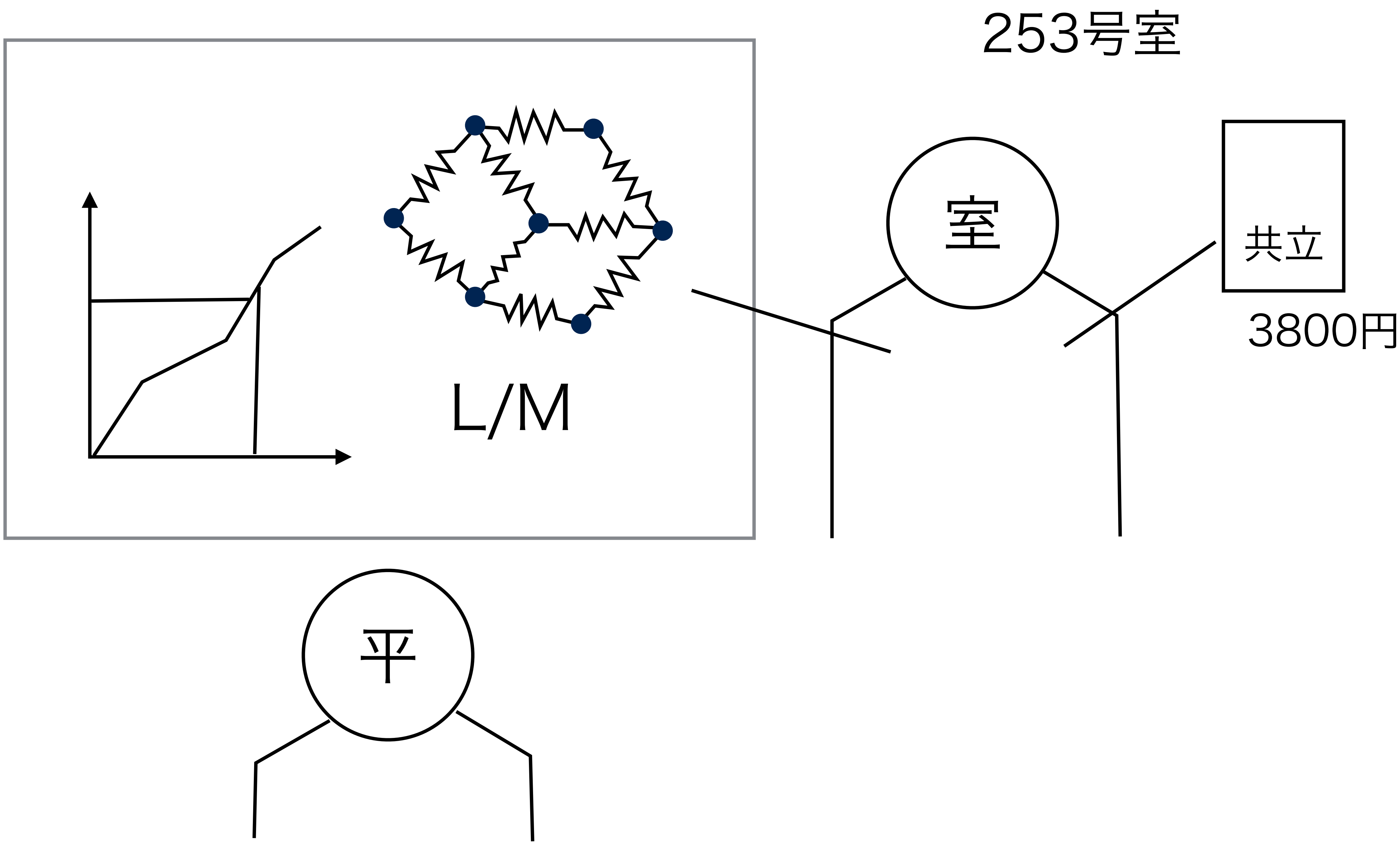
グラフ上の離散凸関数：その応用と展望

平井広志

東京大学 大学院情報理工学系研究科
数理情報学専攻

室田一雄教授還暦記念シンポジウム
「数理工学の伝統と潮流」2015/4/11

2002年3月ごろ



L$^\natural$凸関数を $\mathbf{Z}^n$ から「グラフ」上へ拡張する試み

・動機と応用：

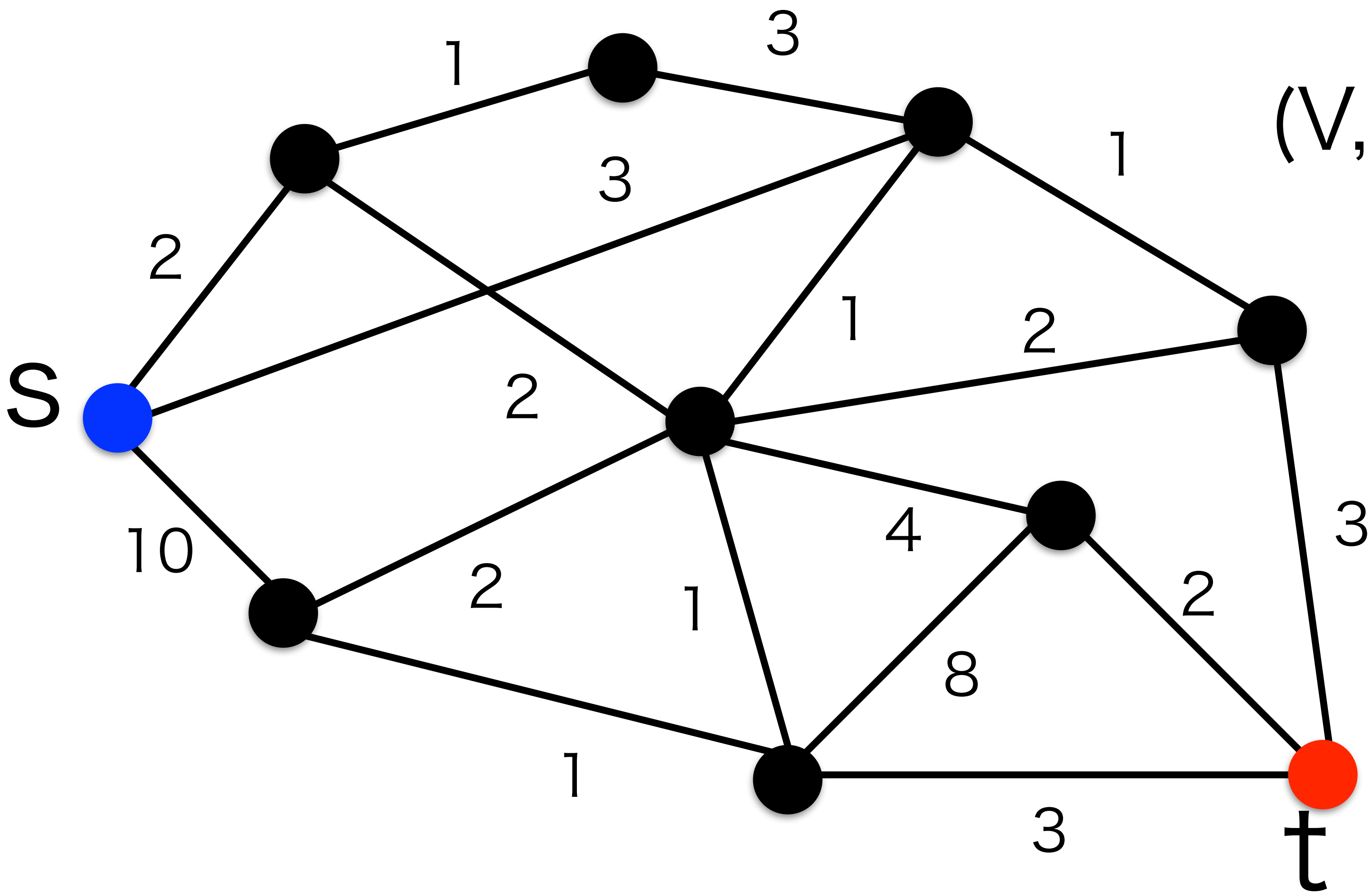
多品種フローのポテンシャル理論

グラフ上の施設配置問題の可解性分類

・展望：

負曲率距離空間上の凸最適化理論に向けて？

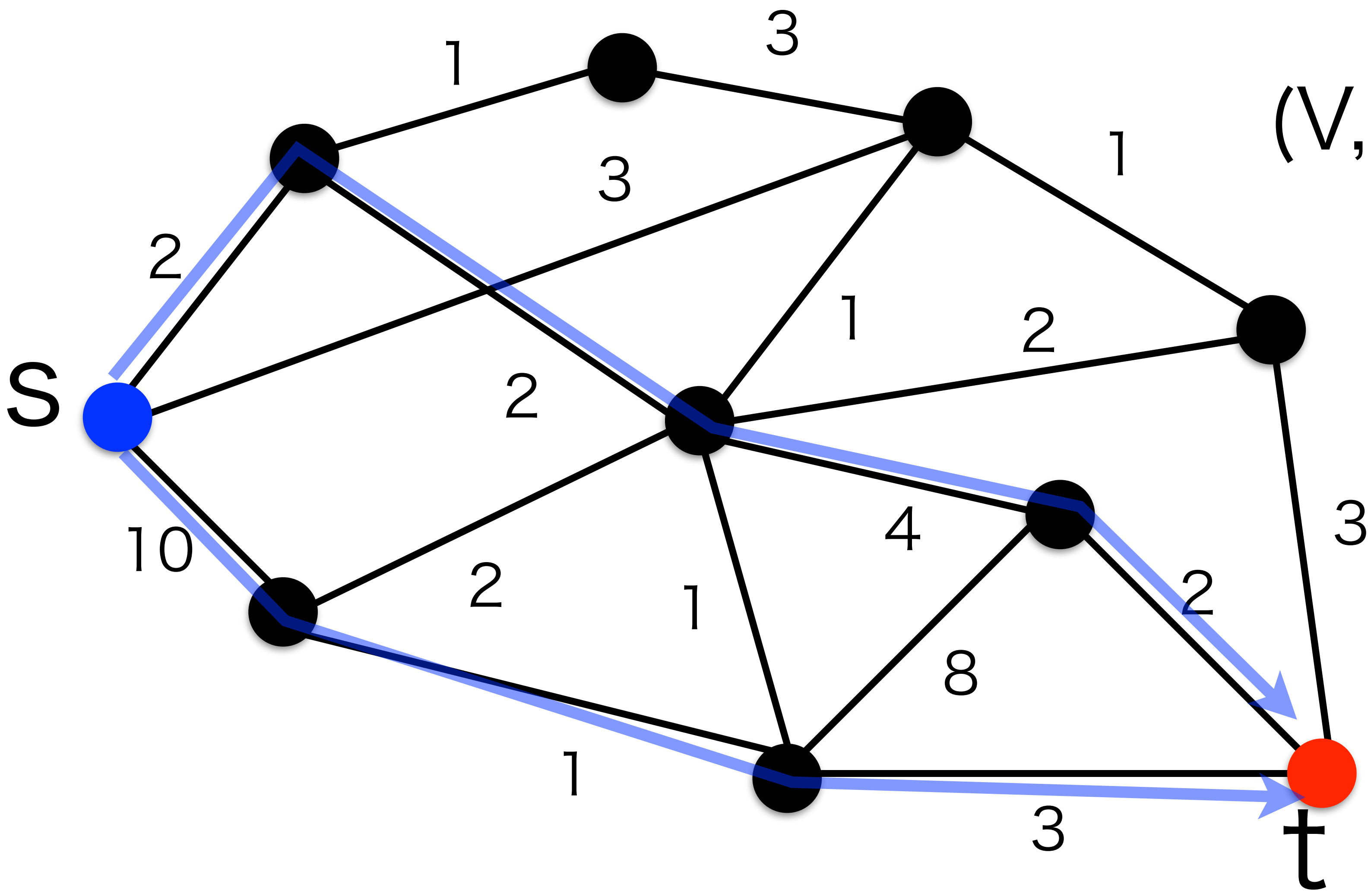
ネットワークフロー



(V,E,c, s,t)

V= {1,2,⋯,n}

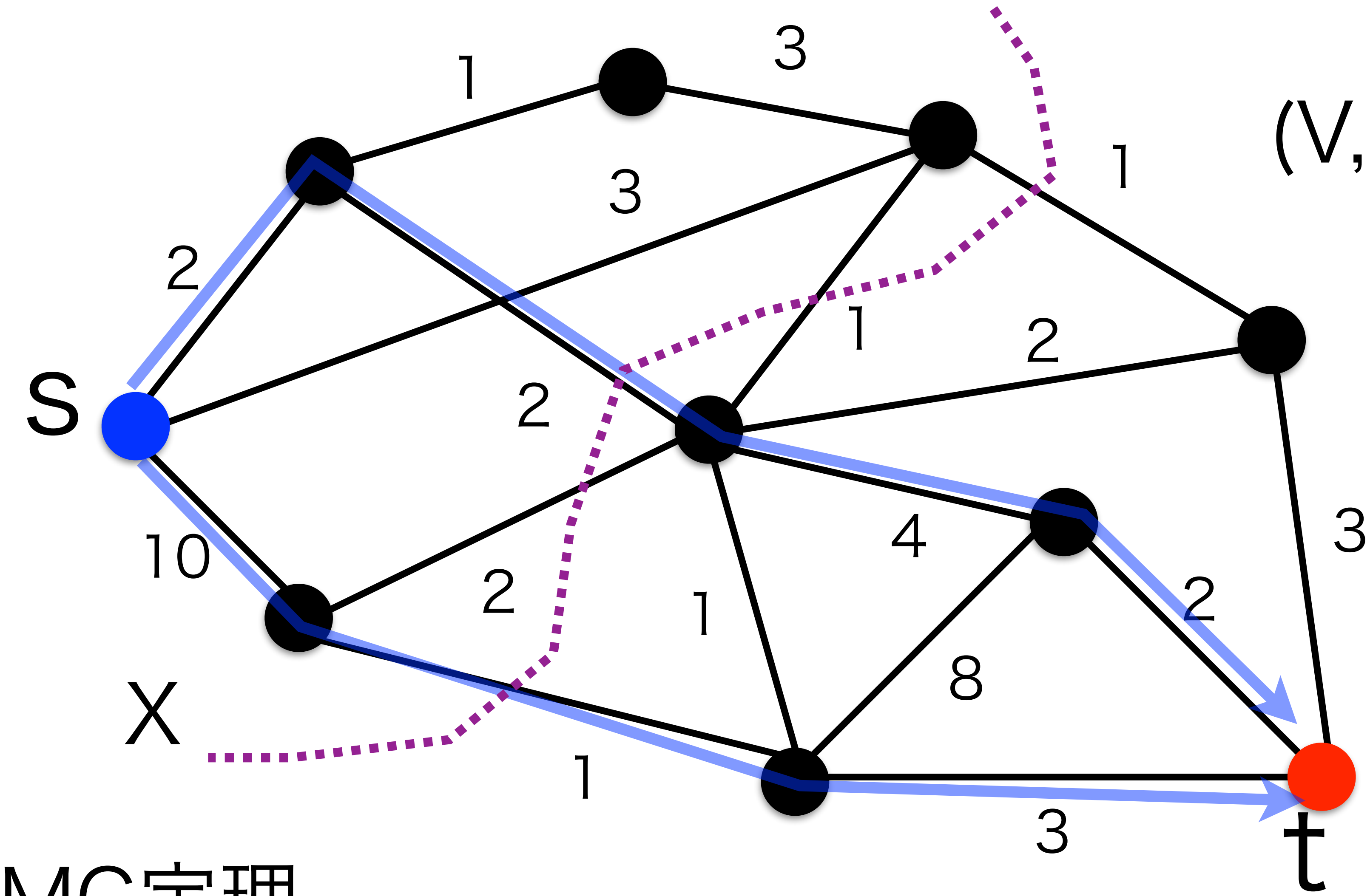
ネットワークフロー



(V,E,c, s,t)

V= {1,2,⋯,n}

ネットワークフロー



(V,E,c, s,t)

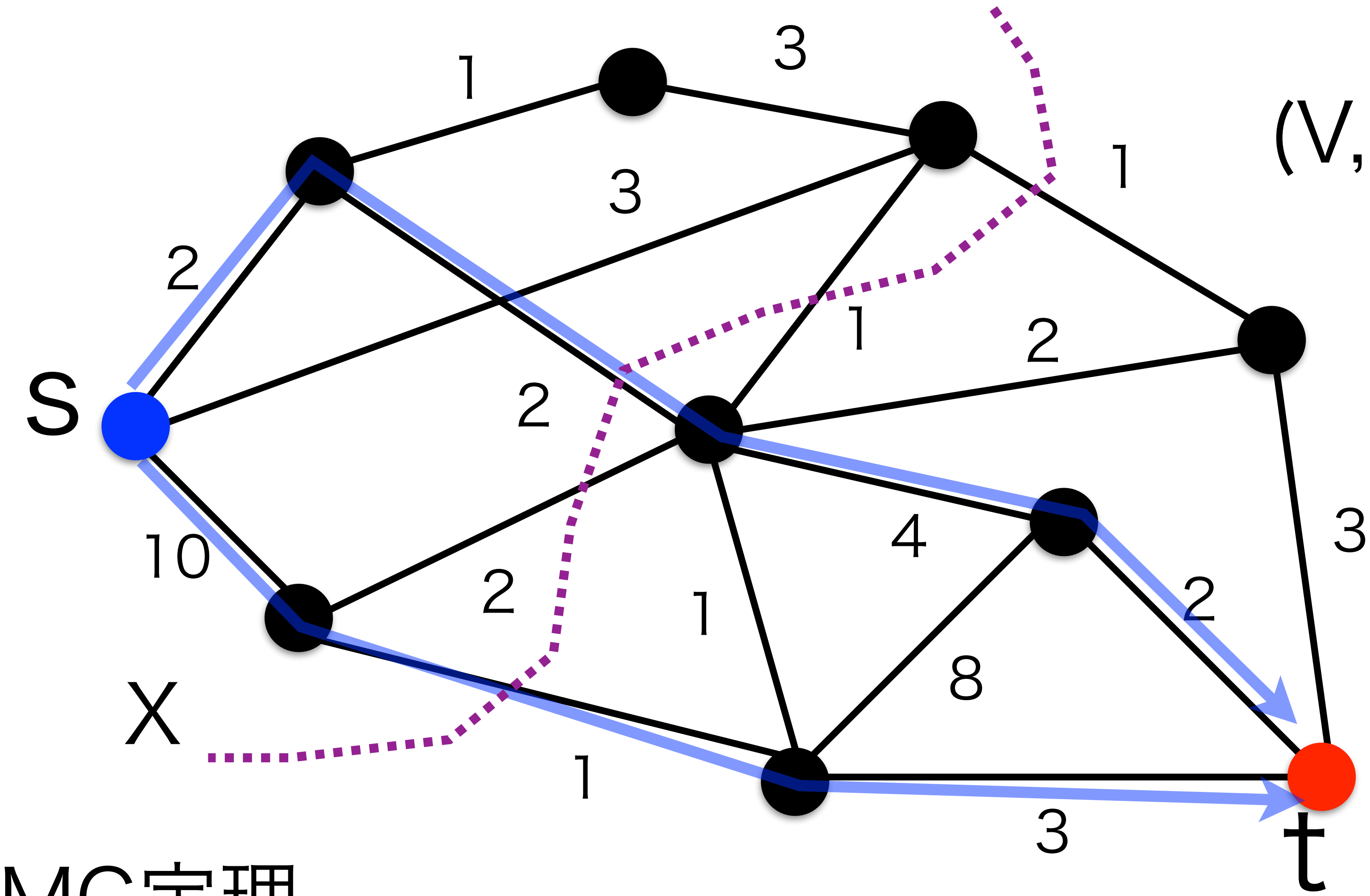
V= {1,2,⋯,n}

MFMC定理

Max (s,t)-フロー ＝ Min. Xから出る枝の容量の総和

s.t. X ⊆ {1,2,⋯,n}, s ∈ X ∌ t

ネットワークフロー



(V,E,c, s,t)

V= {1,2,⋯,n}

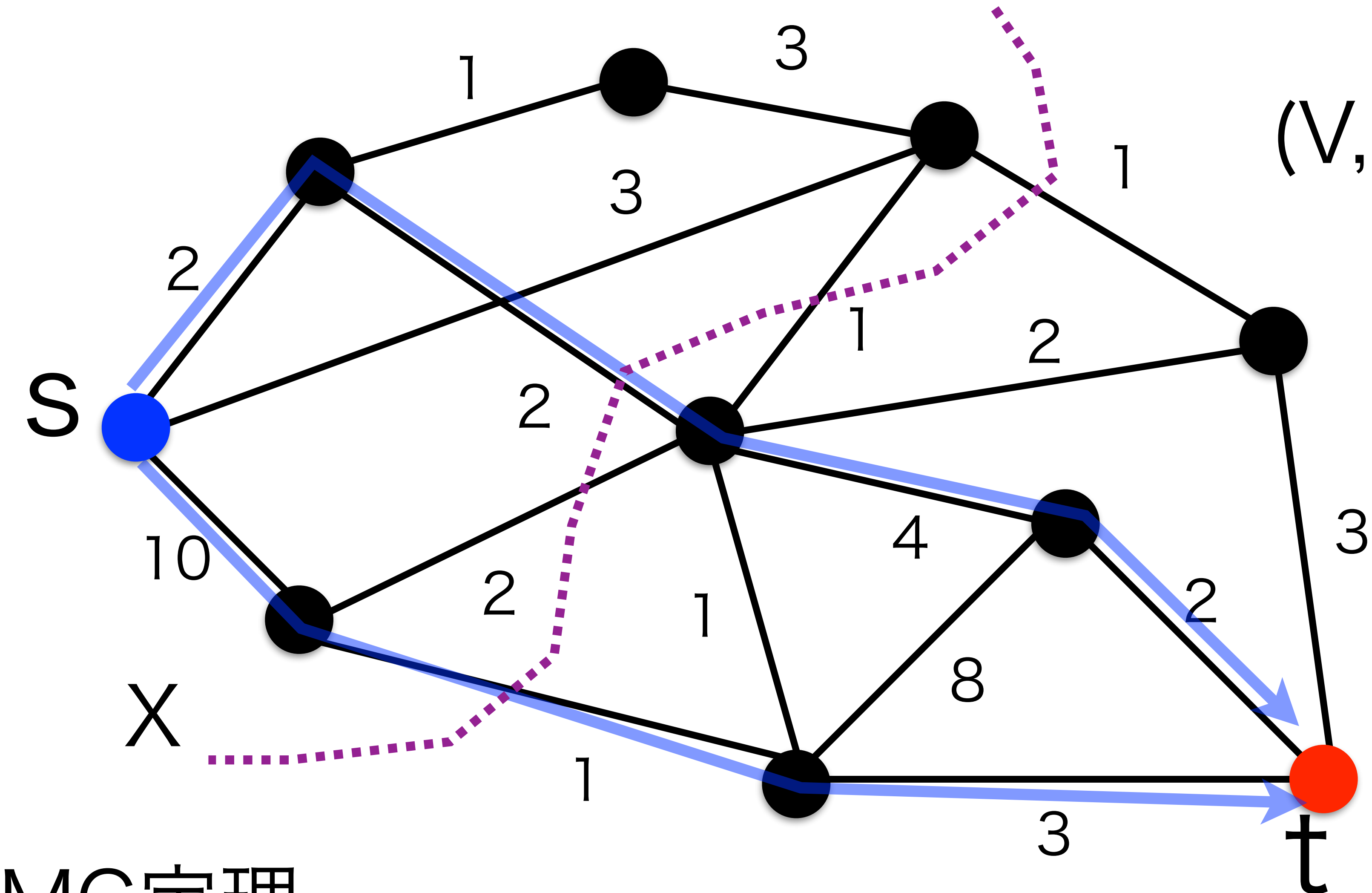
劣モジュラ関数

MFMC定理

Max (s,t)-フロー = Min. Xから出る枝の容量の総和

s.t. $X \subseteq \{1,2,\cdots,n\}$, $s \in X \not\ni t$

ネットワークフロー



(V,E,c, s,t)

V= {1,2,⋯,n}

劣モジュラ関数

MFMC定理

$$\text{Max (s,t)-フロー} = \text{Min.} \sum_{ij \in E} c(ij)|p_i - p_j|$$

$$\text{s.t.} \quad (p_1, p_2, ..., p_n) \in \{0,1\}^n$$

$$p_s = 0, p_t = 1$$

最小費用フローの双対

Min. $\quad g(p) := \sum_i g_i(p_i) + \sum_{ij} g_{ij}(p_i - p_j)$

s.t. $\quad p := (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbf{Z}^n$

最小費用フローの双対

境界条件

電位差

Min. $\quad g(p) := \sum_i g_i(p_i) + \sum_{ij} g_{ij}(p_i - p_j)$

s.t. $\quad p := (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbf{Z}^n$

電位(ポテンシャル)

最小費用フローの双対

境界条件

電位差

Min. $g(p) := \sum_i g_i(p_i) + \sum_{ij} g_{ij}(p_i - p_j)$

s.t. $p := (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \mathbf{Z}^n$

電位(ポテンシャル)

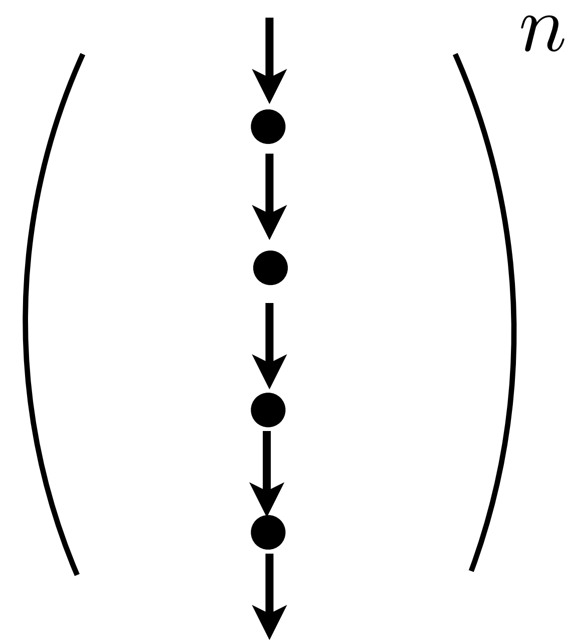
gはL$^\natural$凸関数 (Murota, Murota-Fujishige, Favati-Tardella)

$$g(p) + g(q) \geq g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right) + g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) \quad (p, q \in \mathbf{Z}^n)$$

最小費用フローの双対

Min. $\quad g(p) := \sum_{i} g_i(p_i) + \sum_{ij} g_{ij}(p_i - p_j)$

s.t. $\quad p := (p_1, p_2, \ldots, p_n) \in$

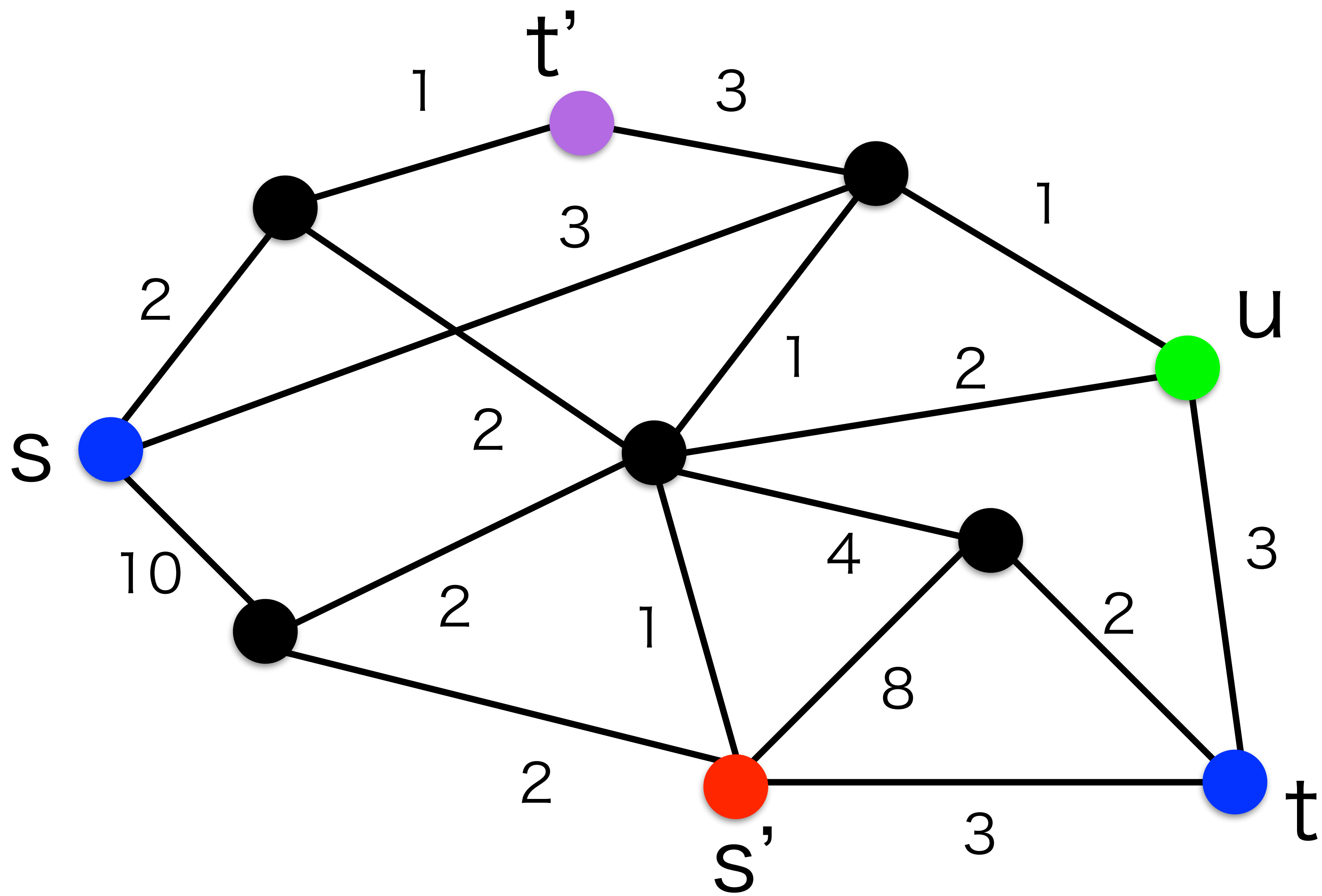


観察：$\text{L}^{\natural}$凸関数はパスの直積上で定義可

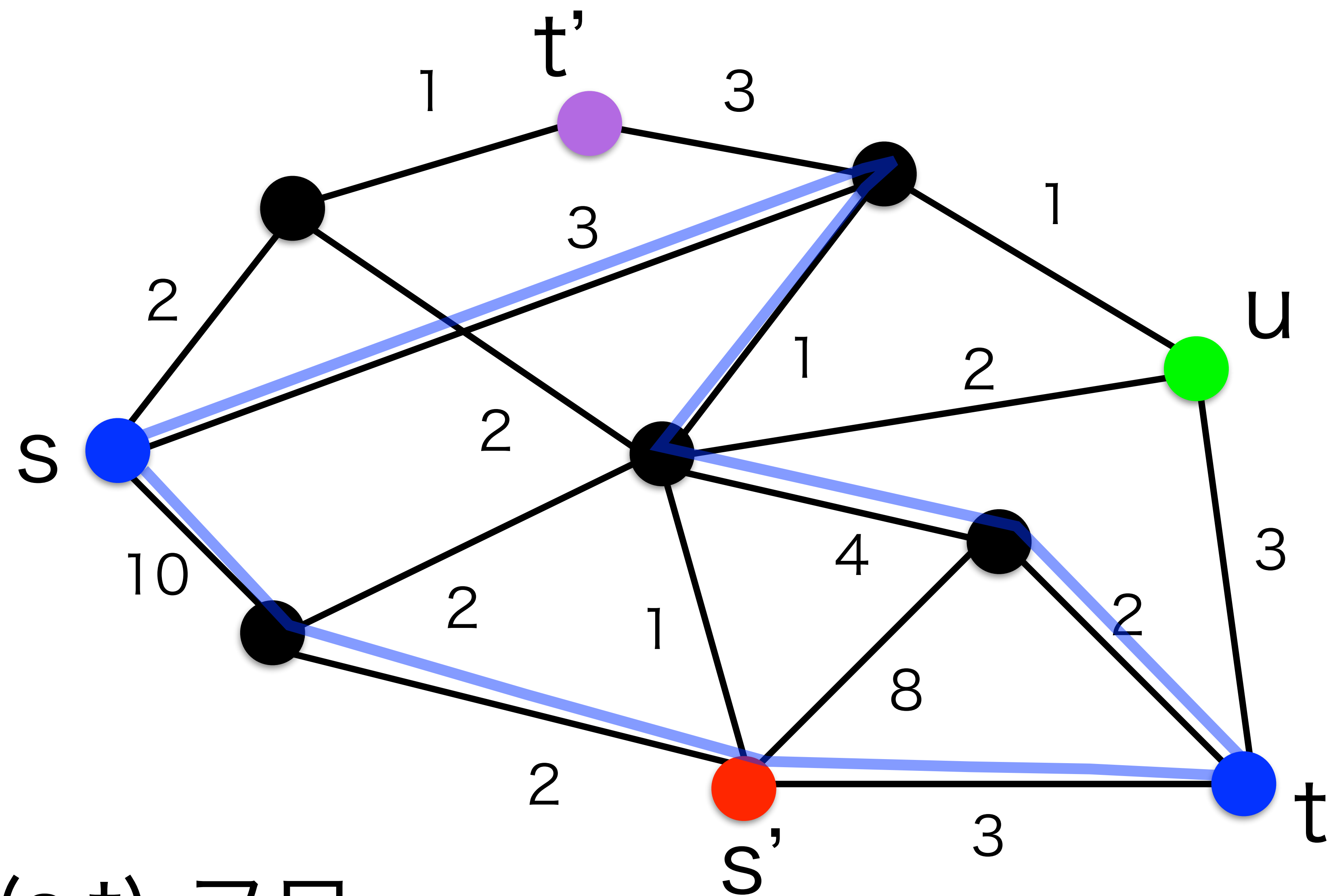
gは$\text{L}^{\natural}$凸関数 (Murota, Murota-Fujishige, Favati-Tardella)

$$g(p) + g(q) \geq g\left(\left\lfloor \frac{p+q}{2} \right\rfloor\right) + g\left(\left\lceil \frac{p+q}{2} \right\rceil\right) \quad (p, q \in \mathbf{Z}^n)$$

多品種フロー

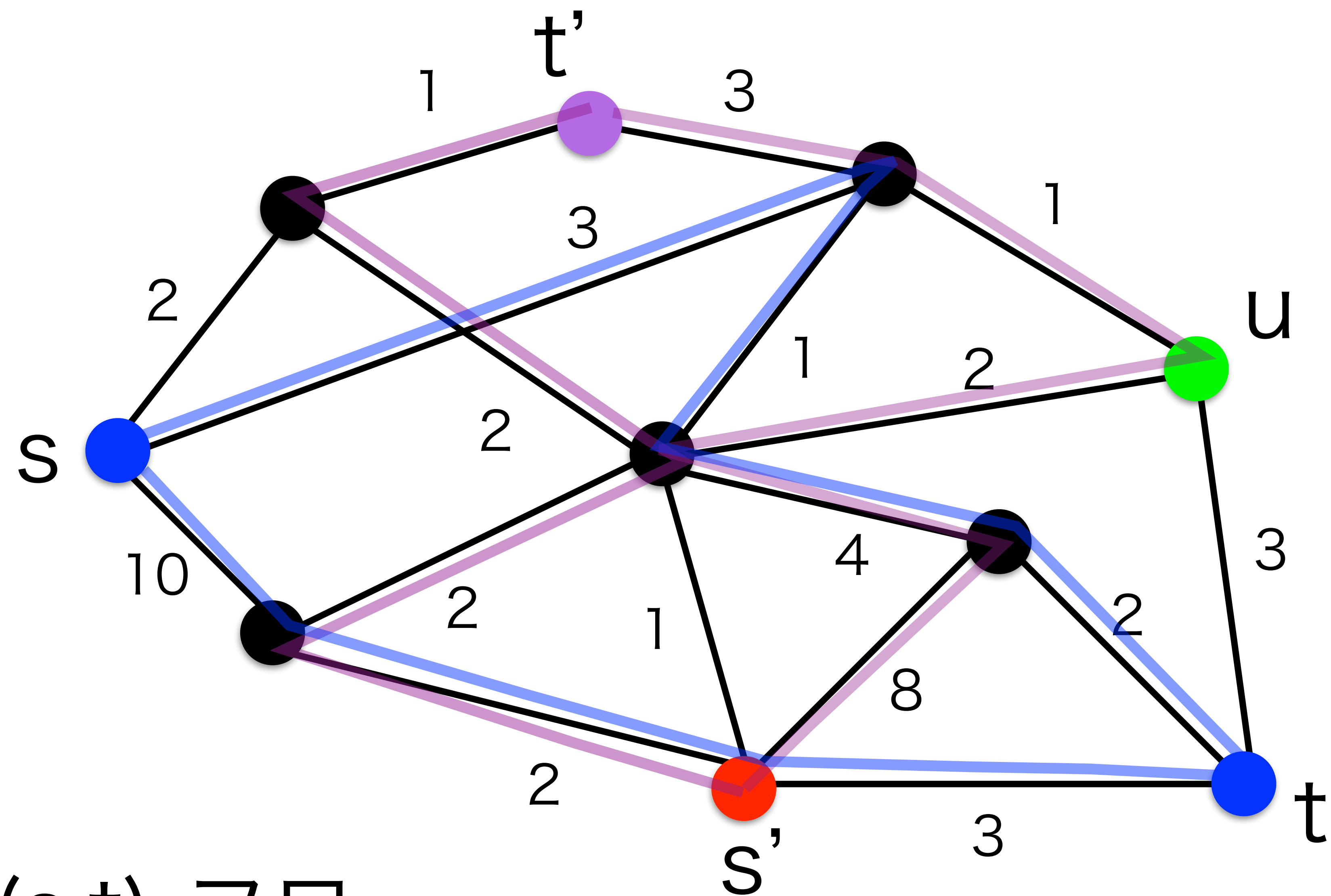


多品種フロー



(s,t)-フロー

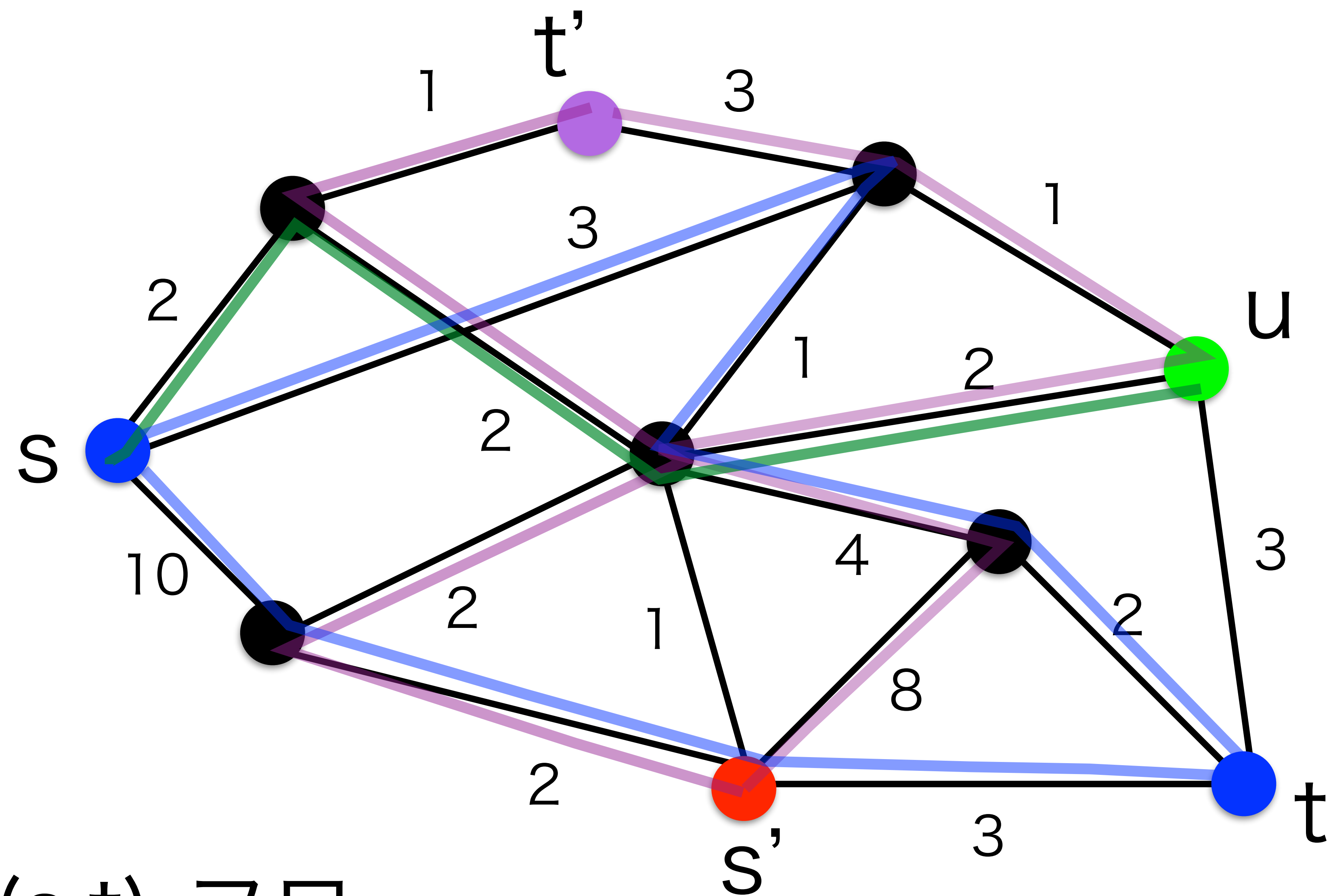
多品種フロー



(s,t)-フロー

(s’,t’)-フロー

多品種フロー

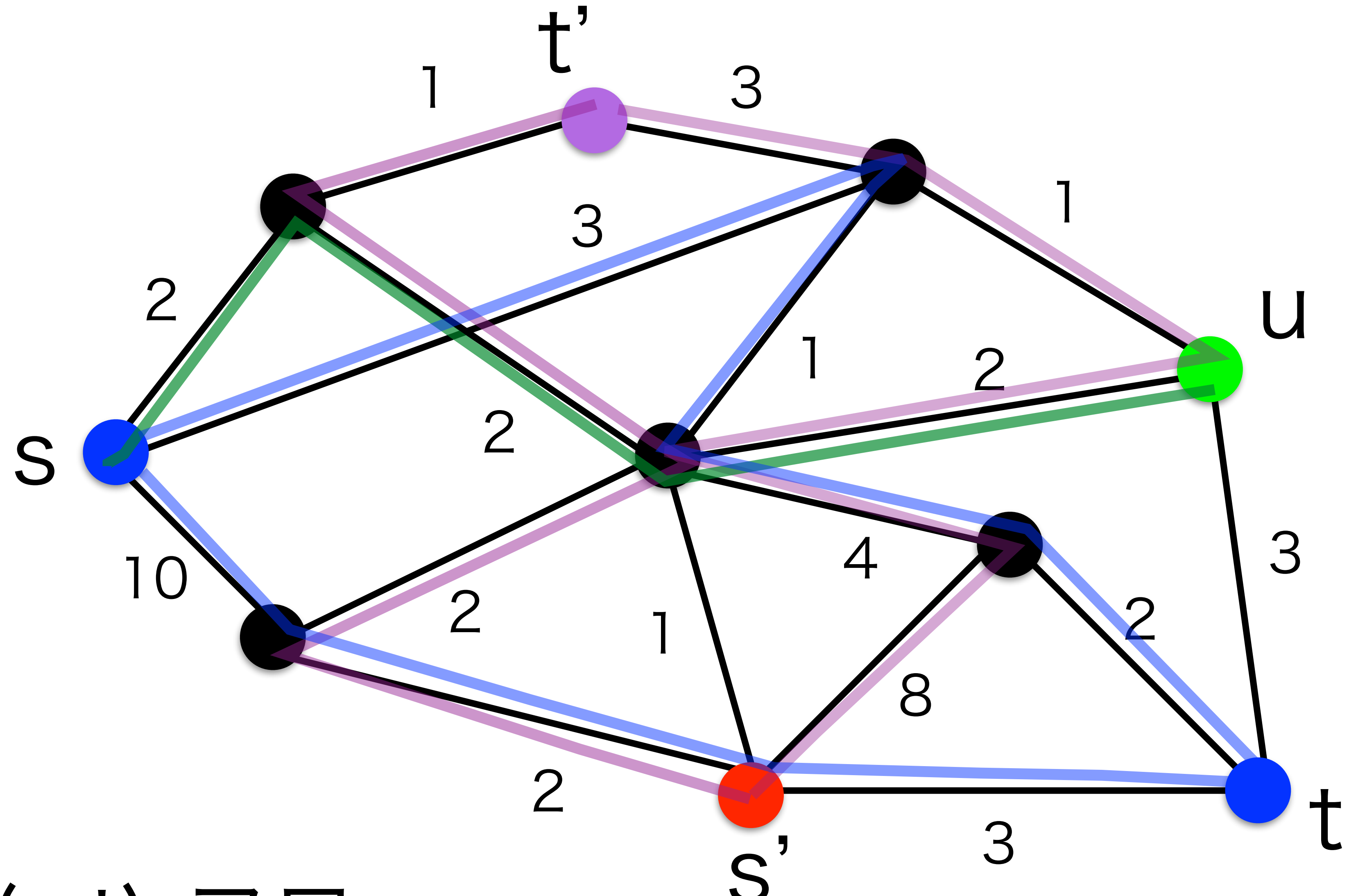


(s,t)-フロー

(s’,t’)-フロー

(s,u)-フロー

多品種フロー



(s,t)-フロー

(s',t')-フロー

(s,u)-フロー

・・・

多品種フローのポテンシャル理論

1971: 翁長・角所，伊理（Japanese Theorem)

1978~ Karzanov, Lomonosov

1998: Chepoi, Karzanov (Tight spanの応用)

Isbell 64, Dress 84

2009~ Hirai

(Tight span双対理論，fractionality問題の解決)

多品種フローのポテンシャル理論

1971: 翁長・角所，伊理 (Japanese Theorem)

1978~ Karzanov, Lomonosov

1998: Chepoi, Karzanov (Tight spanの応用)

Isbell 64, Dress 84

2009~ Hirai

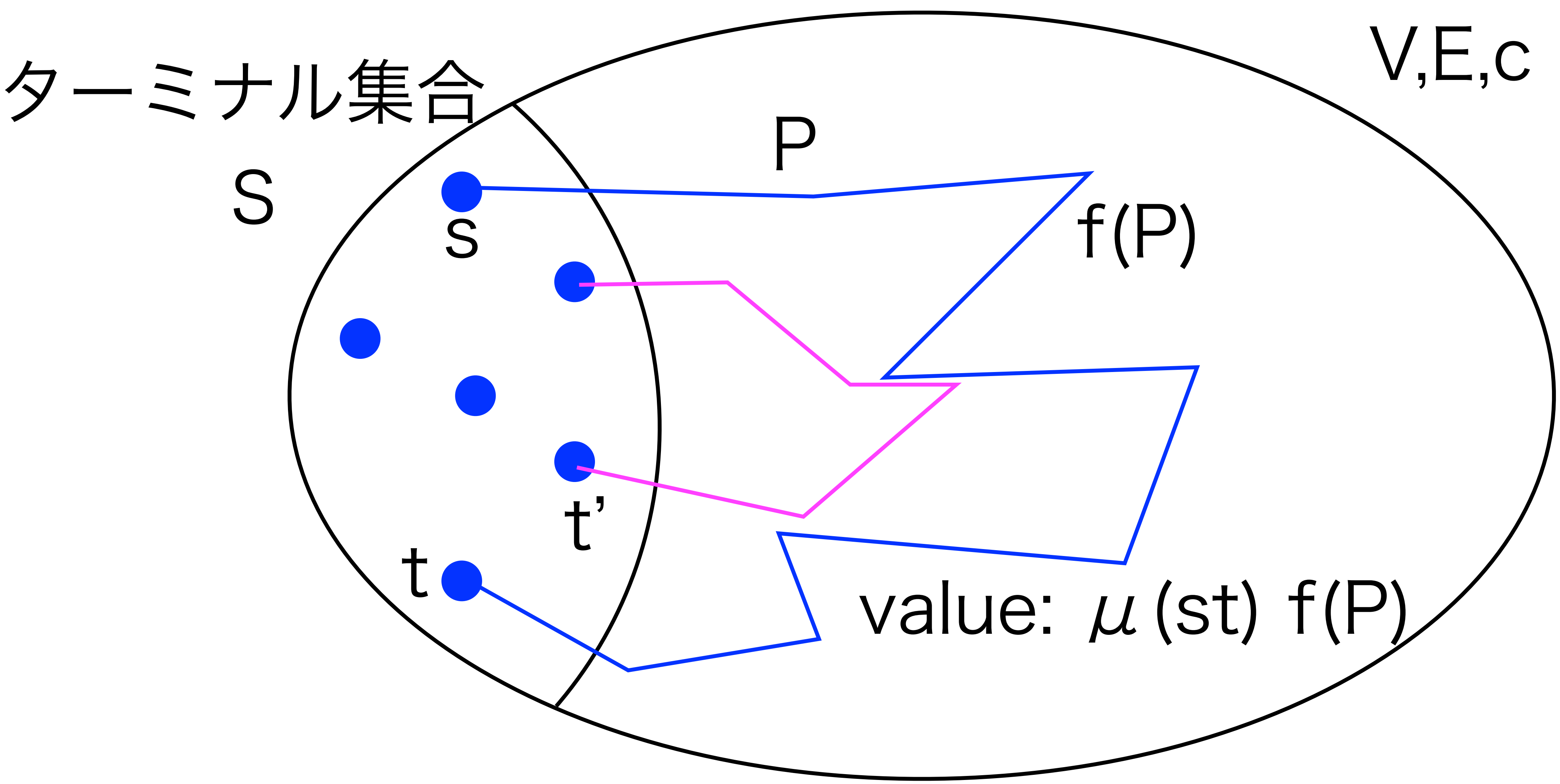
(Tight span双対理論，fractionality問題の解決)

「グラフ上の離散凸関数」という問題意識

多品種フロー最大化問題

μ: { ターミナル対 } → Z+

$$\text{Max.} \quad \sum_{s,t,\ (s,t)\text{-path } P} \mu(st)\, f(P) \quad \text{s.t. 多品種フロー } f$$



Max. Σ μ(st) f(P)

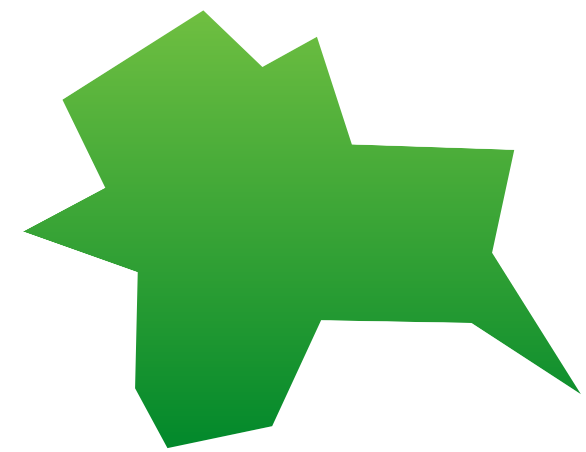
Jp定理
$\overset{}{=}$ Min. $\displaystyle\sum_{ij \in E} c(ij)d(i,j)$

s.t. d : メトリック on V

$d|_S \geq \mu$

Max. Σ μ(st) f(P)

$\overset{\text{H.09}}{=}$ Min. $\displaystyle\sum_{ij\in E} c(ij)D(p_i,p_j)$

s.t. $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Big($  $\Big)^n$

+ 境界条件

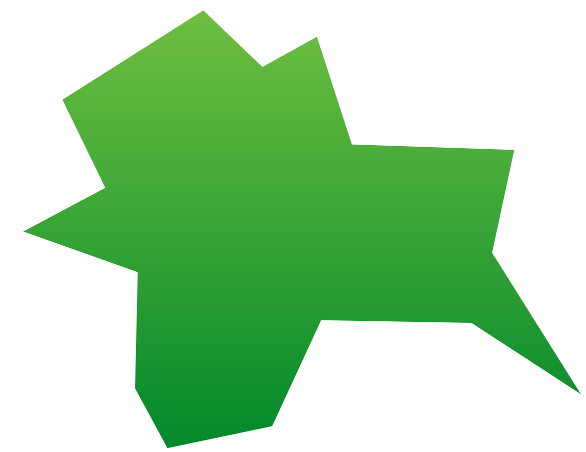
(T_μ, D)

μのtight span

Max. Σ μ(st) f(P)

$\overset{\text{H.09}}{=}$ Min. $\displaystyle\sum_{ij\in E} c(ij)D(p_i, p_j)$

電位差

s.t. $(p_1, p_2, \dots, p_n) \in \Big($  $\Big)^n$

電位(ポテンシャル)

\+ 境界条件

(T_μ, D)

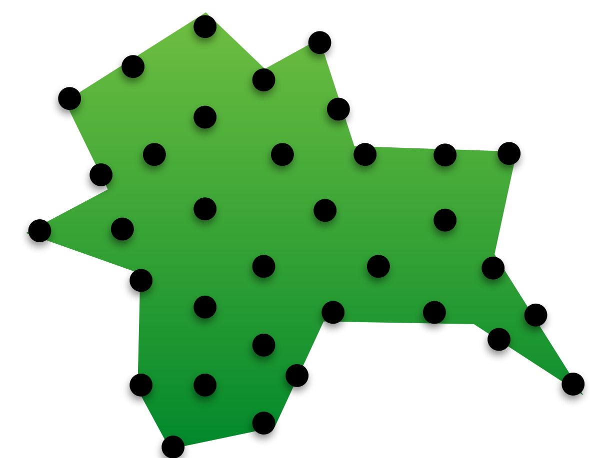
μ のtight span

Max. $\Sigma\ \mu(st)\ f(P)$

$\overset{\text{H.09}}{=}$ Min. $\displaystyle\sum_{ij \in E} c(ij) D(p_i, p_j)$

If T_μ が良い形 $(\dim T_\mu \leq 2)$

s.t. $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \left(\quad \right)^n$



\+ 境界条件

(T_μ, D)

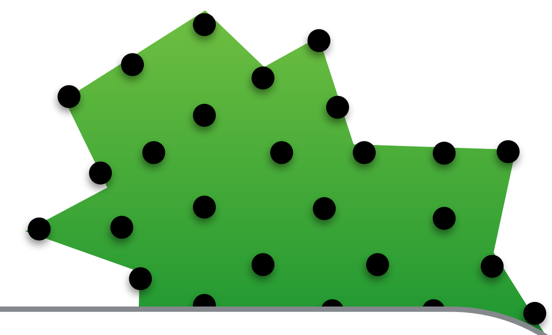
μ のtight span

Max. $\Sigma\ \mu(\mathrm{st})\ f(P)$

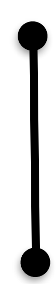
$\overset{\text{H.09}}{=}$ Min. $\displaystyle\sum_{ij\in E} c(ij) D(p_i, p_j)$

If T_μ が良い形

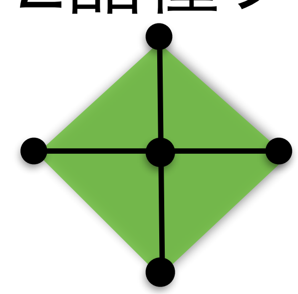
$(\dim T_\mu \le 2)$

s.t. $(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Big($  $\Big)^n$

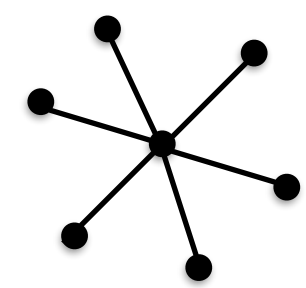
1品種フロー



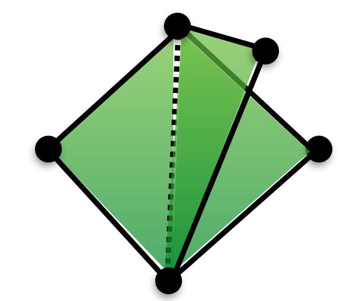
2品種フロー



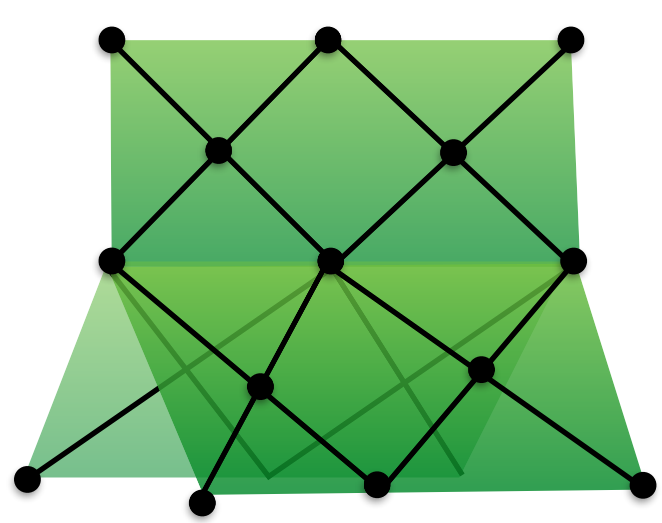
一様フロー



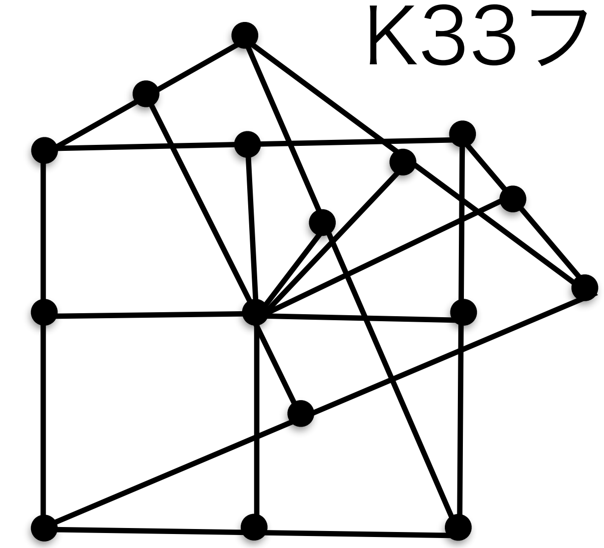
K23フロー



K2+K3フロー



K33フロー



$\cdots$

多重施設配置(Multifacility location)

Γ : グラフ(都市)

$1, 2, \ldots, n$ ：施設

通信コストを最小化する最適な施設配置

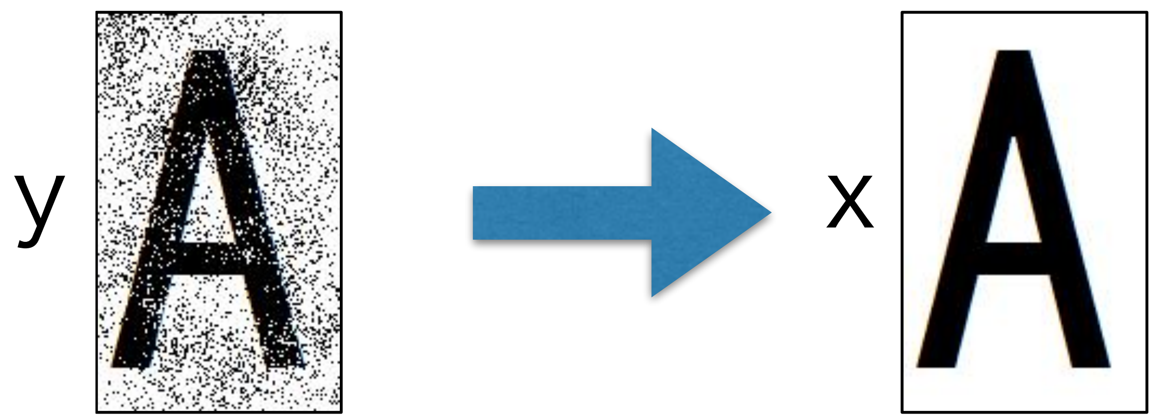
$$p_1, p_2, \ldots, p_n \in \Gamma$$

を求める:

$$\sum_{i,v} b_{iv} d_\Gamma(p_i, v) + \sum_{i,j} c_{ij} d_\Gamma(p_i, p_j)$$

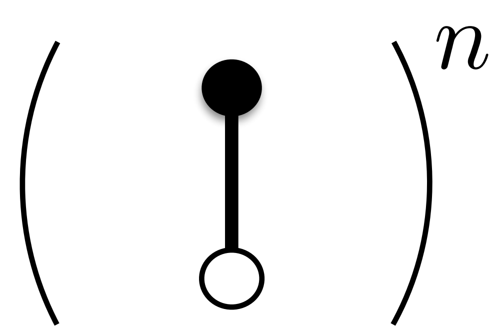
都市-施設間通信コスト　　施設間通信コスト

画像処理への応用



Min. $$\sum_i b_i d_\Gamma(y_i, x_i) + \sum_{ij:\text{隣接}} c_{ij} d_\Gamma(x_i, x_j)$$

s.t. $$(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in$$



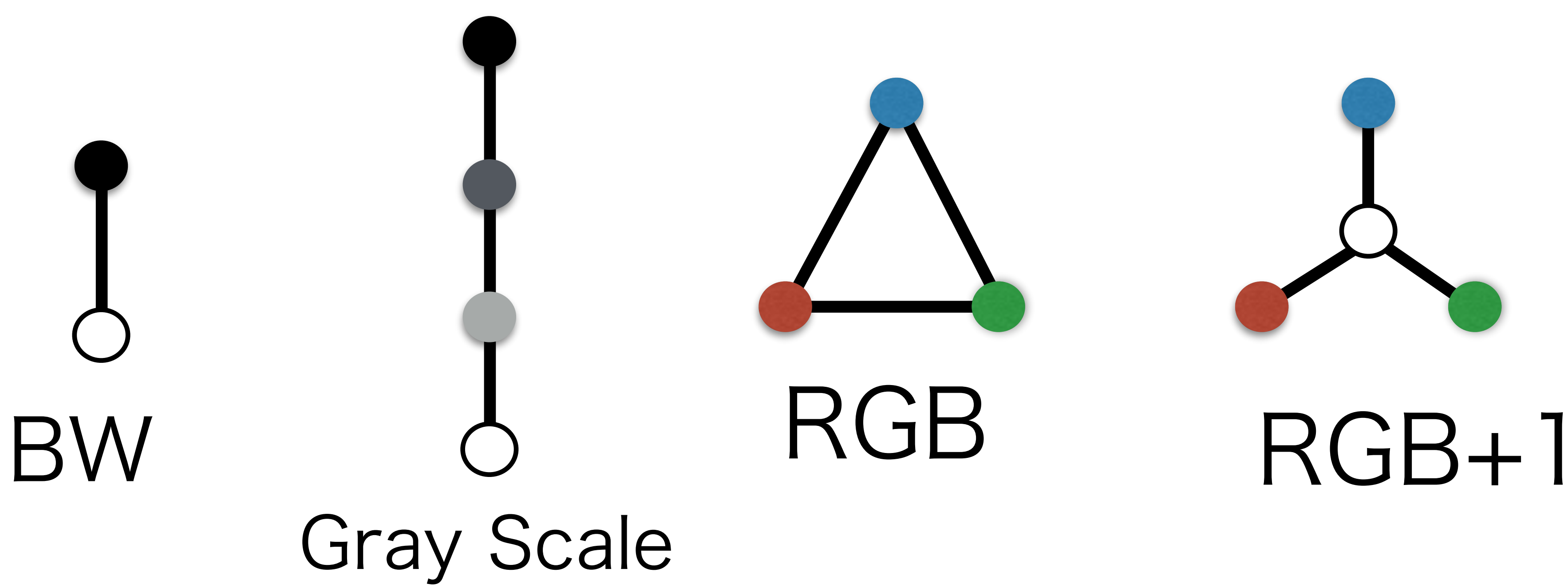
Γ

Multifac[Γ]

Min. $$\sum_{i,v} b_{iv} d_{\Gamma}(p_i, v) + \sum_{i,j} c_{ij} d_{\Gamma}(p_i, p_j)$$

s.t. $$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Gamma^n$$

Γ

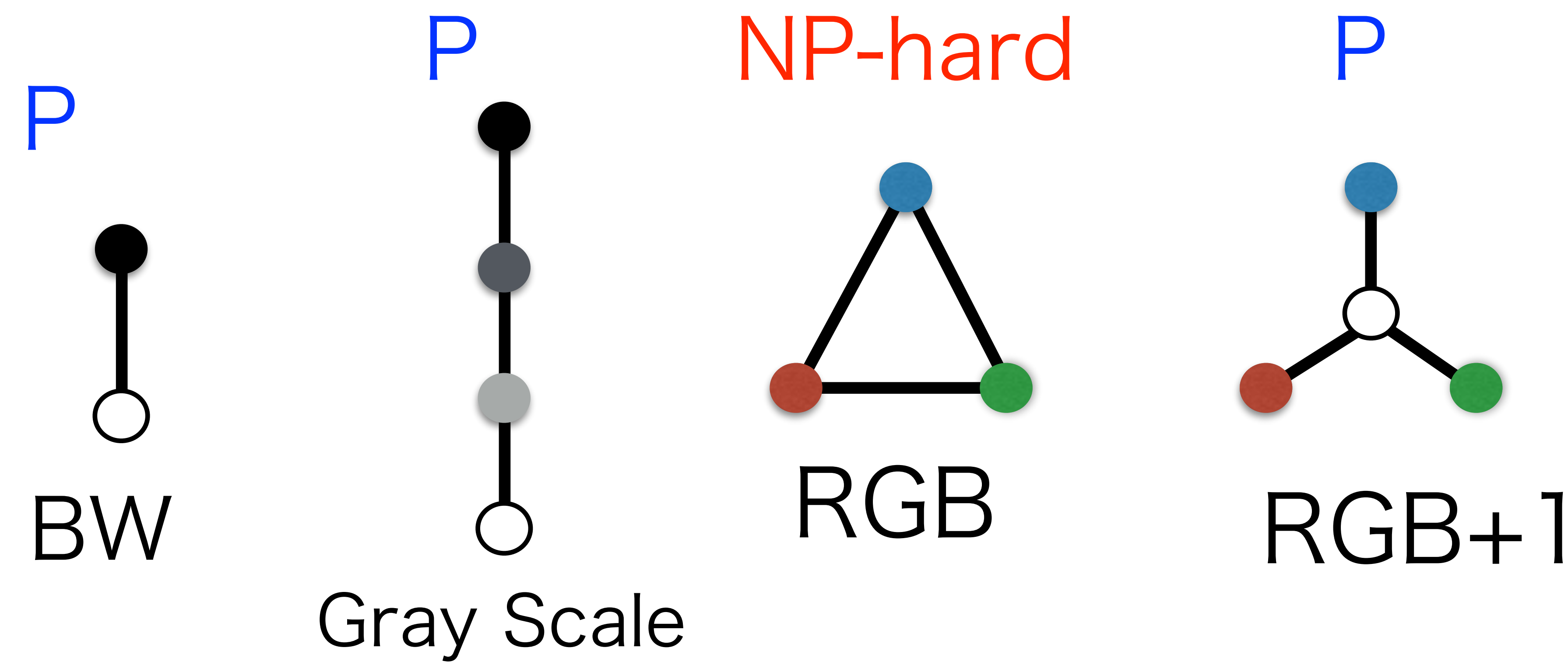


Multifac[Γ]

Min. $$\sum_{i,v} b_{iv} d_\Gamma(p_i, v) + \sum_{i,j} c_{ij} d_\Gamma(p_i, p_j)$$

s.t. $$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Gamma^n$$

Γ

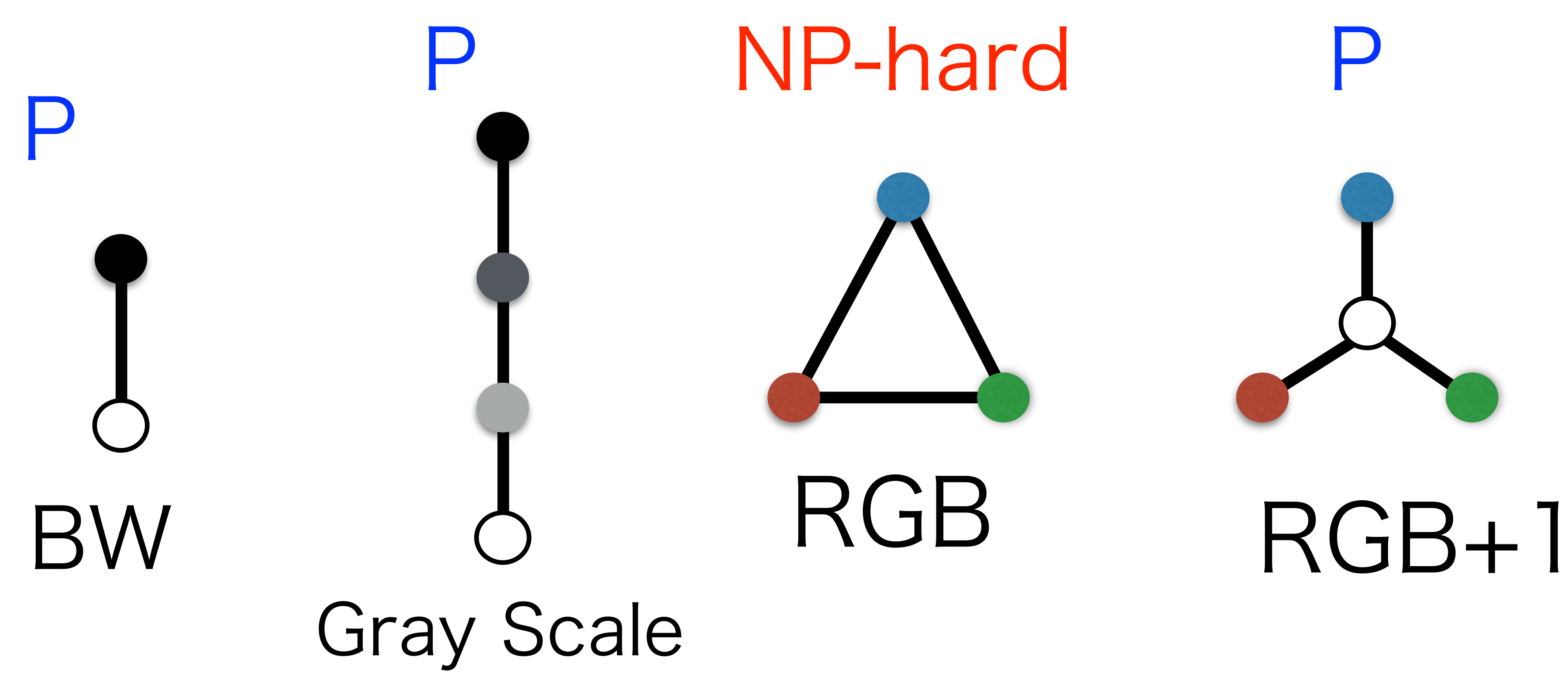


Multifac[Γ]

Min. $$\sum_{i,v} b_{iv} d_\Gamma(p_i, v) + \sum_{i,j} c_{ij} d_\Gamma(p_i, p_j)$$

s.t. $$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \in \Gamma^n$$

Γ



どんなΓならMultifacはPか？ (Karzanov 98)

動機

Max フロー = Min カット

劣モジュラ最適化

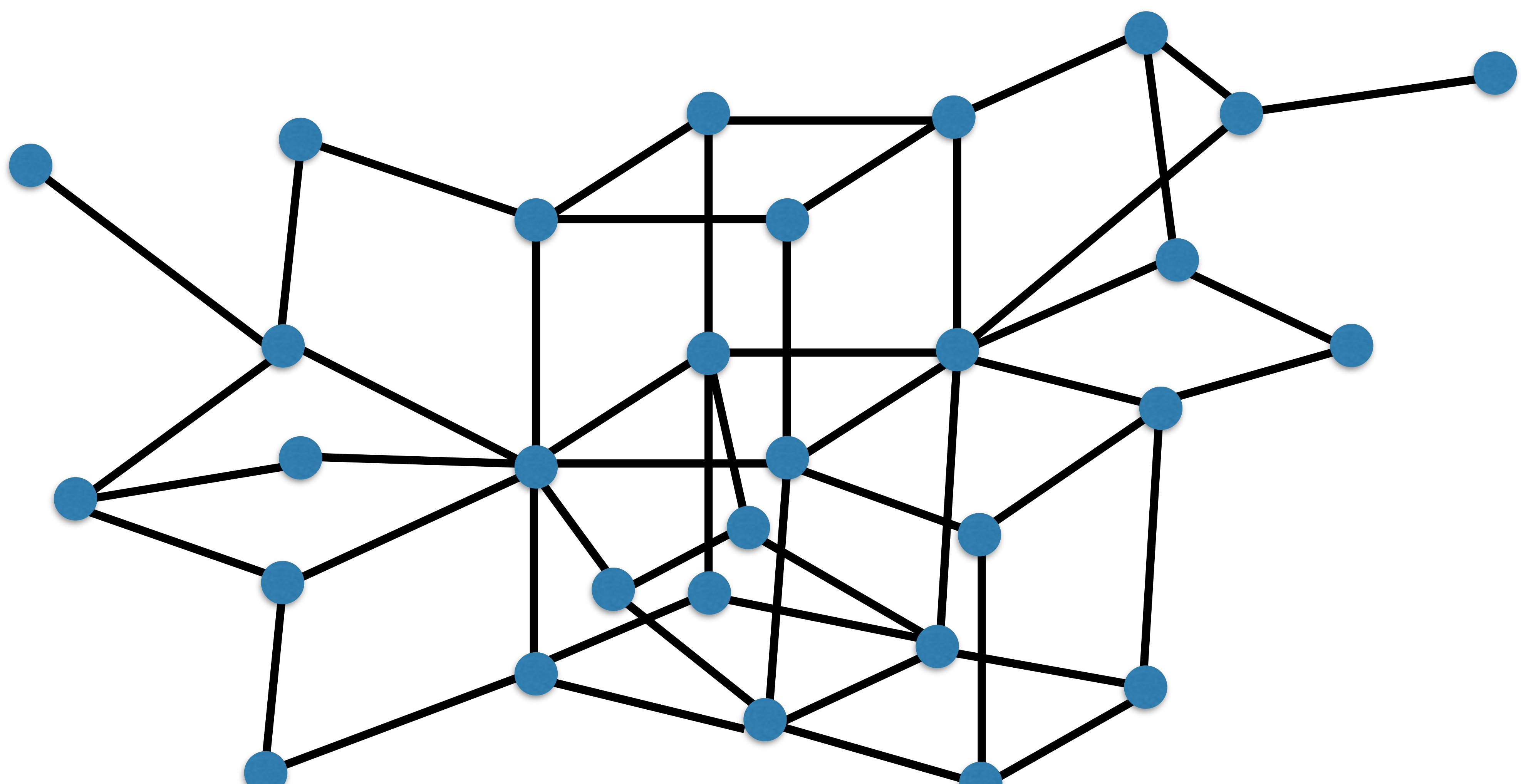
- このアナロジーを，上述の多品種フローの場合にも確立したい.

- Multifaclity型最適化問題に対して，「良いクラス」を特徴付ける「新しい離散凸概念」が欲しい.

グラフクラス + 関数クラス

有向モジュラグラフ上のL凸関数　(H. 2012 ~)

向き付け可能モジュラグラフの例：
パス，木，超立方体，グリッドグラフ，モジュラ束，
メディアングラフ，それらの直積や貼り合わせ，など



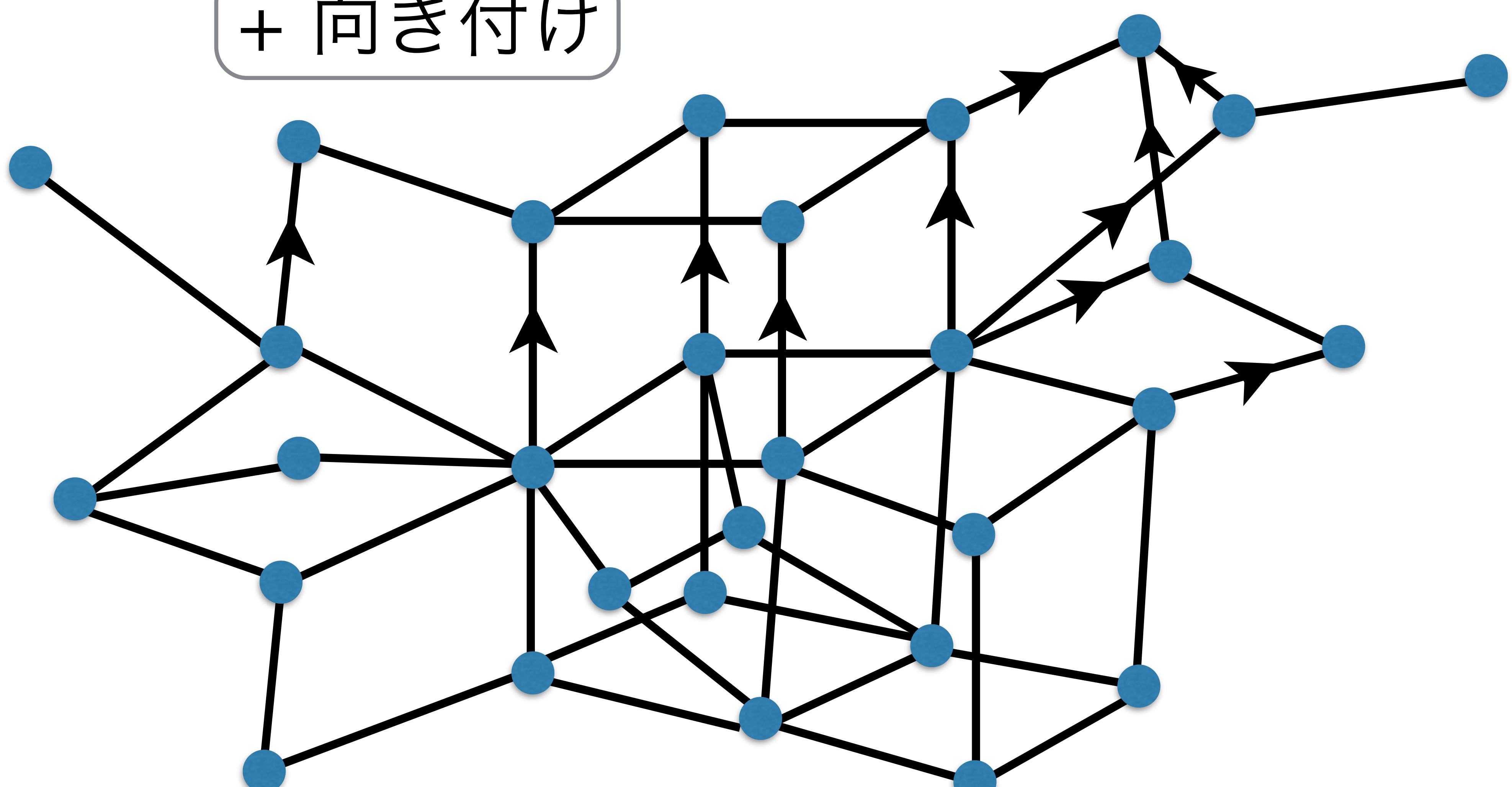
有向モジュラグラフ上のL凸関数　(H. 2012 ~)

向き付け可能モジュラグラフの例：

パス，木，超立方体，グリッドグラフ，モジュラ束，

メディアングラフ，それらの直積や貼り合わせ，など

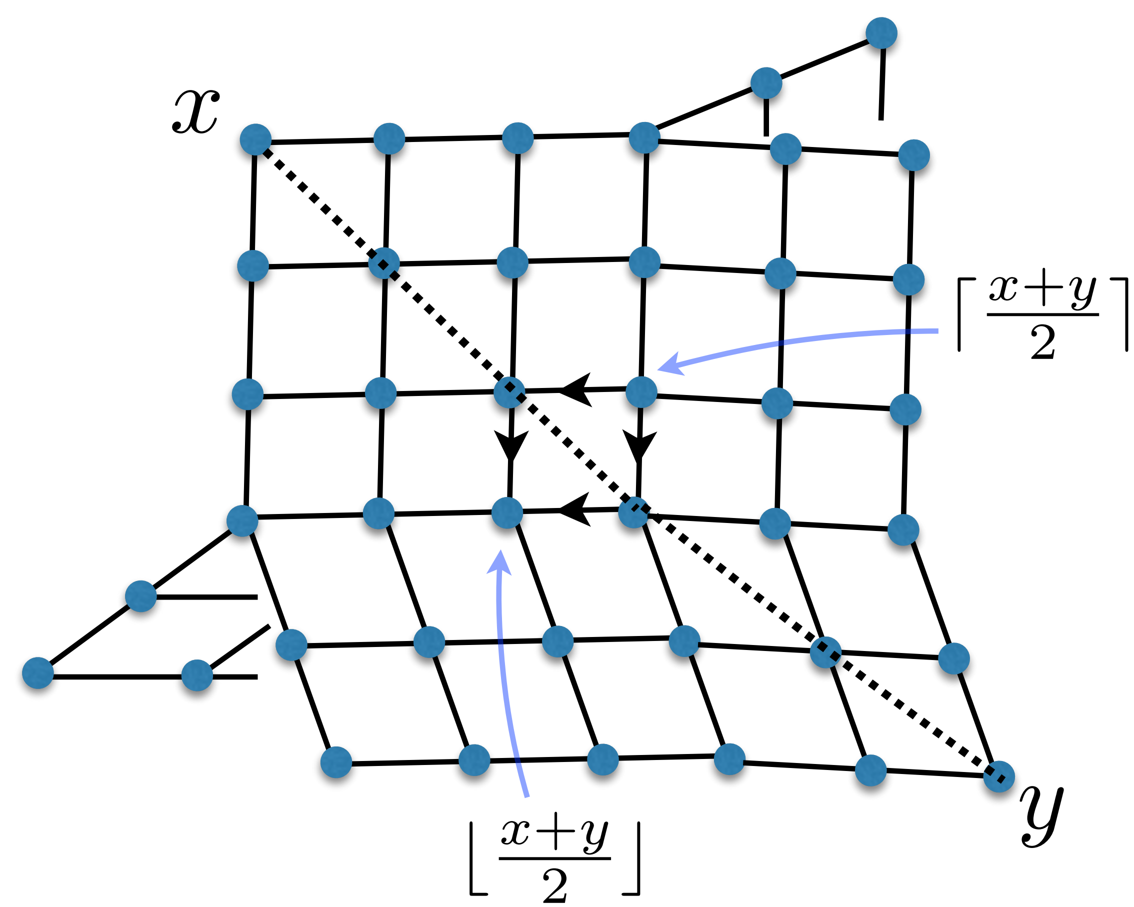
+ 向き付け



有向モジュラグラフ上のL凸関数　(H. 2012 ~)

- L$^\natural$凸関数の種々のアナロジーが成立:

  L-最適性基準，　最急降下法 + ステップ評価,
  局所的にモジュラ(半)束上の劣モジュラ関数,
  近接性, 離散中点凸性 (部分クラスで), ...



主要な結果

Γが向き付け可能なモジュラグラフなら
Multifac[Γ]は(新)L凸最小化

主要な結果

$\mathit{\Gamma}$が向き付け可能なモジュラグラフなら

Multifac[$\mathit{\Gamma}$]は(新)L凸最小化

定理 [H. MPA to appear]

$\mathit{\Gamma}$ が向き付け可能モジュラグラフなら

Multifac[$\mathit{\Gamma}$]は多項式時間で解ける.

主要な結果

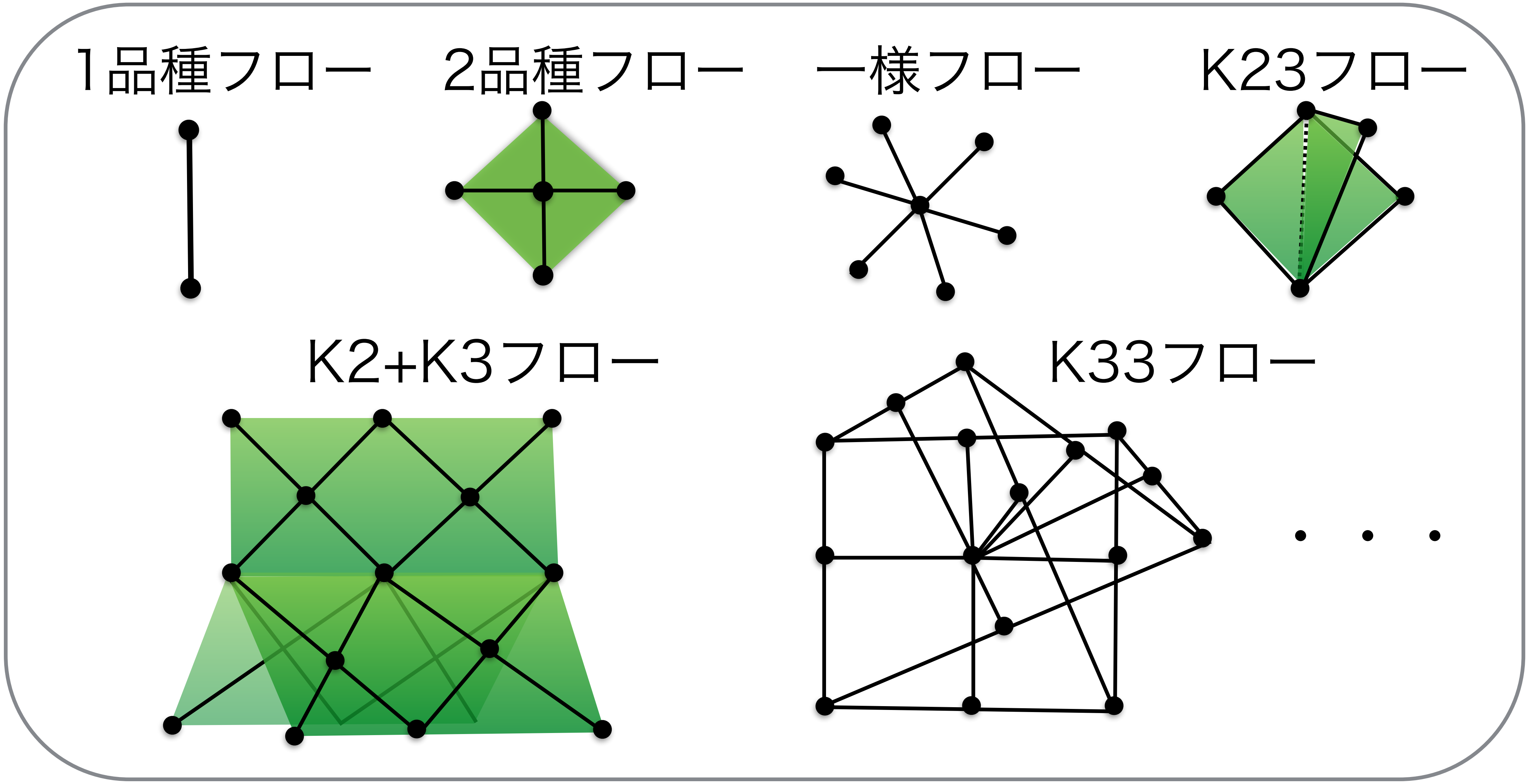
Γが向き付け可能なモジュラグラフなら

Multifac[Γ]は(新)L凸最小化

定理 [H. MPA to appear]
Γが向き付け可能モジュラグラフなら
Multifac[Γ]は多項式時間で解ける.

定理 [Karzanov 98] そうでないならNP困難.

・上述の多品種フローの双対 =
２次元有向モジュラグラフの直積上の(新)L凸最小化



・最小費用一様フローに対する簡明なアルゴリズム(H. 14)

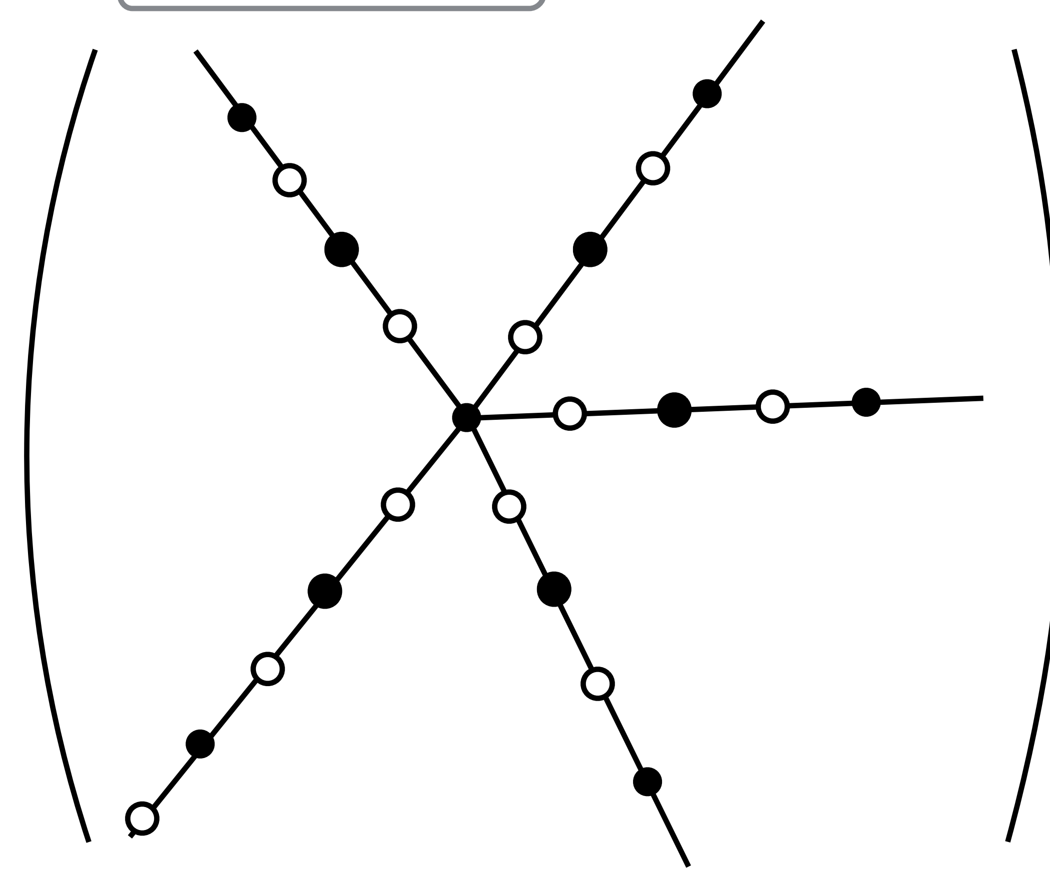
これまで良いアルゴリズムがなかった問題

最小費用一様フローの双対

$= \quad \text{Min.} \quad g(p)$

(新)L凸

s.t. $\quad p \in$



n

・最小費用一様フローに対する簡明なアルゴリズム(H. 14)

これまで良いアルゴリズムがなかった問題

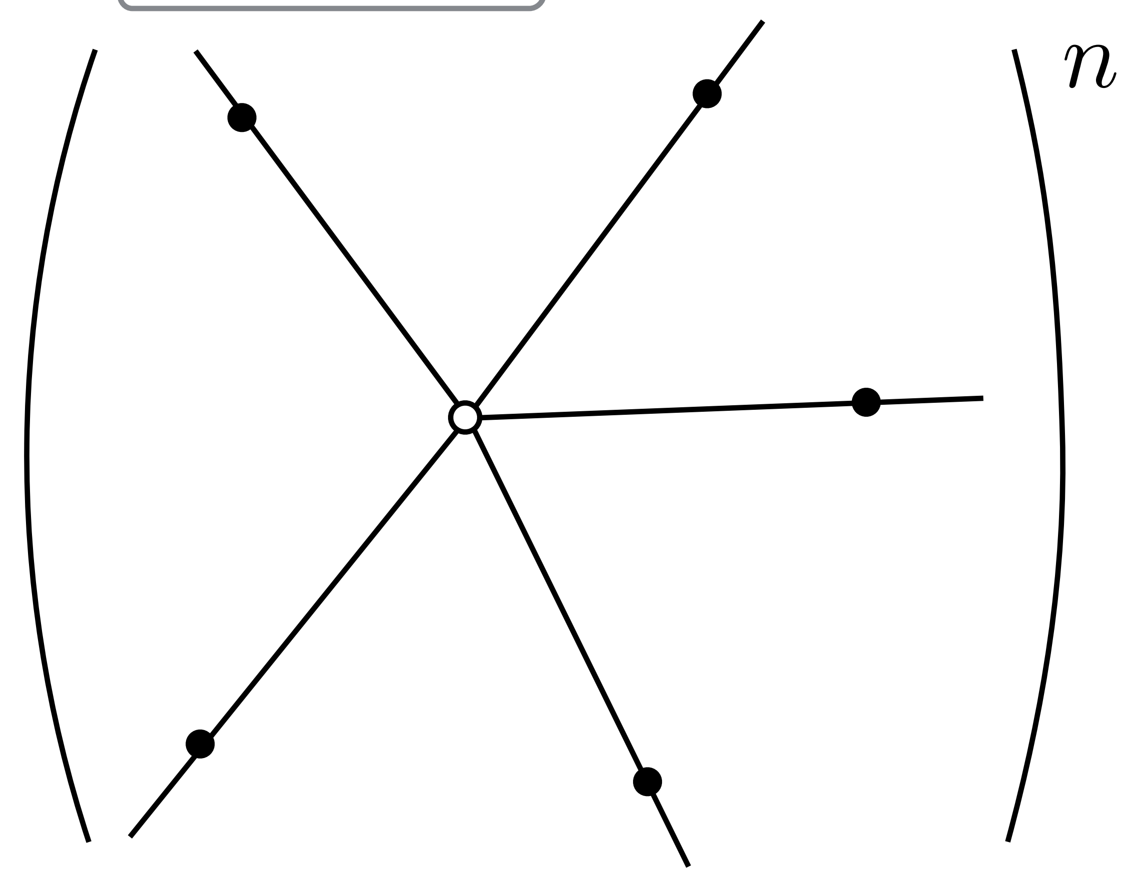
最小費用一様フローの双対

＝　Min.　$g(p)$

(新)L凸

s.t.

$p \in$



近接スケーリング法の適用

・最小費用一様フローに対する簡明なアルゴリズム(H. 14)

これまで良いアルゴリズムがなかった問題

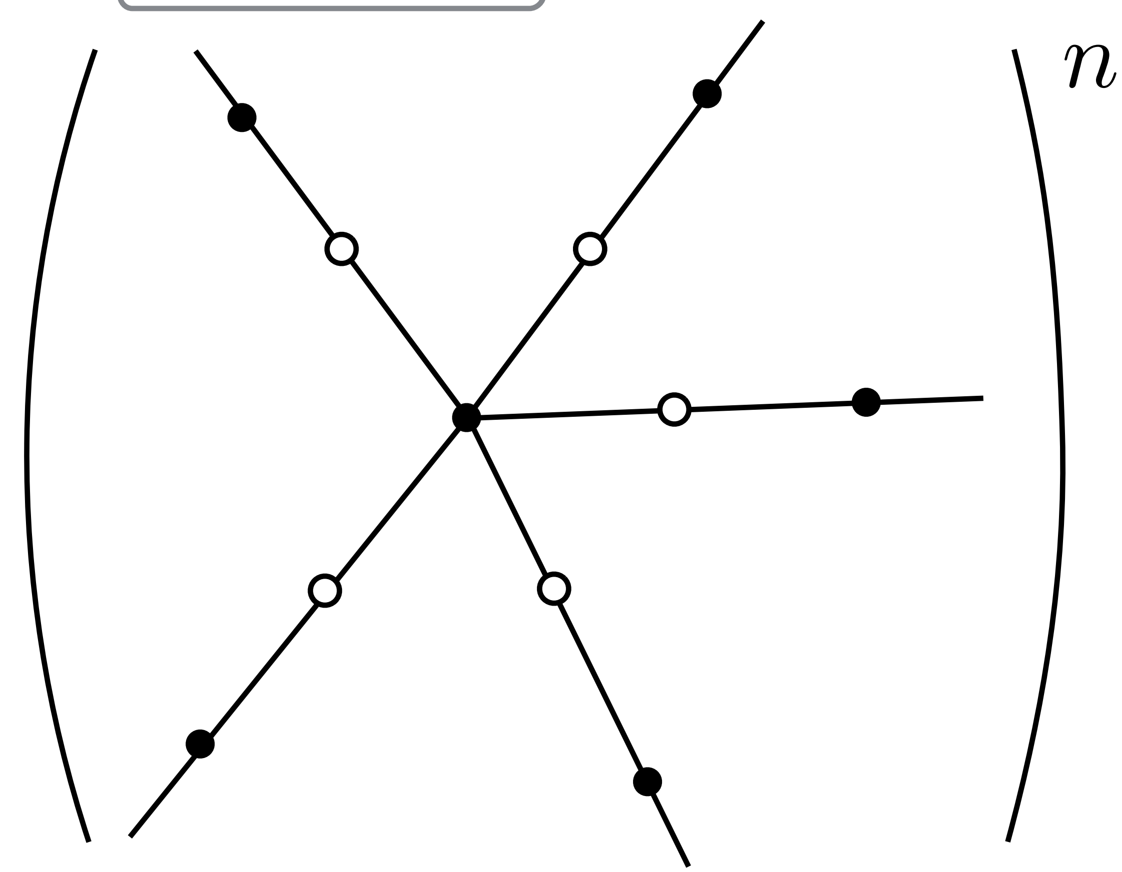
最小費用一様フローの双対

$= \quad \mathrm{Min.} \quad g(p)$

(新)L凸

s.t.

$p \in$



近接スケーリング法の適用

・最小費用一様フローに対する簡明なアルゴリズム(H. 14)

これまで良いアルゴリズムがなかった問題

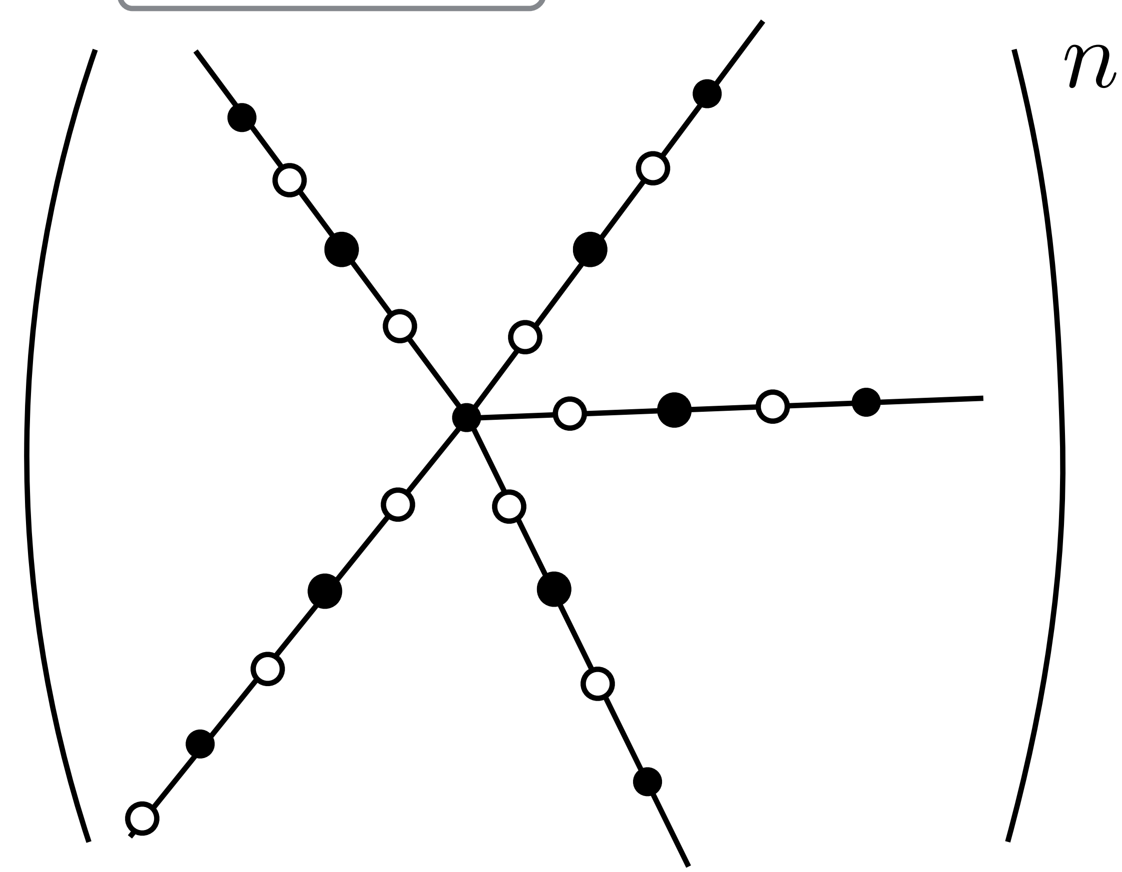
最小費用一様フローの双対

＝　Min.　$g(p)$

(新)L凸

s.t.

$p \in$



近接スケーリング法の適用

O(n log (nAC)MF(kn,km))

まとめ

・グラフ上の離散凸関数という見方・有用性

・まだまだ未完成

・技術的には新しい道具をたくさん使う:

Valued CSP, polymorphism (Thapper-Zivny 12),
メトリックグラフ理論 (Bandelt, Chepoi, Van de Vel,…),
k-劣モジュラ関数(Huber-Kolmogorov 12),
基本k-劣モジュラ関数(Iwata-Wahlstrom-Yoshida 14),….

・新たなつながり:

CAT(0)空間, Euclidean building, …

個人的な展望

負曲率距離空間上の凸最適化理論に向けて

現象：

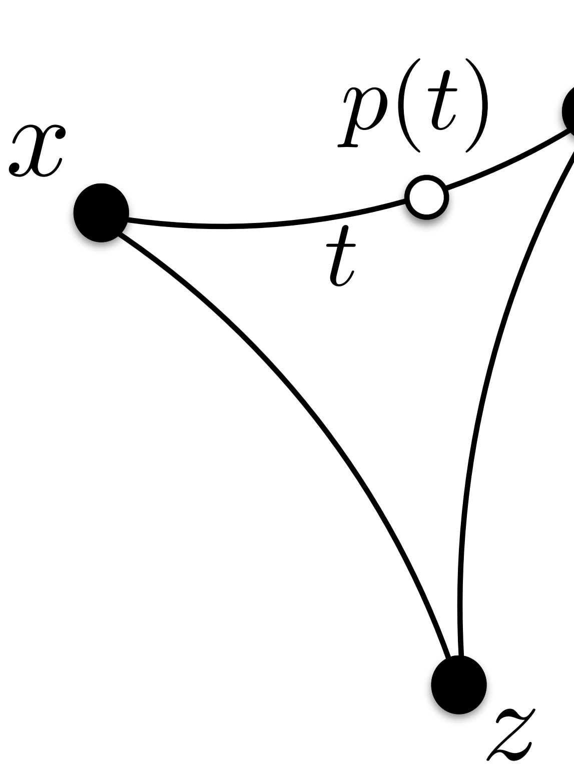
・しばしば有向モジュラグラフ Γ はCAT(0)空間 K に自然に埋め込まれる.

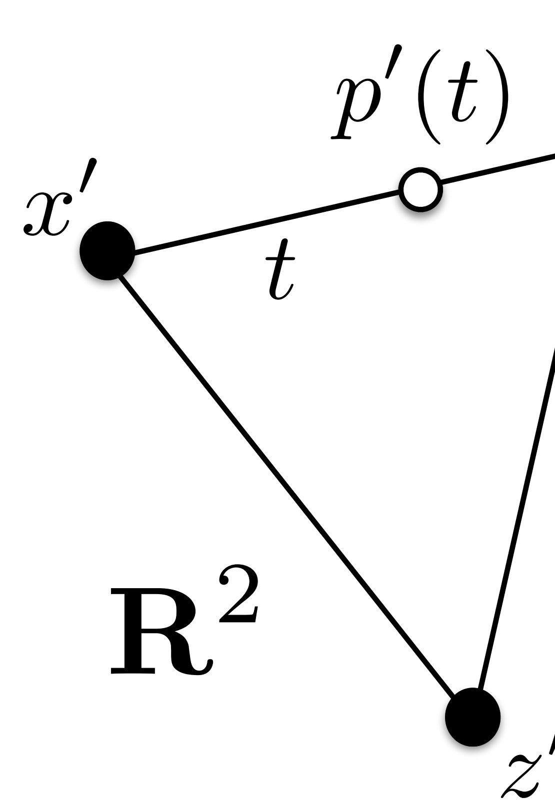
・Γ 上のL凸関数　⇔　K上の凸関数

Lovasz拡張

CAT(0)空間

測地的距離空間であって
任意の測地的三角形が「凹んでいる」もの





$$d(x,y) = \|x' - y'\|_2$$

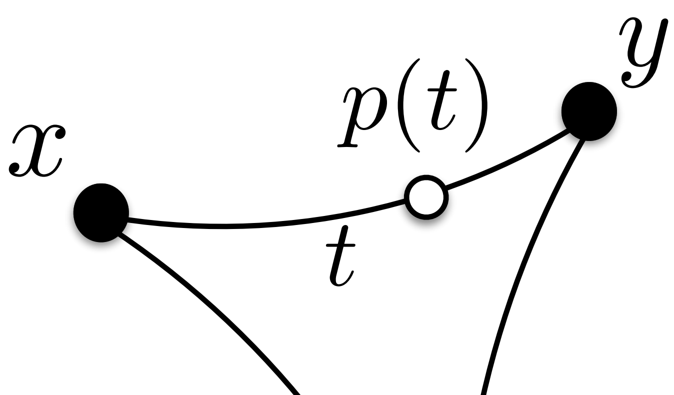
$$d(y,z) = \|y' - z'\|_2$$

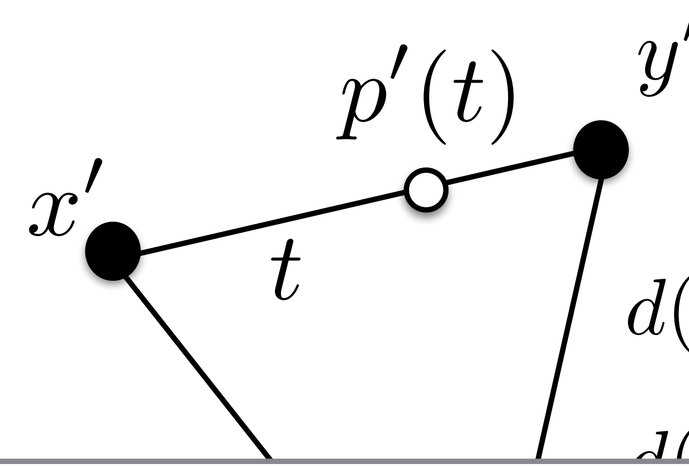
$$d(z,x) = \|z' - x'\|_2$$

$$d(p(t), z) \leq \|p'(t) - z'\|_2$$

CAT(0)空間

測地的距離空間であって
任意の測地的三角形が「凹んでいる」もの





$d(x, y) = \|x' - y'\|_2$

$\|y' - z'\|_2$

$z' - x'\|_2$

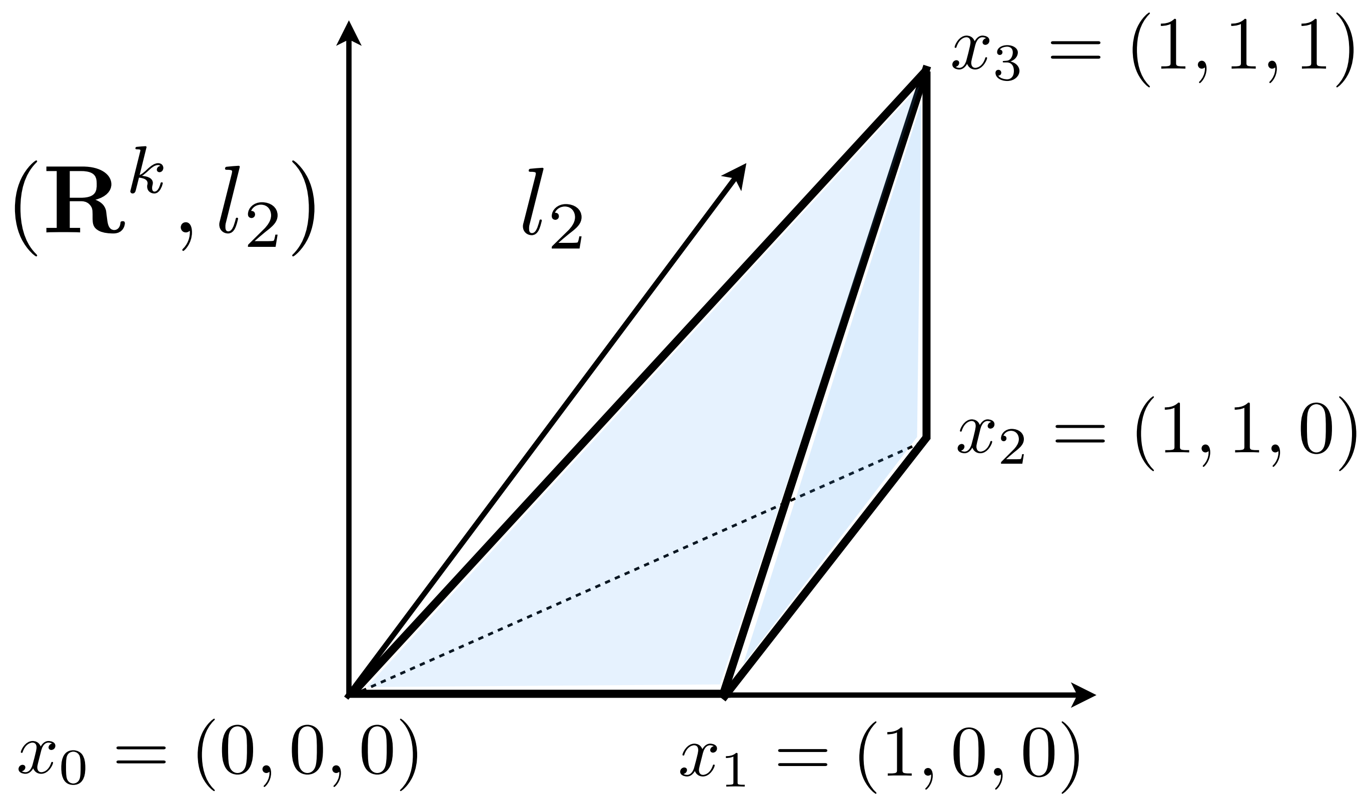
事実：CAT(0)空間は一意測地的

→ 凸集合，凸関数が自然に定義できる

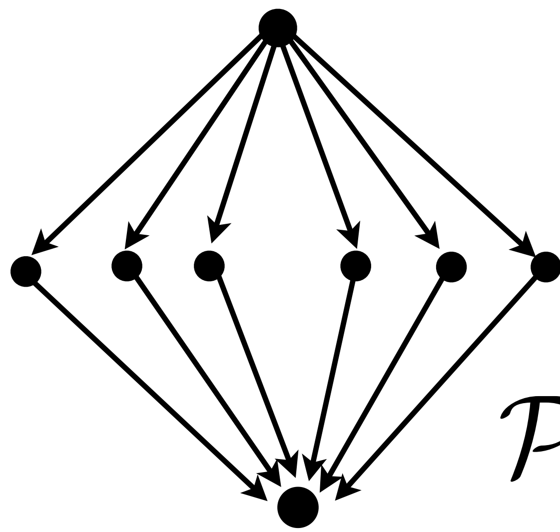
Orthoscheme complex (Brady-McCammond 10)

$\mathcal{P}$: graded poset

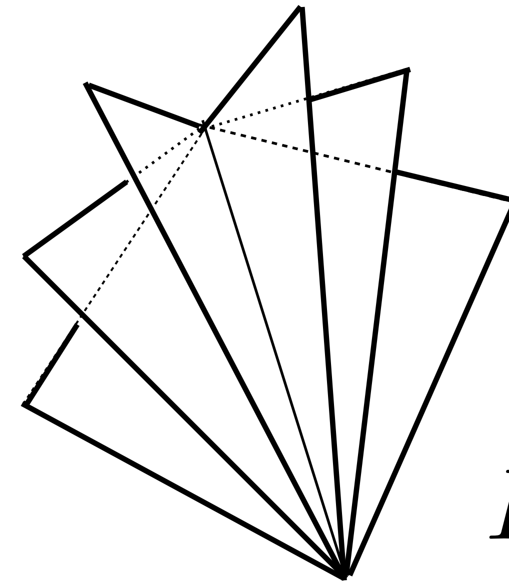
$K(\mathcal{P})$: = complex obtained by filling



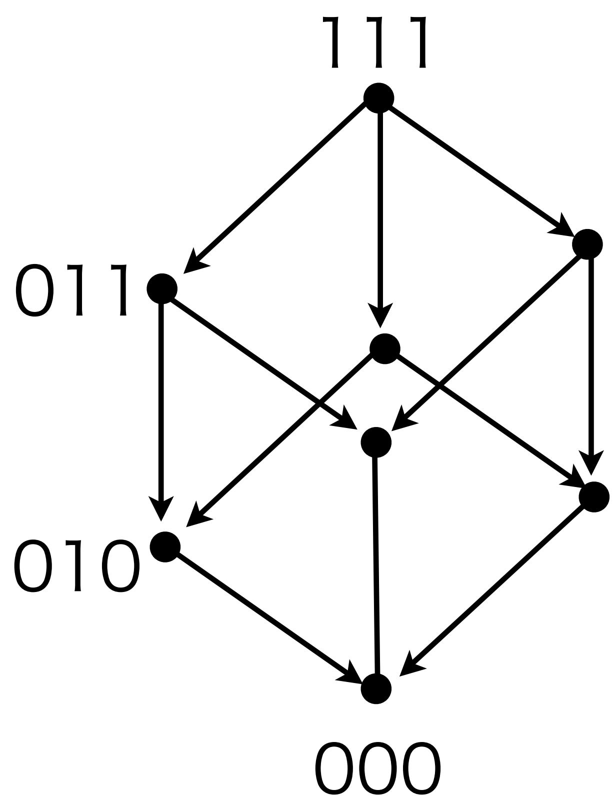
to each maximal chain $x_0 \prec x_1 \prec \cdots \prec x_k$

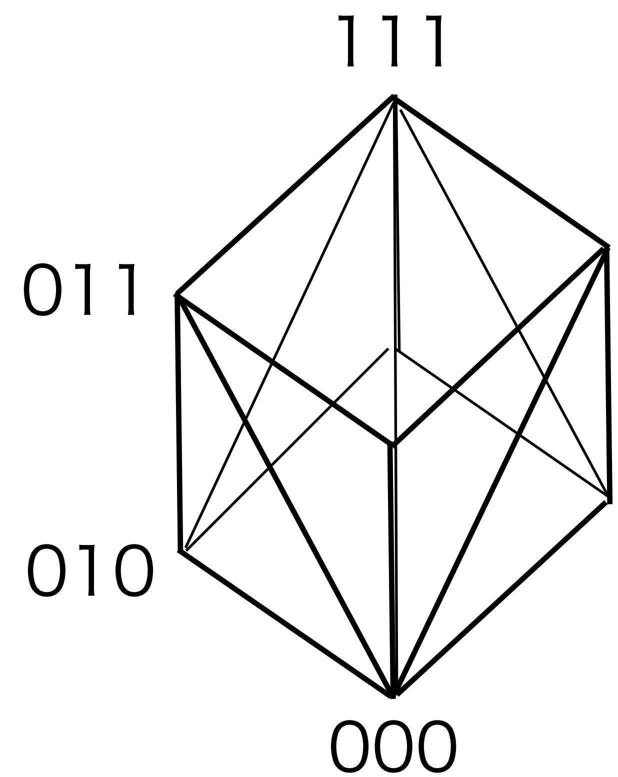


$\mathcal{P}$



$K(\mathcal{P})$





$\mathcal{P}$: ブール束 $\simeq \{0,1\}^n$

$K(\mathcal{P}) \simeq [0,1]^n$

定理 (Chalopin, Chepoi, H, Osajda 14)

PがモジュラーラならK(P)はCAT(0)

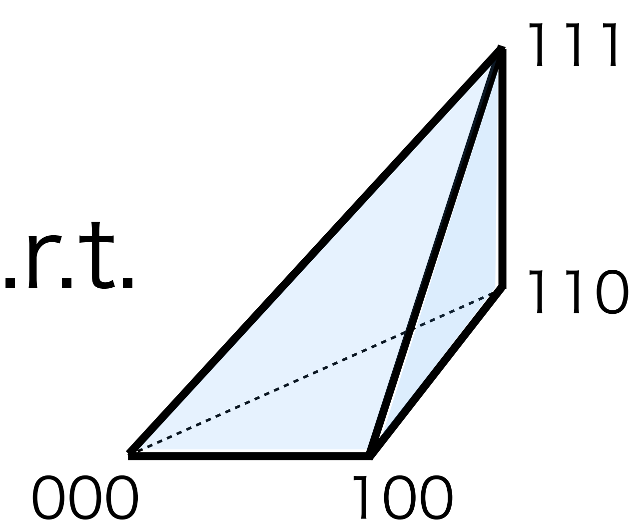
Brady-McCammondの予想

定理 (Chalopin, Chepoi, H, Osajda 14)

Pがモジュラ束ならK(P)はCAT(0)

$$f : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$$

線形補間 w.r.t.



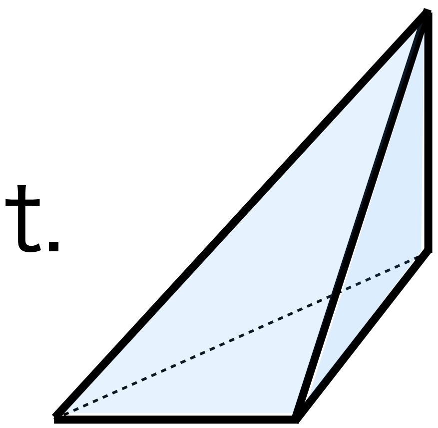
Lovasz拡張 $\bar{f} : K(\mathcal{P}) \to \mathbf{R}$

定理 (Chalopin, Chepoi, H, Osajda 14)

PがモジュランならK(P)はCAT(0)

$$f : \mathcal{P} \to \mathbf{R}$$

線形補間 w.r.t.



Lovasz拡張 $\bar{f} : K(\mathcal{P}) \to \mathbf{R}$

定理 (H. 15)

f が劣モジュラ $\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ が凸関数

$f(p) + f(q) \geq f(p \wedge q) + f(p \vee q)$

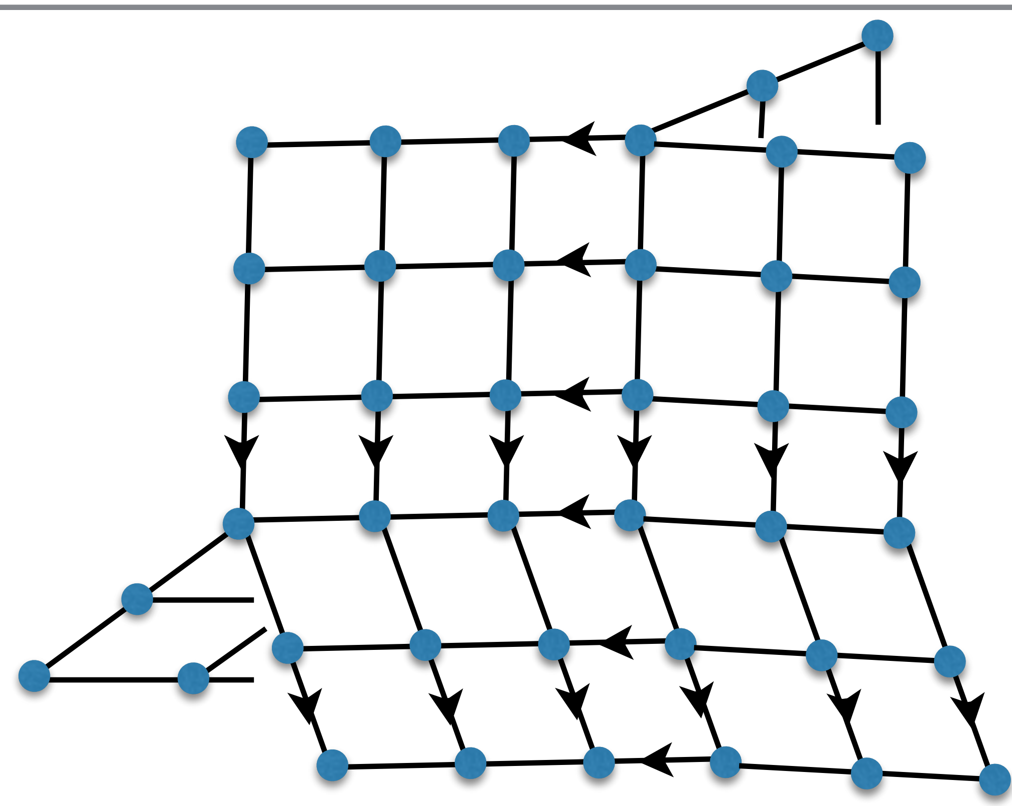
Lovasz 83: $\mathcal{P} = \{0,1\}^n$ の場合

・有向モジュラグラフΓに対しても同様に
orthoscheme complex K(Γ)が定義できる.

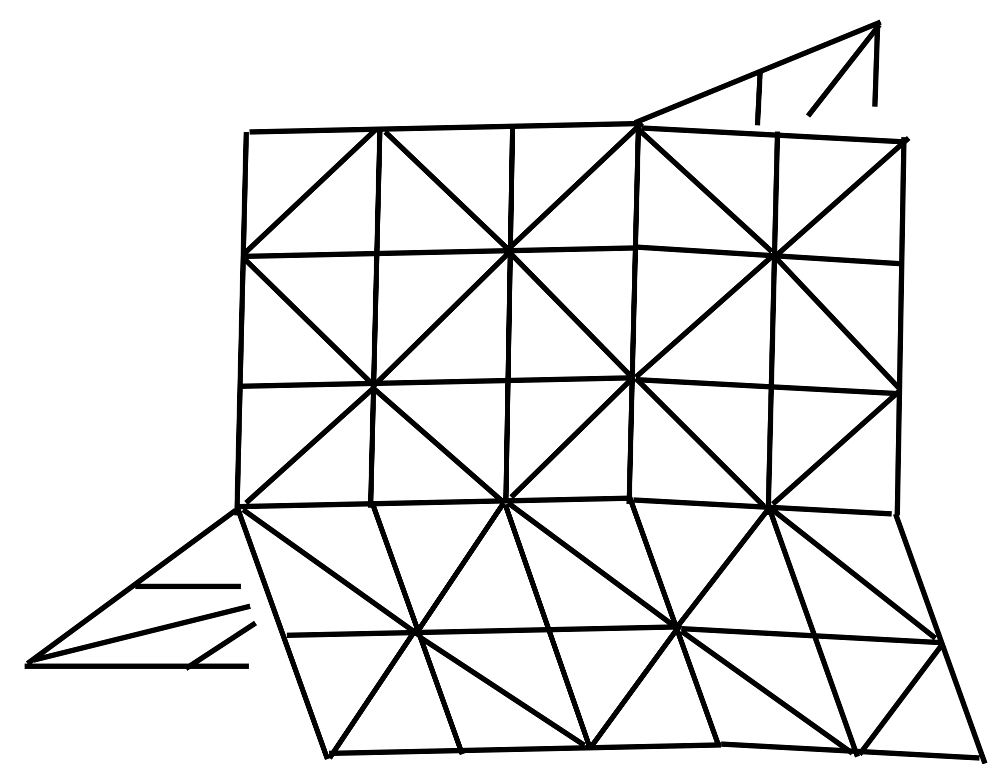
・K(Γ)はCAT(0)となることが多い(予想:なる).

・自然なクラスで「L凸 ⇔ Lovasz拡張が凸」が成立.

木の直積，Euclidean building



Γ



K(Γ)

・CAT(0)空間上の(離散)凸最適化理論を展開すると
おもしろいかも.

関連研究：系統樹空間の測地線 (M. Owen,…),
M. Bacak: ”Convex analysis and optimization
in Hadamard spaces ”