる．結果として A を $\mathbb{K}$ 上の行変形で $(n - r) \times m$ ゼロブロックが作れる．

Claim 2. $F = F_0 + \sum_i F_i x_i$ は，次のように分解できる． [非可換性不使用]

$$UFW = \begin{pmatrix} \tilde{F} & O \\ O & I_s \end{pmatrix}.$$

ここで，U は，$\mathbb{K}$ 上の正則行列，W は，$\mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle$ 上の正則行列（可逆行列），$\tilde{F}$ は次数が *1(以下)*，つまり $\tilde{F} = \tilde{F}_0 + \sum_{i=1}^k \tilde{F}_i x_i$ で，さらに $\tilde{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ の行ベクトルたちは，$\mathbb{K}^{r-s}$ をスパンする．すなわち

$$\begin{pmatrix} \tilde{F}_1 \\ \tilde{F}_2 \\ \vdots \\ \tilde{F}_k \end{pmatrix}$$

は列フルランク.

Proof. もしも，F_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ の行ベクトルが $\mathbb{K}^{r-s}$ をスパンしていれば，OK．そうでないとする．$\mathbb{K}$ 上の列基本変形 W_0 で，$F_i W_0 (i = 1, 2, \ldots, k)$ の最後の列を (同時に) ゼロベクトルにすることができる．このとき，$F_0 W_0$ の最後の列は，ゼロベクトルであってはならない．そうでないとすると FW_0 の最後の列がゼロベクトルになり，結局 A の inner rank が r より小さくなる．これは矛盾．したがって，$\mathbb{K}$ 上の行基本変形 U によって，UF_0W_0 の最後の列を，最後の要素を 1，それ以外をゼロにすることができる．すると，今度は，$\mathbb{K}\langle x_1, x_2, \ldots, x_k\rangle$ 上の列基本変形 W' によって，F_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, k)$ の最後の行を最後の要素以外をゼロにできる．つまり

$$UFW_0W' = \begin{pmatrix} \tilde{F} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

という形にできる．この操作を条件が満たされるまで繰り返す. □

さて，$UA = UFWW^{-1}G$ で，$W^{-1}G = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}$ とすると

$$UA = \begin{pmatrix} \tilde{F} & O \\ O & I_s \end{pmatrix} W^{-1}G = \begin{pmatrix} \tilde{F}G_1 \\ G_2 \end{pmatrix}.$$

G_1 は，$(r-s) \times r$ 行列である．

Claim 3. G_1 の各要素の次数はゼロ，つまり，G_1 は，$\mathbb{K}$ 上の行列. [非可換性使用]

Proof. G_1 の次数 $d > 1$ の斉次成分を $\sum_w H_w w$ とかく．ここで，w は長さ d の word を動く．H_w は, $\mathbb{K}$ 上の行列である．UA は 1 次なので，$\sum_w \tilde{F} H_w w = 0$, 特に $\sum_w \sum_{i=1}^k \tilde{F}_i H_w x_i w = 0$. word $x_i w$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ はすべて異なるので，任意の w に対して，$\tilde{F}_i H_w = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$．$\tilde{F}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ の行ベクトルは，$\mathbb{K}^{r-s}$ をスパンするので，$H_w = 0$．したがって，G_1 の次数 $d > 1$ の斉次成分はゼロとなる. □

$W^{-1}G$ に $\mathbb{K}$ 上の列基本変形 V によって，G_1 を対角行列になるようにする．すると，inner-rank が r であることから

$$W^{-1}GV = \begin{pmatrix} I_{r-s} & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

とすることができる．すると

$$UAV = (UFW)(W^{-1}GV) = \begin{pmatrix} \tilde{F} & O \\ O & I_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_{r-s} & O \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{F} & O \\ C & D \end{pmatrix}$$

最後のゼロブロックのサイズは，$(n-s) \times (m-r+s)$ なので，$u = n-s, t = m-r+s$ とすると，$m+n-u-t = r$ となる．

定理 2 (Fortin-Reutenauer 2004)**.** nc-rank$A \le 2\,\mathrm{rank}A$.

Proof. $A = \sum_{i=1}^{k} A_i x_i$ として，A_i たちが $\mathbb{K}$ 上スパンする行列空間を $\mathcal{A}$ とする．このとき，$\mathrm{rank}A \ge \max_{\tilde{A}\in\mathcal{A}} \mathrm{rank}\tilde{A}$ に注意する．なお，$\mathbb{K}$ のサイズが大きいときは等号成立．$r = \max_{\tilde{A}\in\mathcal{A}} \mathrm{rank}\tilde{A}$ を達成する（$\mathbb{K}$ 上の）行列 $\tilde{A}$ をとる．$\mathbb{K}$ 上の正則行列 P, Q により

$$P\tilde{A}Q = \begin{pmatrix} I_r & O \\ O & O \end{pmatrix}$$

とできる．任意の $\tilde{B} \in \mathcal{A}$ に対して，

$$P\tilde{B}Q = \begin{pmatrix} C & D \\ E & O \end{pmatrix}$$

の形になることをしめす．ここで C は $r \times r$ 行列．すると nc-rank$A \le 2r \le 2\,\mathrm{rank}A$ となる．

$\tilde{A}$ は $\mathcal{A}$ でランク最大なので，$\tilde{A}t + \tilde{B}$ のランクは，r 以下．したがって，$\tilde{A}t + \tilde{B} \in \mathcal{A}$ のランクも r 以下．$P(\tilde{A}t + \tilde{B})Q$ の最初の r 行 r 列を含む $r+1$ 次部分行列式

$$\det \begin{pmatrix} C' + tI & * \\ * & \tilde{b}' \end{pmatrix}$$

を考えると，t^r の係数は，$\tilde{b}' := (P\tilde{B}Q)_{ij}$ $(i, j > r)$ である．$\mathbb{K}$ のサイズが大きい場合はこれが多項式としてゼロでなくてはいけないので，$(P\tilde{B}Q)_{ij} = 0$ となる．$\mathbb{K}$ のサイズが小さい場合はよくわからなかった． □

1.3 行列のクロネッカー積

行列 $B = (b_{ij}), C = (c_{ij})$ のクロネッカー積 $B \otimes C$ は

$$B \otimes C := \begin{pmatrix} b_{11}C & b_{12}C & \cdots \\ b_{21}C & b_{22}C & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

と定義される．B が $n \times m$，C が $n' \times m'$ のときは，$B \otimes C$ は $nn' \times mm'$ である．$C \otimes B$ は $C \otimes B$ を並べ替えると得られることに注意する．

- BB', CC' が定義できるなら

$$(B \otimes C)(B' \otimes C') = (B'B \otimes CC').$$

  (ヒント．ブロック行列の掛け算をつかう)

- $\mathrm{tr} B \otimes C = \mathrm{tr} B \mathrm{tr} C$.
- $\det B \otimes I = \det I \otimes B = \det B^d$．ここで，$I$ は $d \times d$ 単位行列.

補題 3 (Hrubeš, Wigderson 2015)**.**

$A = \sum_i A_i x_i$ が，nc-正則 $\Leftrightarrow$ ある $D_i \in \mathbb{K}^{d\times d}$ によって，$\det \sum_i A_i \otimes D_i \neq 0$.

Proof. ($\Rightarrow$) ある $B \in \mathbb{K}(\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle)^{n\times n}$ があって，$BA = AB = I$．これは，ある $D_i \in \mathbb{K}^{d\times d}$ によって，$B(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ が定義できて，$B(D_1, D_2, \ldots, D_n)(\sum_i A_i \otimes D_i) = (\sum_i A_i \otimes D_i) B(D_1, D_2, \ldots, D_n) = I$ を意味する．つまり，$B(D_1, D_2, \ldots, D_n)$ は $\sum_i A_i \otimes D_i$ の逆行列で，$\det \sum_i A_i \otimes D_i \neq 0$.

($\Leftarrow$) $A = \sum_i A_i x_i$ が，nc-非正則なら，Fortin-Reutenauer の定理より，$\mathbb{K}$ 上正則行列 P, Q により

$$PAQ = \begin{pmatrix} C & D \\ O & E \end{pmatrix}$$

とできる．ここで，O は $r \times s$ ゼロ行列で $r + s > n$ である．すると任意の $D_i \in \mathbb{K}^{d\times d}$ に対して，

$$(P \otimes I)(\sum_i A_i \otimes D_i)(Q \otimes I) = (\sum_i PA_iQ) \otimes D_i = \begin{pmatrix} C' & D' \\ O' & E' \end{pmatrix}$$

となる．ここで，O' は $rd \times sd$ ゼロ行列で，$rd + sd > nd$ である．すなわち，$\sum_i A_i \otimes D_i$ は可逆でない．つまり，$\det \sum_i A_i \otimes D_i = 0$. $\square$

2 Part II の補足

2.1 行列スケーリングの収束性の補足

補題 4. $B\mathbf{1} = \mathbf{1}$, $\|B^\top \mathbf{1} - \mathbf{1}\|^2 < 1/n$ なら，G_B には完全マッチングが存在する．

Proof. 対偶を示す．G_B には完全マッチングが存在しないと仮定する．すると，Hall の定理から B は，行と列を並べ替えることで

$$B = \begin{pmatrix} C & D \\ O & E \end{pmatrix}$$

となる．ここで，O は，$r \times s$ ゼロ行列で $r + s > n$ である．$(c_1\ c_2\ \ldots\ c_n) := \mathbf{1}^\top B$ を列和ベクトルとする．$B\mathbf{1} = \mathbf{1}$ から，E の要素の総和は r である．これより，

$$\sum_{i=s+1}^{n} c_i \geq r$$

を得る．

$$\begin{aligned} \|B^\top \mathbf{1} - \mathbf{1}\|^2 &= \sum_{i=1}^{n} (c_i - 1)^2 \geq \sum_{i=s+1}^{n} (c_i - 1)^2 \\ &\geq \frac{1}{n-s} (\sum_{i=s+1}^{n} (c_i - 1))^2 = \frac{1}{n-s} (\sum_{i=s+1}^{n} c_i - n + s)^2 \\ &\geq \frac{1}{n-s} (r - n + s)^2 > \frac{1}{n-s} > \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

ここで，２つ目の不等式では，２次関数の凸性，３つ目の不等式では，$r + s > n$ と $\sum_{i=s+1}^{n} c_i \geq r$ を用いた. □

補題 5. $B\mathbf{1} = \mathbf{1}$，または，$B^\top \mathbf{1} = \mathbf{1}$ なら，$Cap(B) \leq 1$.

Proof. $Cap(B) \leq \prod_i (A\mathbf{1})_i \leq (\mathbf{1}^\top B\mathbf{1}/n)^n = 1$. ここで，不等号は相加相乗平均を用いた. □

補題 6. $B\mathbf{1} = \mathbf{1}$ で，$\|B^\top \mathbf{1} - \mathbf{1}\|^2 = \epsilon$ なら，$Cap(C(B)) \geq (1 + \Omega(\epsilon))Cap(B)$. R と C の役割を換えても成立.

Proof. $(c_1\ c_2\ \ldots\ c_n) := \mathbf{1}^\top B$ を列和ベクトルとする．すると

$$Cap(C(B)) = (c_1 c_2 \cdots c_n)^{-1} Cap(B).$$

ここで

$$\begin{aligned}
&c_1 c_2 \cdots c_n = (1 + (c_1 - 1))(1 + (c_2 - 1)) \cdots (1 + (c_n - 1)) \\
&\sim \exp(\sum_i (c_i - 1) - \frac{1}{2} \sum_i (c_i - 1)^2) \\
&= \exp(-\epsilon/2).
\end{aligned}$$

最後の等号で $\sum_i c_i = n$ と $\sum_i (c_i - 1)^2 = \epsilon$ を用いた. □

2.2 作用素スケーリングの収束性の補足

補題 7. $T_A(I) = I$，または，$T_A^*(I) = I$ なら，$Cap(T_A) \leq 1$.

Proof. $X = I$ にたいして $Cap(T_A) \leq \det \sum_i A_i A_i^\dagger \leq n(\mathrm{tr} \sum_i A_i A_i^\dagger)^{1/n} = n(\mathrm{tr} \sum_i A_i^\dagger A_i)^{1/n}$ からわかる．不等式は，固有値に関する相加相乗平均，最後の等式は，トレースの線形性を用いる. □

補題 8. $T_A^*(I) = I$ で，$\|T_A(I) - I\|^2 = \epsilon$ なら，$Cap(R(T_A)) \geq (1 + \Omega(\epsilon))Cap(T_A)$. R と C の役割を換えても成立.

Proof. まず，

$$Cap(C(T_A)) = (\det(T_A))^{-1} Cap(T_A).$$

に注意する．$c_1, c_2, \cdots, c_n$ を T_A の固有値とすると，$\|T_A(I) - I\|^2 = \epsilon$ より，$\sum_i (c_i - 1)^2 = \epsilon$ で，$T_A^*(I) = I$ より，$\sum_i c_i = \mathrm{tr} T_A(I) = \mathrm{tr} T_A^*(I) = \mathrm{tr} I = n$. よって，

$$\begin{aligned}
\det T_A &= c_1 c_2 \cdots c_n = (1 + (c_1 - 1))(1 + (c_2 - 1)) \cdots (1 + (c_n - 1)) \\
&\sim \exp(\sum_i (c_i - 1) - \frac{1}{2} \sum_i (c_i - 1)^2) \\
&= \exp(-\epsilon/2).
\end{aligned}$$

最後の等号で $\sum_i c_i = n$ と $\sum_i (c_i - 1)^2 = \epsilon$ を用いた. □

3　Part III の補足

3.1　モジュラ束

半順序集合 $\mathcal{P}$ の 2 元 a, b のジョインとは，a, b の最小の共通上界のことで，(それが存在するならば）$a \vee b$ であらわす．最大の共通下界をミートといって $a \wedge b$ であらわす．任意の 2 元に対してジョインとミートが存在するとき，$\mathcal{P}$ を束という．$\mathcal{P}$ の高さ関数（height function）とは，$r : \mathcal{P} \to \mathbb{Z}$ であって，

$$r(b) = r(a) + 1 \quad (a \prec b : \nexists c : a \prec c \prec b)$$

を満たすものである．高さ関数が存在するとき，$\mathcal{P}$ は階層的であるという．

束（lattice）$\mathcal{L}$ がモジュラ束（modular lattice）であるとは，任意の $a, b, c \in \mathcal{L} : a \succeq c$ に対し，$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ が満たされるときをいう．ここでは高さ関数 r をもつ束のみについて考えるものとする．以下はよく知られている．

補題 9. 高さ関数 r をもつ束 $\mathcal{L}$ に対して，以下は同値：

- $\mathcal{L}$ はモジュラ束.
- $r : \mathcal{L} \to \mathbb{Z}$ は,
$$r(x) + r(y) = r(x \wedge y) + r(x \vee y) \quad (x, y \in \mathcal{L})$$
を満たす.

補題 10. U を体 $\mathbb{K}$ 上の有限次元ベクトルとする．$\mathcal{S}(U)$ を U の部分ベクトル空間全体からなる半順序集合とする．順序は包含関係とする．このとき，$\mathcal{S}(U)$ はモジュラ束で，$\wedge = \cap$, $\vee = +$, $r = \dim$ となる．

Proof. 部分空間は $\cap$ と $+$ で閉じているから，$\wedge = \cap$, $\vee = +$ であり，$r = \dim$ も明らか. $X, Y, Z \in \mathcal{S}(U) : X \supseteq Z$ に対し，明らかに $X \cap (Y + Z) \supseteq (X \cap Y) + Z$ が成り立つ．逆を包含がいえればよい．$u = y + z \in X \cap (Y + Z) : y \in Y, z \in Z$ に対して，$y = u - z \in X$ ($z \in Z \subseteq X \ni u$ より）なので，$u = y + z \in (X \cap Y) + Z$ である． □

3.2　オーソスキーム複体

オーソスキーム複体 (orthoscheme complex) のフォーマルな定義を述べる．$\mathcal{P}$ を高さ関数をもつ階層的な半順序集合とする．オーソスキーム複体 $K(\mathcal{P})$ は $\mathcal{P}$ のチェインの形式的凸結合の全体からなる．すなわち，$K(\mathcal{P})$ は $x = \sum_{k=0}^{m} \lambda_k p_k$, $p_0 \prec p_1 \prec \cdots \prec p_m$, $\sum_{k=0}^{m} \lambda_k = 1$，$\lambda_k \geq 0$ $(\forall k)$ となる元 x たちからなる．一つのチェインの凸結合全体を単体と呼ぶことにする．$K(\mathcal{P})$ の距離構造は以下のように導入される．極大な単体 C(長さ n) から $\mathbf{R}^n$ への写像 φ_C を

$$\varphi_C(x) := \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (e_1 + \cdots + e_k) \quad (x = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k p_k).$$

と定める．ここで単体 C は，極大チェイン $p_0 \prec p_1 \prec \cdots \prec p_n$ の凸結合とし，e_i は $\mathbf{R}^n$ の単位ベクトルである．そして，C 内の 2 点 x, y の距離 $d(x, y)$ を $\|\varphi_C(x) - \varphi_C(y)\|_2$ で定める．次に，$K(\mathcal{P})$ 内のパス $\gamma : [0, 1] \to K(\mathcal{P})$ の長さ $d(\gamma)$ を

$$d(\gamma) := \sup \sum_{i=0}^{k-1} d(\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1}))$$

と定義する．ここで sup は $\gamma(t_i), \gamma(t_{i+1})$ が同じ単体に属するような十分細かい区間分割 $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ $(k > 0)$ についてとる．そして，$K(\mathcal{P})$ の 2 点の距離をその２点を結ぶパスの長さの下限として定義する．$\mathcal{P}$ が階層的であることから，この定義は well-defined で，$K(\mathcal{P})$ は距離空間となり，$\mathcal{P}$ のオーソスキーム複体と呼ぶ．直感的にいうと，各極大チェインに対して頂点 $0, e_1, e_1 + e_2, \ldots, e_1 + e_2 + \cdots + e_n$ を持つ $\mathbf{R}^n$ の単体を詰めて得られる空間が $K(\mathcal{P})$ である．$\mathcal{P}$ の順序複体（order complex）の幾何学的実現に特殊な距離を入れたものともいえる．

4 演習問題

1. (線形マトロイド交差) 行列 $A = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$ に対して線形マトロイド $\mathbf{M}(A) = (E, \mathcal{I}(A))$ を

$$\mathcal{I}(A) := \{I \subseteq [k] \mid a_i\ (i \in I) \text{ は一次独立 }\}$$

と定義される．もう一つの行列 $B = (b_1\ b_2\ \cdots\ b_k)$ とそのマトロイド $\mathbf{M}(B) = ([k], \mathcal{I}(B))$ を考える．

(i) 以下の等式を示せ．

$$\max\{|I| \mid I \in \mathcal{I}(A) \cap \mathcal{I}(B)\} = \operatorname{rank} \sum_{i=1}^{k} a_i b_i^\top x_i$$

ヒント．Binet-Cauchy の公式を用いてもよい．Binet-Cauchy の公式については，ググってください．

(ii) $A = \sum_{i=1}^{k} a_i b_i^\top x_i$ とおくとき，

$$\operatorname{rank} A = \text{nc-rank} A$$

を示せ．ヒント．Edmonds のマトロイド交差定理（ググってください）を用いてよい．

(iii) 共通独立集合 $I \in \mathcal{I}(A) \cap \mathcal{I}(B)$ に対して，$\tilde{A} = \sum_{i \in I} a_i b_i^\top z_i$ $(z_i \in \mathbb{K})$ とするとき，$\tilde{A}$ の Wong sequence を計算せよ．

2. (i) 非２部グラフの最大マッチングを Edmonds 問題として定式化せよ．ヒント．Tutte 行列

(ii) (線形マトロイドマッチング) 行列 $A = (a_1\ b_1\ a_2\ b_2\ \cdots\ a_k\ b_k)$ に対して独立集合 $\mathcal{J}(A) \subseteq 2^{[k]}$ を

$$\mathcal{J}(A) := \{J \subseteq [k] \mid a_i, b_i\ (i \in J) \text{ が一次独立 }\}$$

と定義する．このとき

$$2 \max\{|J| \mid J \in \mathcal{J}(A)\} = \operatorname{rank} \sum_i (a_i b_i^\top - b_i a_i^\top) x_i$$

を示せ．

(iii) $\operatorname{rank} A < \text{nc-rank} A$ となる $A = \sum_i A_i x_i$ を与えよ．

3. (i) G_B に完全マッチングが存在しなければ，$Cap(B)=0$ となることを示せ．
   (ii) $A=\sum_i A_i x_i$ が nc-非正則なら，$Cap(T_A)=0$ となることを示せ．
4. $Cap(B)$ の最適化問題は，変数変換をすることで，凸計画になることをしめせ．
5. (i) $Cap^{\mathrm{sym}}(B)=n(Cap(B))^{1/n}$ を示せ．
   (ii) $Cap^{\mathrm{sym}}(T_A)=n(Cap(T_A))^{1/n}$ を示せ．そして，作用素スケーリングが $Cap^{\mathrm{sym}}(T_A)$ に対する交互最適化とみなせることを示せ．

   ヒント：ラグランジュの未定乗数法
6. $\mathrm{tr}(\sum_i D_i\otimes C_i)(\sum_i D_i\otimes C_i)^\dagger \leq \mathrm{tr}\sum_i D_iD_i^\dagger \mathrm{tr}\sum_i C_iC_i^\dagger$. を示せ．ヒント．$\mathrm{tr}C\otimes D=\mathrm{tr}C\mathrm{tr}D$ に注意する．
7. A がブロック行列 A_{ij} $(i\in[n], j\in[m])$ によって

$$A=\begin{pmatrix} A_{11}x_{11} & A_{12}x_{12} & \cdots & A_{1m}x_{1m} \\ A_{21}x_{21} & A_{22}x_{22} & \cdots & A_{2m}x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1}x_{n1} & A_{n2}x_{n2} & \cdots & A_{nm}x_{nm} \end{pmatrix}$$

   の形をしているとき，MVSP の最適解 (X,Y) として，

$$\begin{aligned} X &= X_1\oplus X_2\oplus\cdots\oplus X_n, \\ Y &= Y_1\oplus Y_2\oplus\cdots\oplus Y_m, \\ A_{ij}(X_i,Y_j) &= \{0\} \quad (i\in[n], j\in[m]) \end{aligned}$$

   となるものがとれることを示せ．
8. M を行列とし，双線形形式とみる．$(X,Y)\mapsto \mathrm{rank}M|_{X\times Y}$ が劣モジュラ関数であること，つまり，

$$\mathrm{rank}M|_{X\times Y}+\mathrm{rank}M|_{X'\times Y'}\geq \mathrm{rank}M|_{(X\cap X')\times(Y+Y')}+\mathrm{rank}M|_{(X+X')\times(Y\cap Y')}$$

   を示せ．ヒント: $X, X', X\cap X', X+X'$, $Y, Y', Y\cap Y', Y+Y'$ を generate する基底をとって考える．
9. $\mathcal{L}$ をベクトル空間 $\mathbb{K}^n$ の部分空間からなるモジュラ束とする．$\mathcal{L}$ の 2 つの極大チェイン $C:\{0\}=X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_n=\mathbb{K}^n$，$D:\{0\}=Y_0\subset Y_1\subset\cdots\subset Y_n=\mathbb{K}^n$ に対して，$\mathbb{K}^n$ の基底 $a_1,a_2,\ldots,a_n$ が存在して，C,D は，$a_1,a_2,\ldots,a_n$ 達から generate される部分束（ブール束 $2^{[n]}$ に同型）に含まれることを示せ．

   ヒント：例えば，次元 n に関する帰納法，X_{n-1} 内の 2 つの極大チェイン $C':X_0\subset X_1\subset\cdots\subset X_{n-1}$ と $D'=D\cap X_{n-1}$ を考えて...
10. 2 つの $n\times k$ 行列 $A=(a_1\ a_2\ \cdots\ a_k)$, $B=(b_1\ b_2\ \cdots\ b_k)$ と整数 $c_1,c_2,\ldots,c_k\in\mathbb{Z}$ に対して，行列

$$A:=\sum_{i=1}^k t^{c_i}a_ib_i^\top x_i$$

    を考える．$x_1,x_2,\ldots,x_k,t$ は変数である．

(i) このとき

$$\deg \det A = \max\{c(I) \mid I \subseteq \mathcal{I}(A) \cap \mathcal{I}(B) : |I| = n\}$$

を示せ.

(ii) $\deg \mathrm{Det} A = \deg \det A$ を示せ．ヒント：問題 1 の結果を利用する.

参考文献

[1] Z. Allen-Zhu, A. Garg, Y. Li, R. Oliveira, A. Wigderson, Operator Scaling via Geodesically Convex Optimization, Invariant Theory and Polynomial Identity Testing, *Proceedings of the Symposium on Theory of Computing (STOC'18)* (2018), pp. 172-181.

[2] S. A. Amitsur: Rational identities and applications to algebra and geometry, *Journal of Algebra* **3** (1966) 304–359.

[3] M. Bačák, *Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces.* De Gruyter, Berlin, 2014.

[4] M. Bačák: Old and new challenges in Hadamard spaces, preprint, 2018, `arXiv:1807.01355`.

[5] T. Brady and J. McCammond, Braids, posets and orthoschemes. *Algebraic and Geometric Topology* **10** (2010), 2277–2314.

[6] P. Burgisser, C. Franks, A. Garg, R. Oliveira, M. Walter, A. Wigderson, Efficient algorithms for tensor scaling, quantum marginals and moment polytopes, *Proceedings of Foundations of Computer Science (FOCS'18)* 2018.

[7] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-positive Curvature.* Springer-Verlag, Berlin, 1999.

[8] J. Chalopin, V. Chepoi, H. Hirai, and D. Osajda. Weakly modular graphs and nonpositive curvature. *Memoirs of the AMS*, to appear.

[9] P. M. Cohn: *Free Rings and Their Relations, Second Edition* Academic Press, London, 1989.

[10] P. M. Cohn: *Algebra. Vol. 3. Second Edition,* John Wiley & Sons, Chichester, 1991.

[11] P. M. Cohn: *Skew Fields. Theory of General Division Rings,* Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[12] H. Derksen and V. Makam, Polynomial degree bounds for matrix semi-invariants. *Advances in Mathematics* **310** (2017), 44–63.

[13] J. Dieudonné: Les déterminants sur un corps non commutatif, *Bulletin de la Société Mathématique de France* **71** (1943). 27–45.

[14] J. Edmonds, Systems of distinct representatives and linear algebra. *Journal of Research of the National Bureau of Standards* **71B** (1967) 241–245.

[15] M. Fortin and C. Reutenauer, Commutative/non-commuative rank of linear matrices and subspaces of matrices of low rank. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* **52** (2004), B52f.

[16] S. Fujishige, T Király, K. Makino, K. Takazawa, and S. Tanigawa: Minimizing Submodular Functions on Diamonds via Generalized Fractional Matroid Matchings, EGRES Technical Report (TR-2014-14), (2014).

[17] A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira, and A. Wigderson: Operator scaling: theory and applications. *Foundations of Computational Mathematics* (2019).

[18] A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira, and A. Wigderson: Algorithmic and optimization aspects of Brascamp-Lieb inequalities, via Operator Scaling. *Geometric and Functional Analysis* **28** (2018), 100–145.

[19] K. R. Goodearl and R. B. Warfield, Jr.: *An Introduction to Noncommutative Noetherian Rings. Second Edition,* Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[20] L. Gurvits, Classical complexity and quantum entanglement. *Journal of Computer and System Sciences* **69** (2004), 448–484.

[21] M. Hamada and H. Hirai: Maximum vanishing subspace problem, CAT(0)-space relaxation, and block-triangularization of partitioned matrix, 2017, `arXiv:1705.02060`.

[22] H. Hirai: Discrete Convex Functions on Graphs and Their Algorithmic Applications, In: T. Fukunaga and K. Kawarabayashi (eds.) *Combinatorial Optimization and Graph Algorithms*, Communications of NII Shonan Meetings, Springer Nature, Singapore, (2017), pp. 67–101.

[23] H. Hirai: Uniform modular lattice and Euclidean building, preprint, 2017, `arXiv:1801.0024`.

[24] H. Hirai, Computing DM-decomposition of a partitioned matrix with rank-1 blocks. *Linear Algebra and Its Applications* **547** (2018), 105–123.

[25] H. Hirai, L-convexity on graph structures. *Journal of the Operations Research Society of Japan* **61** (2018), 71–109.

[26] H. Hirai, Computing the degree of determinants via discrete convex optimization on Euclidean buildings, *SIAM Journal on Applied Geometry and Algebra*, to appear.

[27] P. Hrubeš and A. Wigderson, Non-commutative arithmetic circuits with division, *Theory of Computing* **11** (2015), 357–393.

[28] G. Ivanyos, M. Karpinski, and Y. Qiao, and M. Santha: Generalized Wong sequences and their applications to Edmonds' problems, *Journal of Computer and System Sciences* **81** (2015), 1373–1386.

[29] G. Ivanyos, Y. Qiao, and K. V. Subrahmanyam, Non-commutative Edmonds' problem and matrix semi-invariants. *Computational Complexity* **26** (2017) 717–763.

[30] G. Ivanyos, Y. Qiao, and K. V. Subrahmanyam, Constructive noncommutative rank computation in deterministic polynomial time over fields of arbitrary characteristics. *Computational Complexity* **27** (2018), 561–593.

[31] H. Ito, S. Iwata, and K. Murota, Block-triangularizations of partitioned matrices under similarity/equivalence transformations. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **15** (1994), 1226–1255.

[32] S. Iwata and K. Murota, A minimax theorem and a Dulmage-Mendelsohn type decomposition for a class of generic partitioned matrices. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications* **16** (1995), 719–734.

[33] N. Linial, A. Samorodnitsky, and A. Wigderson, A deterministic strongly polynomial algorithm for matrix scaling and approximate permanents, *Combinatorica* **20** (2000), 545–568.

[34] L. Lovász, Submodular functions and convexity. In A. Bachem, M. Grötschel, and B. Korte (eds.): *Mathematical Programming—The State of the Art* (Springer-Verlag, Berlin, 1983), 235–257.

[35] L. Lovász, Singular spaces of matrices and their application in combinatorics. *Boletim da Sociedade Brasileira de Matemática* **20** (1989), 87–99.

[36] L. Lovász and M. Plummer, *Matching Theory*, North-Holland, Amsterdam, 1986.

[37] K. Murota, *Matrices and Matroids for Systems Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.

[38] T. Oki, Computing the Maximum Degree of Minors in Skew Polynomial Matrices, preprint, (2019), `arXiv:1907.04512.`

[39] S. Ohta and M. Pálfia. Discrete-time gradient flows and law of large numbers in Alexandrov spaces. *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* **54** (2015) 1591–1610.

[40] O. E. Raz, and A. Wigderson, Subspace arrangements, graph rigidity and derandomization, (2019), `arXiv:1901.09423`.

[41] L. Taelman: Dieudonné determinants for skew polynomial rings, *Journal of Algebra and Its Applications* **5** (2006) 89–93.