行列スケーリングから
非正曲率空間上の測地的凸最適化へ

平井 広志

名古屋大学
多元数理科学研究科
hirai.hiroshi@math.nagoya-u.ac.jp

第 35 回 RAMP 数理最適化シンポジウム (RAMP 2023)

東京工業大学，大岡山，2023年11月20日

発表の概要

- 作用素スケーリングの多項式時間アルゴリズム

Garg, Gurvits, Oliveira, Wigderson 2020 (FOCS 2016)

を契機に始まった離散・連続最適化を含む

いろいろな分野が交錯する新しい学問的潮流の紹介

- 最適化の立場からは

$\mathbb{R}^n$上の凸最適化 $\Longrightarrow$ 非正曲率空間上の凸最適化

?

シンボリックランク計算

Edmonds問題 Edmonds 1967

組合せ最適化

組合せ剛性理論

理論計算機科学

非可換 Edmonds 問題

Ivanyos et al. 2017

行列スケーリング

Sinkhorn 1964

統計

パーマネントの近似計算

Linial et al. 2000

作用素スケーリング

Gurvits 2004

量子情報

GGOW 2020 (FOCS2016)

非正曲率空間・多様体上の凸最適化

対称空間，ビルディング

非可換代数，不変式論，表現論，

微分幾何，リー群，...

（２重確率）行列スケーリング（Sinkhorn 1964）

A: $n \times n$ 非負行列

正対角行列 $\boldsymbol{R}, \boldsymbol{C}$ によって $\boldsymbol{RAC}$ を２重確率行列にできるか？

$RAC\,\mathbf{1} \approx \mathbf{1}, (RAC)^\top \mathbf{1} \approx \mathbf{1}$ としたい

応用

- マルコフ連鎖の推定
- 線形計算の前処理
- 最適輸送，Entropic regularization (Cuturi 2013)

⋮

Sinkhorn のアルゴリズム

- 行正規化：$A \leftarrow RA \quad \mathrm{s.t.}\ \ (RA)\mathbf{1} = \mathbf{1};\ \ R = \mathrm{diag}(\cdots \frac{1}{\sum_k A_{ik}} \cdots)$
- 列正規化：$A \leftarrow AC \quad \mathrm{s.t.}\ \ (AC)^{\top}\mathbf{1} = \mathbf{1};\ C = \mathrm{diag}(\cdots \frac{1}{\sum_k A_{kj}} \cdots)$
- これをくりかえす

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 4 & 10 & 1 & 1 \end{array} \\
\begin{array}{c} 6 \\ 3 \\ 4 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} & 6 & & \\ 1 & & 1 & 1 \\ & 4 & & \\ 3 & & & \end{pmatrix}
\end{array}
\ \xrightarrow{\text{行正規化}}\
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 4/3 & 2 & 1/3 & 1/3 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{array} & \begin{pmatrix} & 1 & & \\ 1/3 & & 1/3 & 1/3 \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix}
\end{array}
$$

$$
\xrightarrow{\text{列正規化}}\
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \\
\begin{array}{c} 1/2 \\ 9/4 \\ 1/2 \\ 3/4 \end{array} & \begin{pmatrix} & 1/2 & & \\ 1/4 & & 1 & 1 \\ & 1/2 & & \\ 3/4 & & & \end{pmatrix}
\end{array}
\ \xrightarrow{\text{行正規化}}\ \cdot\ \cdot\ \cdot
$$

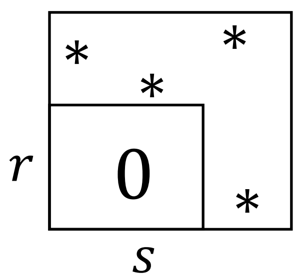
スケーリング可能性の特徴付け

Thm (Sinkhorn-Knopp 1976, Rothblum-Schneider 1989): 以下は同値.

(a) A は（近似的）２重確率スケーリング可能：

$$\forall \epsilon > 0, \exists R, C \text{ s. t. } \|RAC\mathbf{1} - \mathbf{1}\| < \epsilon, \|(RAC)^\top \mathbf{1} - \mathbf{1}\| < \epsilon$$

(b) $\inf_{x,y>0} \log \frac{(x^\top A y)^n}{x_1 x_2 \ldots x_n y_1 y_2 \ldots y_n} > -\infty$

(c) $A =$ 

, $r + s > n$ のように行と列を並べ替えれない

(d) Sinkhornアルゴリズムが収束

連続最適化と行列スケーリング

$$\inf \quad \log \frac{(x^\top A y)^n}{x_1 x_2 \ldots x_n y_1 y_2 \ldots y_n} \quad \text{s.t.} \quad x > 0, y > 0$$

- $R = \mathrm{diag}(\cdots x_i \cdots), \quad C = \mathrm{diag}(\cdots y_j \cdots)$
- Sinkhornアルゴリズム ≃ 交互最適化

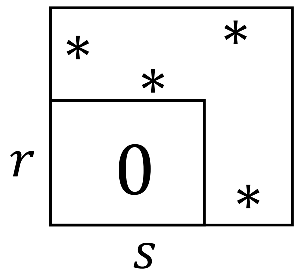
変数変換 $x_i = e^{s_i}, y_j = e^{t_j}$ すると凸最適化（幾何計画）

$$\inf \quad n \log \sum_{i,j} A_{ij} e^{s_i + t_j} - \mathbf{1}^\top s - \mathbf{1}^\top t \quad \text{s.t.} \quad s, t \in \mathbb{R}^n$$

(a) 近似的スケーリング可能性 ⇔ $\inf_{s,t \in \mathbb{R}^n} \|\nabla f(s,t)\| = 0$

(b) 最適化問題の有界性 ⇔ $\inf_{s,t \in \mathbb{R}^n} f(s,t) > -\infty$

離散最適化と行列スケーリング

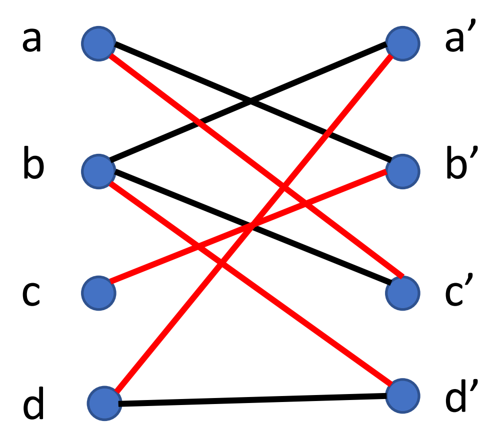
(c) $A=$ 

, $r+s>n$ となるように並べ替えれない

$\Leftrightarrow$ 2部グラフG_Aに完全マッチングが存在

Hall の結婚定理

$$A=\begin{array}{c} \\ a \\ b \\ c \\ d \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} a' & b' & c' & d' \end{array} \\ \begin{pmatrix} & 6 & 2 & \\ 1 & & 1 & 1 \\ & 4 & & \\ & & & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

$G_A=$ 

Linial, Saromoditsky, Wigderson 2000:

Sinkhorn 反復（多項式回）による完全マッチング存在判定

作用素スケーリング（Gurvits 2004）

$A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathbb{C}^{n\times n}$ がつくる完全正作用素 $X \mapsto \sum_k A_k X A_k^\dagger$ が

2 重確率 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\sum_k A_k A_k^\dagger = I$, $\sum_k A_k^\dagger A_k = I$

正則行列 g, hによって，$gA_1h^\dagger$, $gA_2h^\dagger, \ldots, gA_mh^\dagger$ を2 重確率にできるか？

作用素 Sinkhornアルゴリズム（Gurvitsのアルゴリズム, flip-flop）

- 行正規化: $A_k \leftarrow gA_k$ s.t. $g(\sum_k A_k A_k^\dagger)g^\dagger = I$
- 列正規化: $A_k \leftarrow A_k h^\dagger$ s.t. $h(\sum_k A_k^\dagger A_k)h^\dagger = I$
- これを繰り返す

スケーリング可能性の特徴付け

Thm (Gurvits 2004): 以下は同値.

(a) $A_1, A_2, \dots, A_m$ は（近似的）2重確率スケーリング可能

(b) $$\inf_{X,Y \succ 0} \log \frac{\left(\operatorname{tr} \sum_k X A_k Y A_k^\dagger\right)^n}{\det X \det Y} > -\infty$$

{X: 正定値エルミート}^{2}上
凸でないけど「測地的凸」（後述）

(c) $$SA_kT = \begin{array}{cc} & \begin{array}{|cc|} \hline * & * \\ \quad * & \\ \cline{1-1} \multicolumn{1}{|c|}{} & \\ \multicolumn{1}{|c|}{\;0\;} & * \\ \hline \end{array} \\ r & \\ & s \end{array}$$

$(\forall k)$, $r + s > n$ となる正則行列 S, T なし

交互最適化

(d) 作用素 Sinkhorn アルゴリズムが収束

Garg, Gurvits, Oliveira, Wigderson 2020 (FOCS 2016):
多項式回の Sinkhorn反復 で判定できる

シンクボリックランク計算（Edmonds 問題）

Edmonds 1967

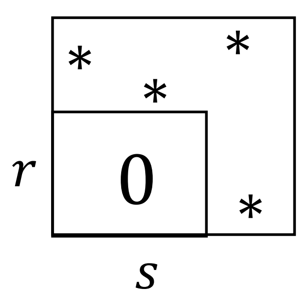
$A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $x_1, x_2, \ldots, x_m$ 変数

$$A \coloneqq A_1 x_1 + A_2 x_2 + \cdots + A_m x_m$$

A の $\mathbb{K}(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ 上のランクは多項式時間で計算できるか？

- 理論計算機科学の重要な未解決問題，PIT，回路計算量，…
- 組合せ最適化，フレームワークの剛性，行列補完，混合行列，…

例: 2 部マッチング $\Leftrightarrow$ $A = \sum_{ij\in E} e_i e_j^\top x_{ij}$

$SA_kT =$ 

$(\forall k)$, $r + s > n$ となる $S, T \in GL_n(\mathbb{K})$ なし．

→ 正則性の必要条件

非可換 Edmonds 問題 Ivanyos, Qiao, Subrahmanyam 2017

$A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathbb{K}^{n\times n}$, $x_1, x_2, \dots, x_m$ 非可換変数 $x_i x_j \neq x_j x_i$

$$A := A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_mx_m$$

A の $\mathbb{K}(\langle x_1, x_2, \dots, x_m \rangle)$ 上のランクは多項式時間で計算できるか？

自由斜体（free skew field）
Amitsur 1966

非可換ランク（nc-rank）

$$SA_kT = \begin{array}{cc} & \\ r & \end{array}\!\!\left[\begin{array}{c|c} * \quad * & * \\ \hline 0 & * \end{array}\right]$$
s

$(\forall k)$, $r + s > n$ となる $S, T \in GL_n(\mathbb{K})$ なし.

正則性の必要十分条件になる

Cohn 1995, Fortin,Rautenauer 2004

Nc-rank in P

- Garg, Gurvits, Oliveira, Wigderson 2020 (FOCS 2016): $\mathbb{K} = \mathbb{C}$
  - Sinkhorn 反復（多項式回）によるスケーリング可能性判定
  - アダマール多様体（対称空間）上の凸最適化に対する交互最適化

    → さらなる発展（Allen-Zhu et al. STOC2018, Bürgisser et al. FOCS2019）

- Ivanyos, Qiao, Subrahmanyam 2018 (ITCS 2017) : $\mathbb{K}$ 一般
  - Wong sequence ～ 交互道アルゴリズムの代数的一般化

    → 組合せ最適化の代数化？ (Hirai, Iwamasa, Oki, Soma 2023)

- Hamada, Hirai 2021 (JH 2017) : $\mathbb{K}$ 一般
  - モジュラ束上の劣モジュラ最適化
  - 非多様体的なアダマール空間（ユークリッドビルディング）上の凸最適化

これから説明

非正曲率空間，測地的な凸関数

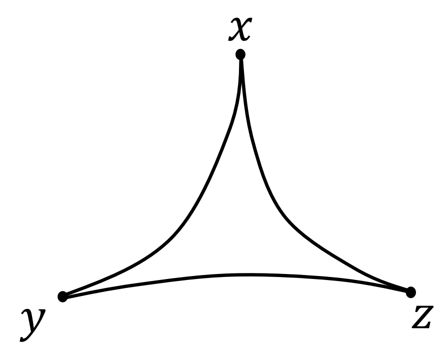
CAT(0)空間 ≔ 測地的距離空間で任意の３角形が痩せている

アダマール空間 ≔ 完備なCAT(0)空間

アダマール多様体 ≔ アダマール空間で多様体

= 断面曲率が非正の単連結完備リーマン多様体

性質：２点を結ぶ測地線が一意に定まる



定義：測地的凸関数 ⇔ 測地線に沿って凸

測地的凸最適化 ～ 測地的な凸関数の最小化問題

→ $\mathbb{R}^n$のときのように豊かな理論と応用が展開できるか？

注：アダマール多様体は$\mathbb{R}^n$と微分同相なので
その場合は特別な非凸最適化という見方もできる

アダマール多様体の例：正定値行列多様体

注: こんな多様体の一般化 → 対称空間

正定値行列多様体 $P_n \coloneqq \{\, n \times n$ エルミート正定値行列 $\} \subseteq \mathbb{R}^{n^2}$

接空間 $T_X = \{$エルミート行列$\}$

計量 $\langle H, H' \rangle_X \coloneqq \operatorname{tr} X^{-1} H X^{-1} H'$

測地線 $t \mapsto g e^{tH} g^\dagger$ (H: エルミート, $g \in GL_n(\mathbb{C})$)

Lem: $X, Y \mapsto \log \dfrac{\left(\operatorname{tr} \sum_k X A_k Y A_k^\dagger\right)^n}{\det X \det Y}$ は$P_n \times P_n$ 上測地的凸

作用素スケーリングの目的関数

∵ 極大フラット（極大ユークリッド部分空間）上で幾何計画になる

$$\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \ni (s,t) \mapsto f\left(g e^{\operatorname{diag} s} g^\dagger, h e^{\operatorname{diag} t} h^\dagger\right)$$

$$= n \log \sum_{k,i,j} \left|\left(g^\dagger A_k h\right)_{ij}\right| e^{s_i + t_j} - \mathbf{1}^\top s - \mathbf{1}^\top t - \log |\det g|^2 |\deg h|^2$$

Brascamp-Lieb 不等式における測地的凸最適化

$B_j: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_j}$ 全射, $p_j \in \mathbb{R}_+$ $(j = 1,2,\ldots,m)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(B_j x)^{p_j} dx \le C \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j(x_j) dx_j \right)^{p_j}$$

$(\forall f_j: \mathbb{R}^{n_j} \to \mathbb{R}_+, j = 1,2,\ldots,m)$

Ex: $p_1 = p_2 = 1/2, B_1 = B_2 = I$
→ Cauchy-Schwarz

BL 定数 $$\left(\inf_{X_j \succ 0} \frac{\det \sum_j p_j B_j^\dagger X_j B_j}{\prod_j (\det X_j)^{p_j}} \right)^{-\frac{1}{2}} \in (0, \infty]$$

Log とると測地的凸

Thm (Bennett, Carbery, Christ, Tao 2008) 以下は同値

- BL 定数 $< \infty$
- $n = \sum_j p_j n_j$ & $\dim V \le \sum_j p_j \dim B_j V$ $(V \subseteq \mathbb{R}^n$: ベクトル部分空間$)$

➢ 作用素スケーリングによる BL 定数計算アルゴリズム GGOW 2018

➢ 分数マトロイドマッチングとの関係 Franks,Soma,Goemans SODA2023

群軌道閉包上のノルム最小化（ Bürgisser et al. FOCS2019 ）

$G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$: 簡約代数群，$\pi: G \to GL_N(\mathbb{C})$: 有理表現，　$v \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$

$$\text{inf. } \log \|\pi(g)v\| \text{ s.t. } g \in G$$

行列スケーリング≃ Left-right torus action

作用素スケーリング ≃ Left-right action

$G \coloneqq SL(n, \mathbb{C}) \times SL(n, \mathbb{C})$

$\pi(g, h)(A_1, A_2, \ldots, A_m) \coloneqq g(A_1, A_2, \ldots, A_m)h^\dagger$

数理科学・情報科学の様々な問題との関連：

Null cone メンバシップ, Quantum marginal問題，行列・テンソル正規モデル,

Hornの問題，Brascamp-Lieb 不等式，　テンソルスケーリング,

Geometric Complexity Theory (GCT)，and more

$G \subseteq GL_n(\mathbb{C})$: 簡約代数群，$\pi: G \to GL_N(\mathbb{C})$: 有理表現，　$v \in \mathbb{C}^N \setminus \{0\}$

K: 極大コンパクト，$\|\cdot\|$: K不変ノルム

$$\text{inf.} \;\; \log \langle v, \pi(x) v \rangle \;\text{ s.t. }\; x \in P_n \cap G$$

$\because \langle \pi(g)v, \pi(g)v \rangle = \langle v, \pi(g)^\dagger \pi(g) v \rangle = \langle v, \pi(g^\dagger g) v \rangle$

$P_n \cap G$: 非正曲率対称空間

Thm [Bürgisser et al. FOCS2019]

目的関数 f（Kempf-Ness 関数）は測地的凸

Thm [Kempf-Ness + Hilbert-Mumford] 以下は同値

(a) $\inf_{x \in P_n \cap G} \|\nabla f(x)\| = 0$

(b) $\inf_{x \in P_n \cap G} f(x) > -\infty$　　$(\Leftrightarrow 0 \notin \overline{\pi(G)v}\,)$

(c) No 1-parameter subgroup $t \mapsto e(t)$ s.t. $\lim_{t \to \infty} \pi(e(t))v = 0$

Bürgisser et al. FOCS 2019: 最適化の枠組み～ 対称空間 $P_n \cap G$ 上の最適化

1 次法（勾配法），　2 次法（信頼領域法）

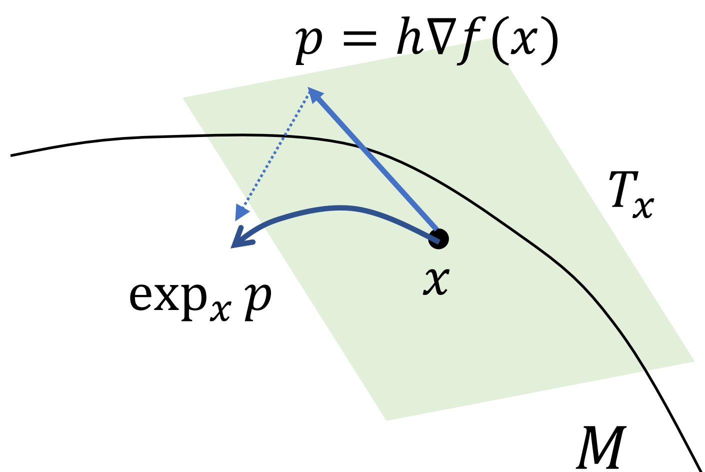
$O\left(\frac{\sigma(\pi,v)}{\epsilon^2}\right)$ 反復で

$\|\nabla f(x)\| < \epsilon$ なる x を出力

exponential

$O\left(\rho(\pi,v)\log\frac{1}{\epsilon}\right)$ 反復で

ϵ-最適解を出力



定ステップ幅アルゴリズムでは原理的に困難な場合あり（距離バリア）

Franks, Reichenbach CCC2019

→ チャレンジ：内点法のようなアルゴリズム

Hirai 2022, Nieuwboer, Walter 2023: やってみた

内点法 ～ 自己整合関数の理論（Nesterov-Nemirovski）

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 凸 で滑らか

$$\nabla^3 f_x(u,v,w) := \sum_{i,j,k} u_i v_j w_k \frac{\partial^3 f(x)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}$$

対称テンソル

Def: f: α-self-concordant $\Leftrightarrow$

$$|\nabla^3 f_x(u,u,u)| \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left(\nabla^2 f_x(u,u)\right)^{3/2} \quad (\forall x, u \in \mathbb{R}^n)$$

$$\Leftrightarrow |\nabla^3 f_x(u,u,v)| \leq \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left(\nabla^2 f_x(v,v)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\nabla^2 f_x(u,u)\right) \quad (\forall x, u, v \in \mathbb{R}^n)$$

Nesterov-Nemirovski の補題

Newton法の2次収束性保証

[Nesterov-Nemirovski 1994]

「良い」self-concordant function → 多項式時間アルゴリズムの設計

例: $x \mapsto \frac{1}{2}x^2$ は ∞-self-concordant （めちゃくちゃ良い）

多様体上では Hirai, Nieuwboer, Walter FOCS 2023

対称テンソルでない

$f: M \to \mathbb{R}$, 凸で滑らか $\qquad \nabla^3 f_x(u,v,w) := \nabla_w \nabla_v \nabla_u f(x)$

Def [HNW]

f: α-self-concordant $\Leftrightarrow$

$$|\nabla^3 f_x(u,u,v)| \le \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left(\nabla^2 f_x(v,v)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\nabla^2 f_x(u,u)\right) \quad (\forall x \in M, u, v \in T_x)$$

$$\not\Leftrightarrow \quad |\nabla^3 f_x(u,u,u)| \le \frac{2}{\sqrt{\alpha}} \left(\nabla^2 f_x(u,u)\right)^{3/2} \ (\forall x \in M, u \in T_x)$$

Thm [HNW]

- 「良い」self-concordant function → 多項式時間アルゴリズムの設計
- $M = P_n \cap G$: 非正曲率対称空間

  $x \mapsto \frac{1}{2} d(p,x)^2$ は 1-self-concordant （満足ゆくほど良くない）

この結果を用いてノルム最小化アルゴリズムは設計できた.
しかし，既存のものと同性能で，距離バリアは突破できなかった.
ただ，他の問題（geometric median, minimum enclosing ball）へ応用できた.

有界性判定に対する無限遠境界（Boundary at Infinity）からのアプローチ

～ アダマール空間上の凸解析

行列スケーリングのとき

$$\inf \quad n \log \textstyle\sum_{i,j} A_{ij} e^{s_i + t_j} - \mathbf{1}^\top s - \mathbf{1}^\top t \quad \text{s.t.} \ \ s, t \in \mathbb{R}^n$$

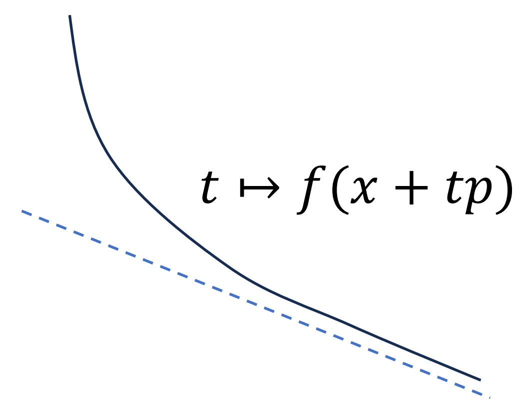
(a) 近似的スケーリング可能性 $\Leftrightarrow$ $\inf_{s,t \in \mathbb{R}^n} \|\nabla f(s,t)\| = 0$

(b) 最適化問題の有界性 $\Leftrightarrow$ $\inf_{s,t \in \mathbb{R}^n} f(s,t) > -\infty$

(c) Aのゼロブロックのサイズ$\leq n$ $\Leftrightarrow$ $f^\infty(u,v) \geq 0 \ \ (\forall u, v \in \mathbb{R}^n)$

Def [後退関数f^∞] $f: \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, 凸

$$f^\infty(p) \coloneqq \lim_{t \to \infty} \frac{f(x+tp) - f(x)}{t} \quad (p \in \mathbb{R}^d)$$



一般に, (a) $\Leftrightarrow$ (c) $\Leftarrow$ (b), f^∞は正斉次凸

アダマール空間上の後退関数

Kapovich, Leeb, Milson 2009, Hirai 2022

M: アダマール多様体, $f: M \to \mathbb{R}$ 凸

Def [後退関数 KLM, H]

$$f^\infty(p) := \lim_{t\to\infty} \frac{f(\exp_x tp) - f(x)}{t} \qquad (p \in T_x)$$

$\cong$ 位相は異なる

無限遠境界 CM^∞

測地光線の同値類，アダマール空間になる

x の取り方によらず，$f^\infty: CM^\infty \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ とみなせる

Thm [KLM, H]: (a) $\inf \|\nabla f\| = 0$ $\Leftrightarrow$ (c) $f^\infty \geq 0$ $\Leftarrow$ (b) $\inf f > -\infty$

Thm [H]: f^∞ は正斉次凸

Kemp-Ness関数のときは逆も成立

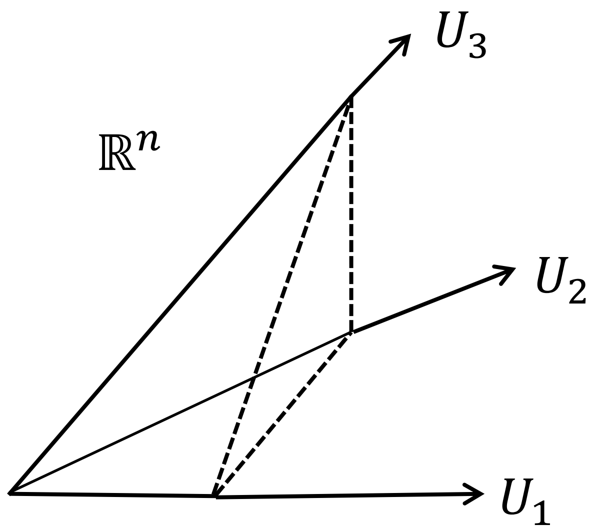
正定値行列多様体 P_n の無限遠境界CP_n^∞

ベクトル空間列（フラッグ）

$$CP_n^\infty = \left\{ \sum_i \alpha_i U_i :\ \alpha_i \geq 0\ (i \neq n), U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n = \mathbb{C}^n \right\}$$

$\parallel$ $\qquad$ $\parallel$ $\qquad$ $U_i = span\,\{u_1, \dots, u_i\}$

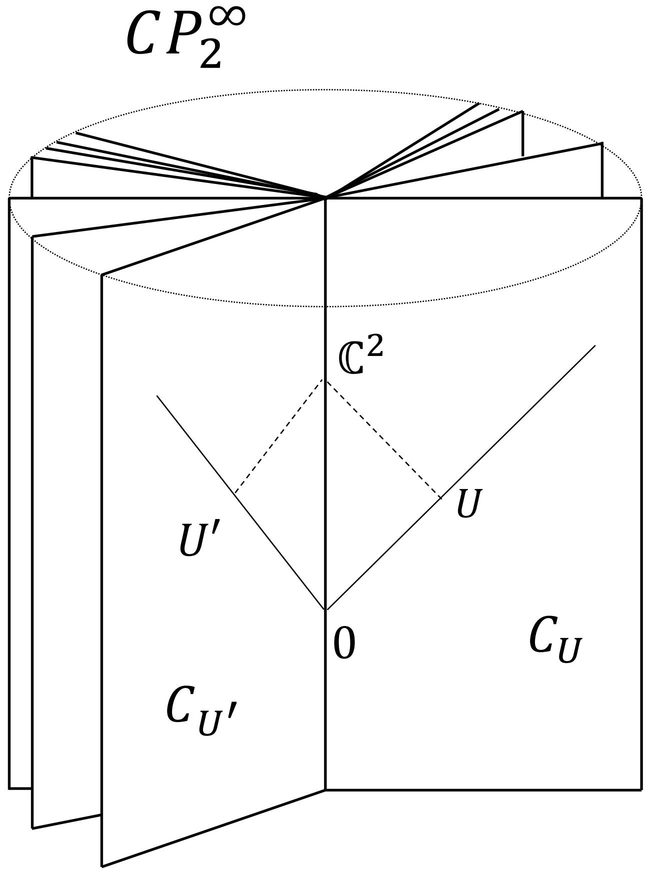
$$T_X = \{\text{エルミート行列}\} \ni \sum_i (\alpha_i + \alpha_{i+1} + \cdots + \alpha_n) u_i u_i^\dagger$$

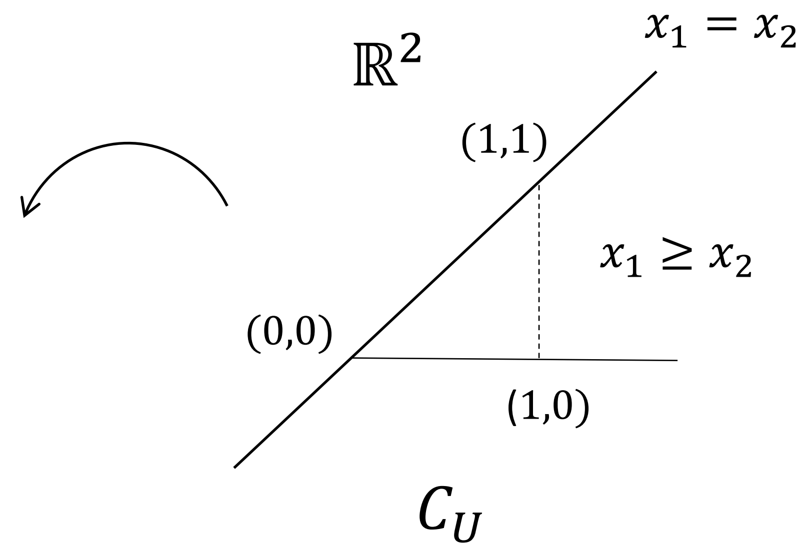


の張り合わせ（非多様体）

- ユークリッドビルディングという非正曲率空間
- $f^\infty \geq 0$ は CP_n^∞ 上の凸最適化で判定できる
- 離散化できるとき → ベクトル部分空間族上の劣モジュラ最適化

P_2 の 無限遠境界 CP_2^∞





$$CP_n^\infty = \left\{ \sum_i \alpha_i U_i : \ \alpha_1 \geq 0 \,, U_1 \subset U_2 = \mathbb{C}^2 \right\}$$

作用素スケーリングのとき

$$\inf.\ \log \frac{\left(\mathrm{tr} \sum_k X A_k Y A_k^\dagger\right)^n}{\det X \det Y} \quad \text{s.t.}\ \ X, Y \in P_n$$

(a) 近似的スケーリング可能性 $\Leftrightarrow$ $\inf_{X,Y \in P_n} \|\nabla f(X,Y)\| = 0$

(b) 最適化問題の有界性 $\Leftrightarrow$ $\inf_{X,Y \in P_n} f(X,Y) > -\infty$

(c) $U^\dagger A_k V = \{0\} (\forall k), \dim U + \dim V > n$

となるベクトル部分空間 U, V なし $\Leftrightarrow$ $f^\infty(p,q) \geq 0\ \ (\forall p, q \in CP_n^\infty)$

Thm [Fortin-Rautenauer 2004]

$$\text{nc-rank} \sum_k A_k x_k = 2n - \text{Min.}\ \ \dim U + \dim V$$

$$\text{s.t.}\ \ U^\dagger A_k V = \{0\}\ (\forall k)$$

$$U, V \subseteq \mathbb{C}^n\text{: ベクトル部分空間}$$

Lovasz拡張 ↓↑ 離散化

Hamada, Hirai 2021: $\text{Min.}\ \|p\|_1 + \|q\|_1 + \sum_k g_k(p,q)\ \ \text{s.t.}\ \ p, q \in CP_n^\infty$

を分割近接点法で解く.

まとめ

行列スケーリングから作用素スケーリング，群軌道上の最適化,
アダマール空間上の凸最適化への一般化やシンボリックランク計算と
の関わりを紹介した.

今後の課題・これからやりたいこと

- 境界 CP_n^∞ 上の最適化，Hamada,Hirai 2021の改良
- 境界 CM^∞ をMの「双対空間」とみた Legendre-Fenchel 双対理論の展開
  Hirai 2022 ～
- 多様体上の多項式内点法に対する情報幾何的アプローチ
  inspired by Ohara, Tsuchiya 2007
- 代数的組合せ最適化の展開　toward 非２部マッチング，Lamanの定理, …

Hirai, Iwamasa, Oki, Soma 2023: 分数マトロイドマッチングまでは扱える

平井広志：CAT(0)空間上のアルゴリズムと最適化について
（電子情報通信学会誌，平成30年3月, Vol. 101, No.3, p.276-279）

平井広志：「代数的組合せ最適化---Edmonds 問題の最近の発展について」
（2019 年度組合せ最適化セミナー資料）

平井広志：「行列スケーリングの数理」（学部 4 年演習資料）

M. Hamada and H. Hirai:
Computing the nc-rank via discrete convex optimization on CAT(0) spaces,
SIAM Journal on Applied Algebra and Geometry 5 (2021), 455--478.

H. Hirai:
Convex analysis on Hadamard spaces and scaling problems, arXiv, 2022,
Foundations of Computational Mathematics, to appear.

H. Hirai, H. Nieuwboer, M. Walter:
Interior-point methods on manifolds: theory and applications, arXiv, 2023, FOCS 2023.

H. Hirai, Y. Iwamasa, T. Oki, T. Soma:
Algebraic combinatorial optimization on the degree of determinants of
noncommutative symbolic matrices, arXiv, 2023.