離散凸解析
$beyond\ \mathbb{Z}^n$

平井広志
東京大学 情報理工学系研究科 数理情報学専攻
JST, さきがけ
hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

ワークショップ「離散凸解析と最適化」
京都大学数理解析研究所
2019年11月2日

離散凸解析 (Murota 1990年代～)

Fujishige, Shioura, Tamura,...

～ $\mathbb{Z}^n$上の凸関数の理論

効率良く解ける離散最適化問題に対する枠組み

ネットワークフロー，マトロイド・劣モジュラ最適化etc

- M凸関数 (≒ $\mathrm{M}^\natural$凸関数)
  - ➢(付値)マトロイドの交換公理
  - ➢数理経済学/ゲーム理論

ルジャンドル共役

- L凸関数 (≒ $\mathrm{L}^\natural$凸関数)
  - ➢マトロイドランク関数/劣モジュラ関数
  - ➢電気回路のポテンシャル

離散凸解析 *beyond* $\mathbb{Z}^n$ (H. 2012 ～)

$\mathbb{Z}^n$(≈グリッドグラフ)のようなグラフ上で
離散凸解析のアナロジーを展開

H. 2007～
ルーツ：マルチフローの双対理論，ゼロ拡張問題

ターゲット：マルチフロー・ネットワークデザイン
モジュラ束上の劣モジュラ最適化

関連：Valued CSP，CAT(0)空間上の凸最適化,
束っぽいグラフの理論,
ユークリッド的ビルディング,...

本発表：離散凸beyondの世界を紹介する

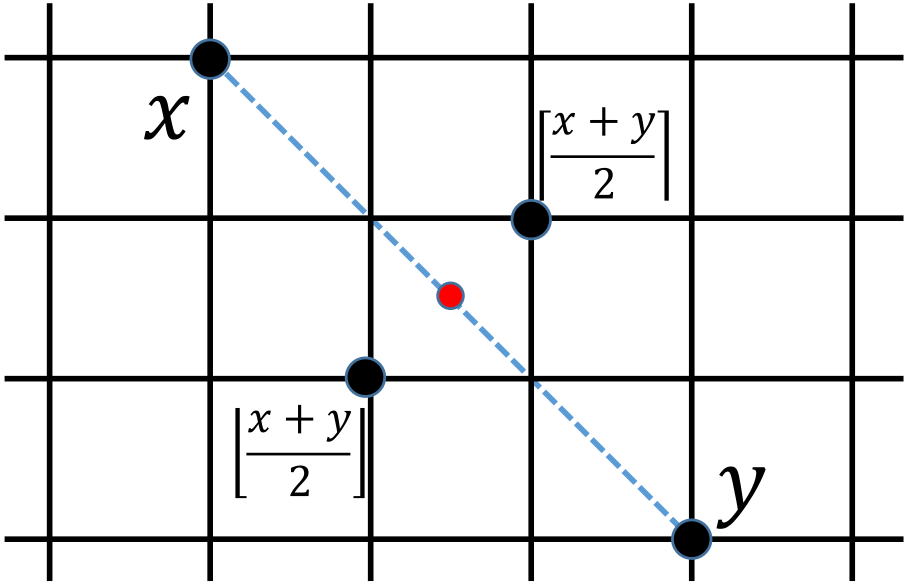
L♮凸関数 (Favati-Tardella 90, Murota 98, Fujishige-Murota 00)

～劣モジュラ関数の「凸な」貼り合わせ

Def. $g: \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$: L♮凸

離散中点凸性

$$\Leftrightarrow \quad g(x) + g(y) \geq g\left(\left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor\right) \quad (x, y \in \mathbb{Z}^n)$$

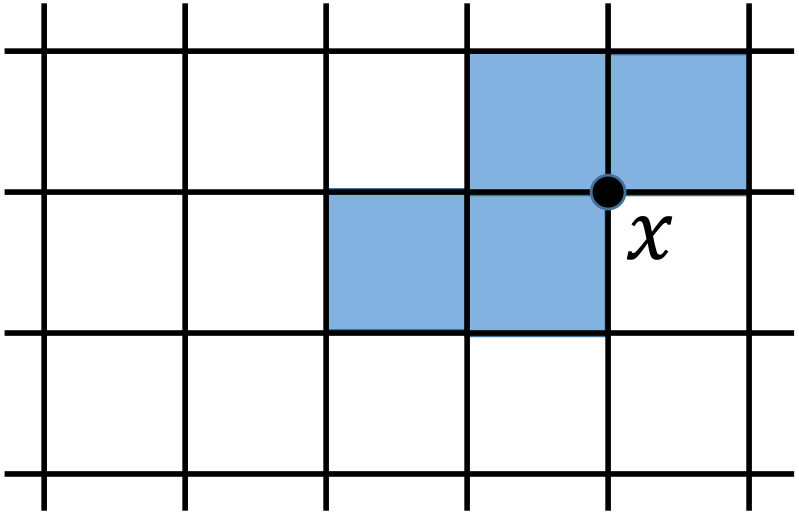


Rem. $\{0,1\}^n \ni u \mapsto g(x+u)$は劣モジュラ

$$\text{i.e.}, g(x+u) + g(x+v) \geq g(x + \min(u,v)) + g(x + \max(u,v))$$

最急降下法(SDA)による$\mathrm{L}^\natural$凸最小化の枠組み

- 局所最適＝大域最適 → 最急降下法



$x + \{0,1\}^n$

$x - \{0,1\}^n$

- 局所最適性 → 劣モジュラ関数最小化

Lovasz-Grotchel-Schrijver 1981, Schrijver 2000, Iwata-Fleischer-Fujishige 2001,...

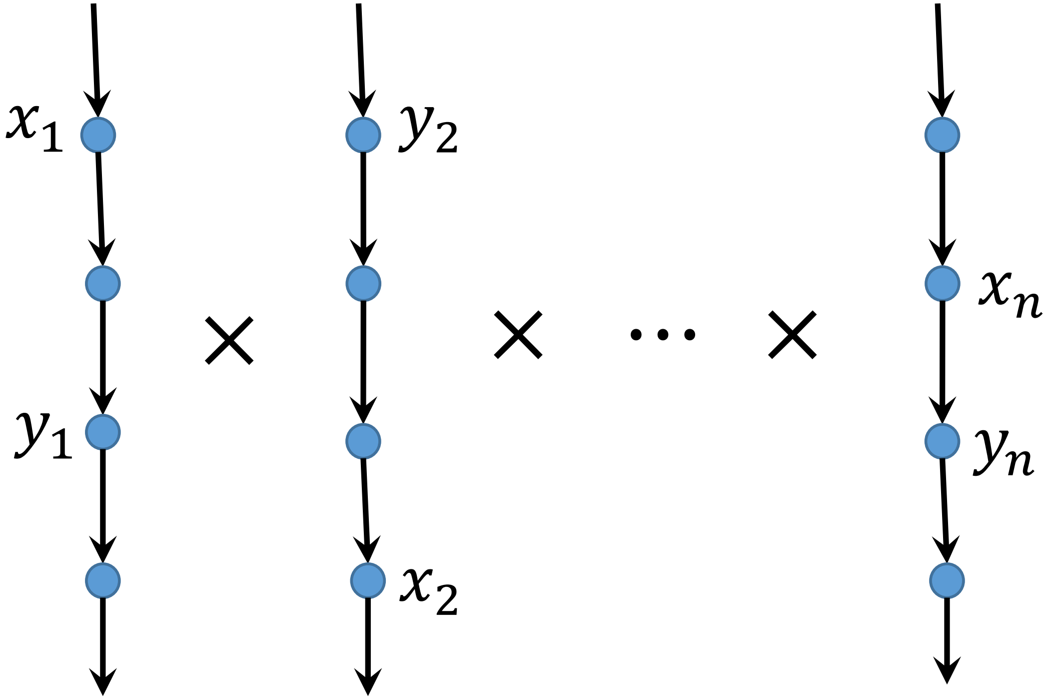
- 反復回数 ≈ 初期点 x と optとのl_∞-距離

Kolmogorov-Shioura 2009, Murota-Shioura 2014

- 領域スケーリング

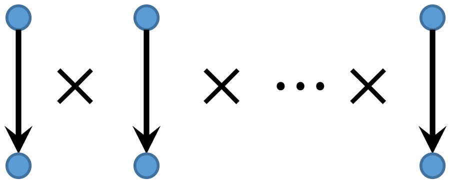
$\mathrm{L}^\natural$凸関数 + SDA はグラフ的に定式化できる

$\mathbb{Z}^n \approx$



$$g(x) + g(y) \geq g\left(\left\lceil \frac{x+y}{2} \right\rceil\right) + g\left(\left\lfloor \frac{x+y}{2} \right\rfloor\right)$$

局所化　$f:$



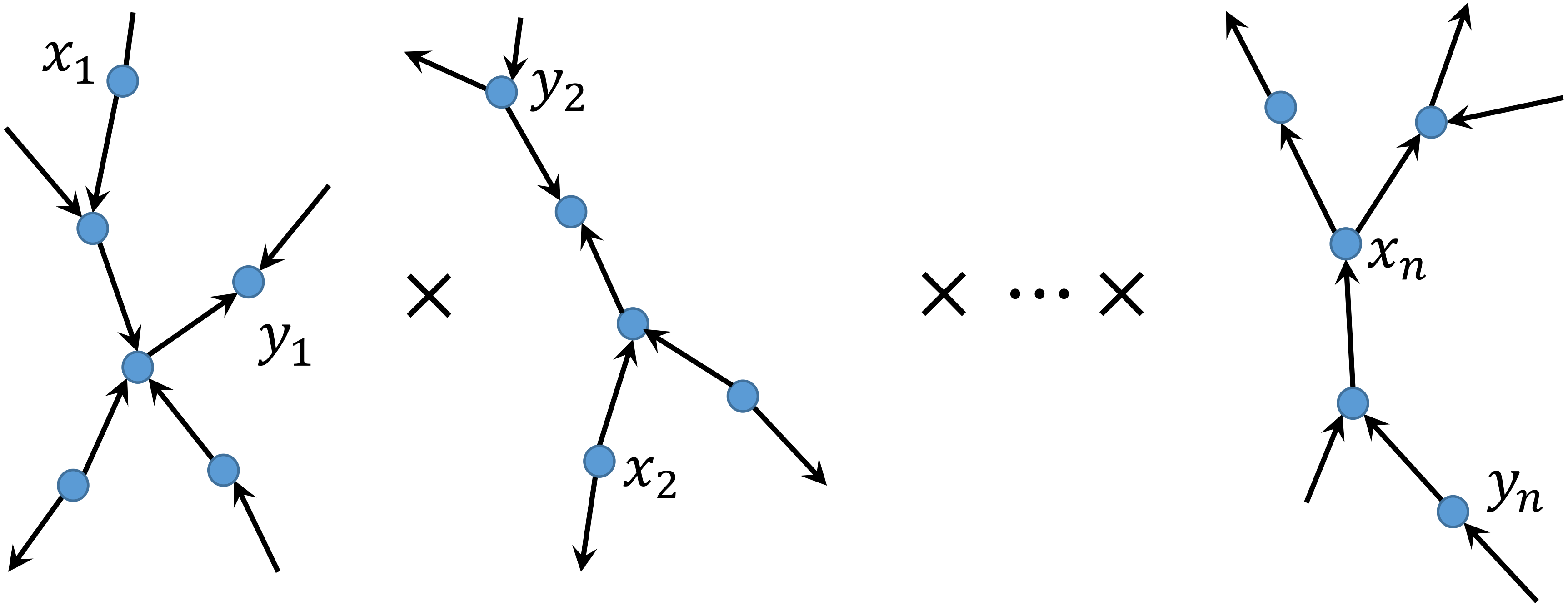
$\to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

劣モジュラ

$\approx \{0,1\}^n$

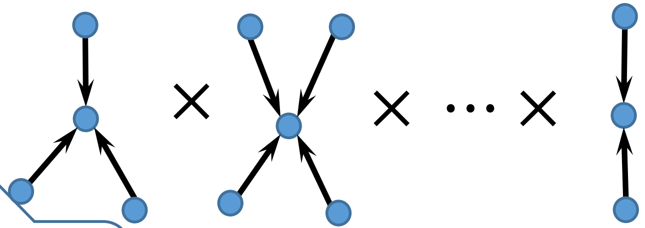
L凸関数 + SDA は「向き付けられた木の直積」上に定式化可能

c.f. Kolmogorov 11



$$g(x)+g(y)\ \geq g\left(\left\lceil\frac{x+y}{2}\right\rceil\right)+g\left(\left\lfloor\frac{x+y}{2}\right\rfloor\right)$$

局所化　f:



$\to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$

k-劣モジュラ

Huber-Kolmogorov 12

人工的なモデルに見えるが…

最小コストマルチフロー

Karzanov 79: 半整数性 + 擬多項式時間アルゴリズム

Karzanov 94: 強多項式時間アルゴリズム(楕円体法使用)

Goldberg-Karzanov 97: 組合せ的弱多項式時間アルゴリズム O(?)

$$G = \overset{\text{無向}}{(V, E, T, c, a)}$$

Max. $\|f\|_1 - \sum_{e \in E} a_e f_e$

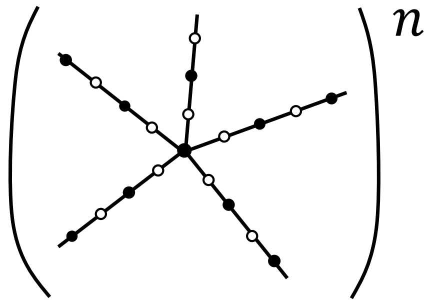
s.t. $f\colon \{\, T\text{-paths} \,\} \to \mathbb{R}_+,\ f_e \leq c_e\ (e \in E)$

LP-双対 + 半整数性 + uncrossing

= Min. $g(x)$

L凸

s.t. $x \in$



H. 15: SDA + スケーリング → $\mathrm{O}(n \log nAC\ \mathrm{MF}(kn, km))$-time algo.

点容量型最大マルチフロー

Garg-Vazirani-Yannakakis 94: ノードマルチウェイカットの弱双対

Pap 08, 09: 半整数性 + 強多項式時間アルゴリズム (楕円体法使用)

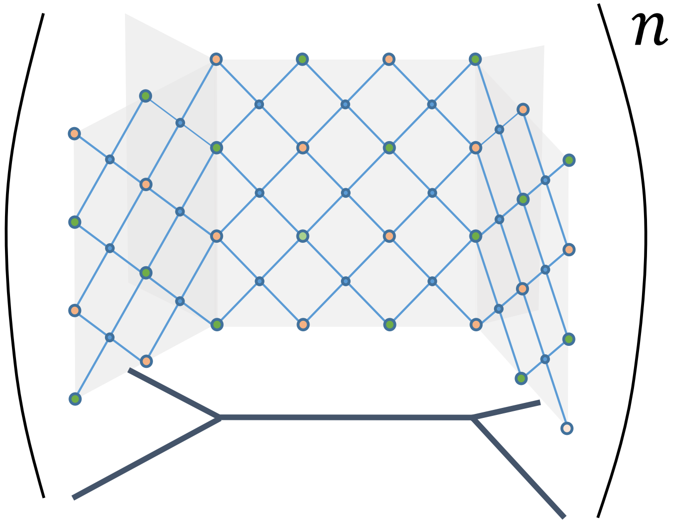
Babenko-Karzanov 08: 組合せ的弱多項式時間アルゴリズム

Max. $\|f\|_1$ s.t. $f: \{\, T\text{-paths} \,\} \to \mathbb{R}_+,\ f_v \leq c_v \ (v \in V)$

LP双対 + 半整数性 + 摂動

$\approx$ Min. $g(x)$

s.t. $x \in$



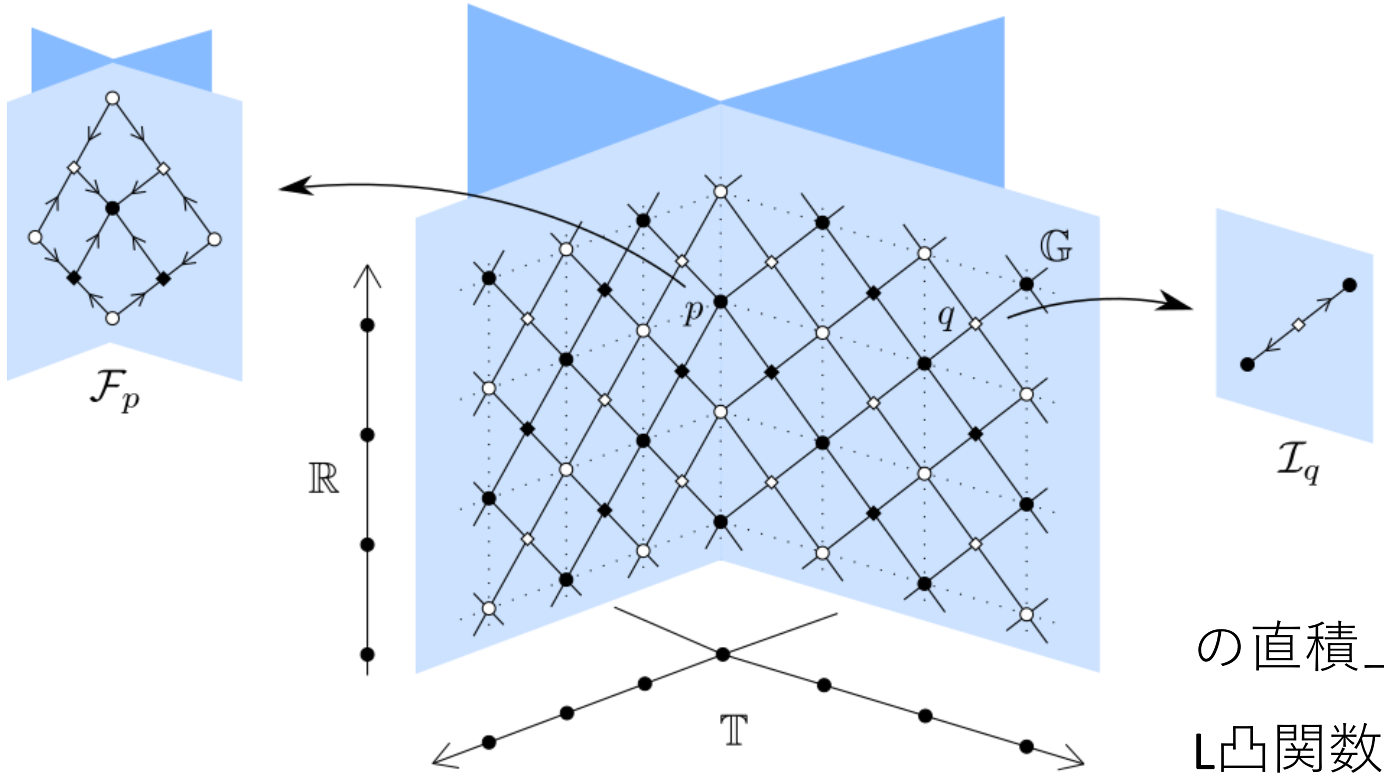
L凸

H. 18: SDA → $O(n \log k \ \mathrm{SF}(n, m, 1))$-time algo.

劣モジュラフロー

点容量型最小コストマルチフロー

Babenko-Karzanov 12: 半整数性 + 強多項式時間アルゴリズム (楕円体法使用)



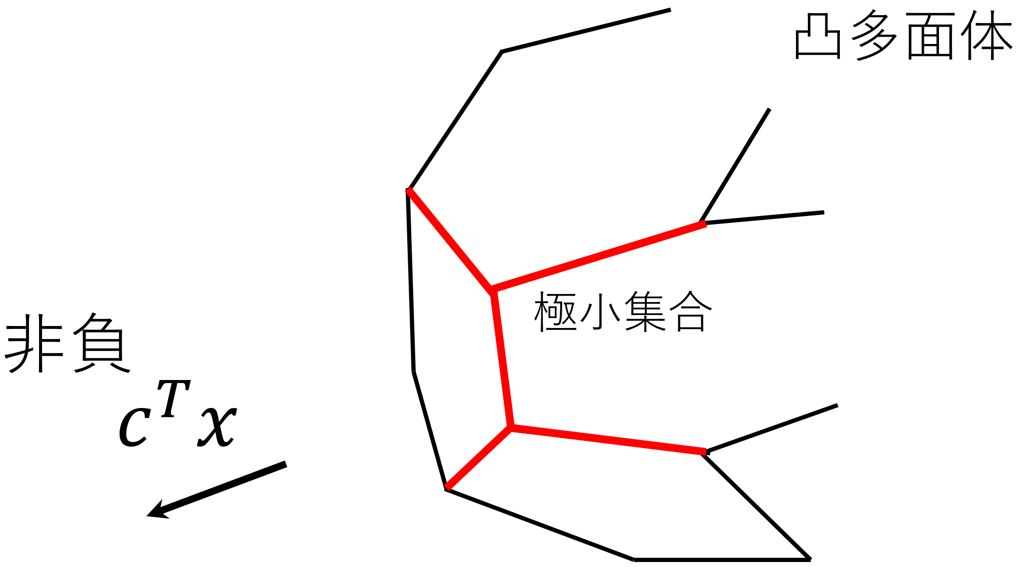
の直積上の

L凸関数最小化

H-Ikeda 19: SDA+スケーリング

→ $O(m\log nAC\ \mathrm{SF}(nk, m, k))$-time algo.

なぜ，LPの双対なのにこんな問題になるのか？



- 非負線形目的関数のもとでは，最適解は極小集合のなかにある．
- 多面体の極小集合は，（非凸な）面白い図形になる（タイトスパンの教訓）

有向/向き付け可能モジュラグラフ(Karzanov 98)

$\supseteq$ マルチフローLP双対の極小集合の離散化として現れる構造

有向モジュラグラフのルーツ

最小ゼロ拡張問題（多重施設配置問題）

Γ: 無向グラフ, グラフ距離 d

Min. $\sum_{v\in\Gamma}\sum_i b_{vi}d(v,x_i)+\sum_{i<j}c_{ij}d(x_i,x_j)$

s.t. $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Gamma^n$

- $\Gamma=K_2$ ⇔ 最小カット問題 → P
- $\Gamma=K_m$ ⇔ マルチウェイカット問題 → NP 困難
- $\Gamma=$フレーム ⇔ マルチフローLP双対になる → P (Karzanov 1998)
- $\Gamma=$ メディアングラフ → P (Chepoi 1996)

特殊な
向き付け可能
モジュラグラフ

2分定理

[H. 2016] Γ = 向き付け可能モジュラグラフ

⇒ ゼロ拡張問題 $\in \mathrm{P}$

[Karzanov 1998] そうでなければ NP困難

有向モジュラグラフ上のL凸関数

&

その局所化：モジュラ半束上の劣モジュラ関数

- $x \mapsto \sum_{v,i} b_{vi} d(v, x_i) + \sum_{i,j} c_{ij} d(x_i, x_j)$ が$\vec{\Gamma}\times\vec{\Gamma}\times\cdots\times\vec{\Gamma}$上のL凸
- SDA: 局所問題

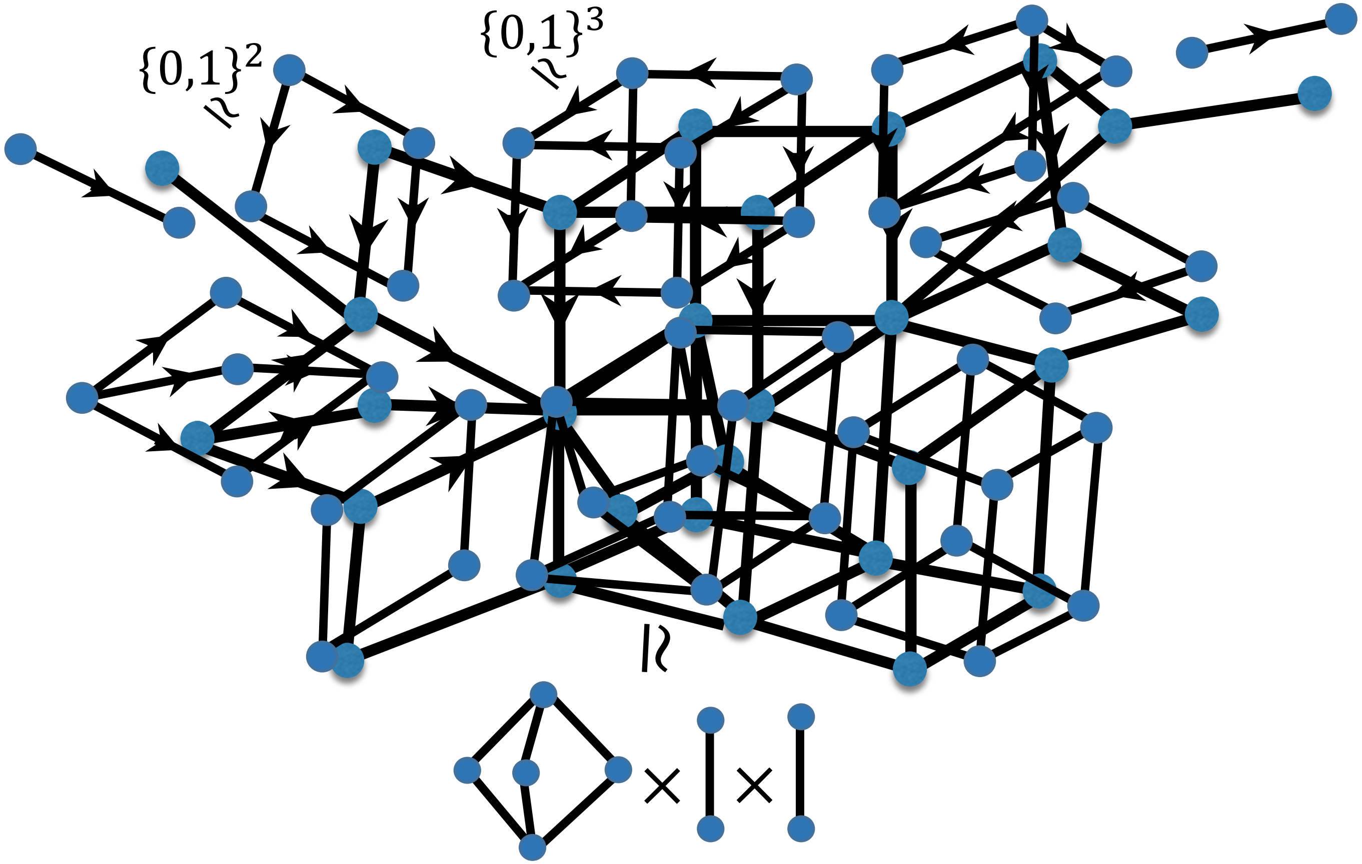
＝SFM onモジュラ半束 (← tractable in VCSP model)

Kolmogorov-Thapper-Živný 2015

有向モジュラグラフとはどういうものか？

～相補モジュラ束の「非正曲率な」貼り合わせ

≈ベクトル部分空間のなす束の直積

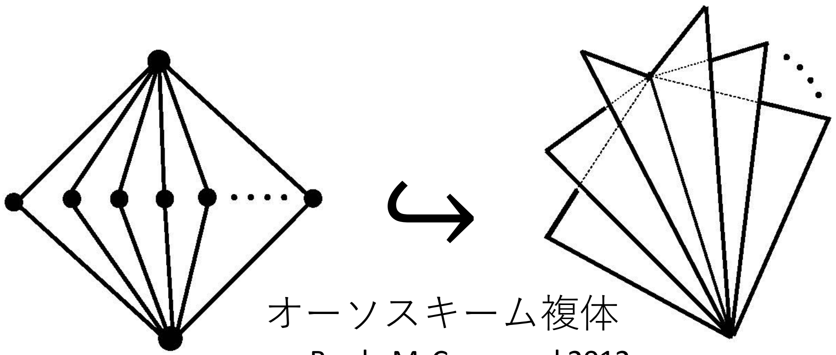


- L凸関数～各モジュラ束上の劣モジュラ関数の「凸な」貼り合わせ
- 各モジュラ束が高さ２のときがフレーム，マルチフロー問題に頻出

有向モジュラグラフの連続緩和

$\mathbb{Z}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^n$のアナロジー

構成する各モジュラ束に



オーソスキーム複体

Brady-McCammond 2012

のようにして
ユークリッド面をつめる

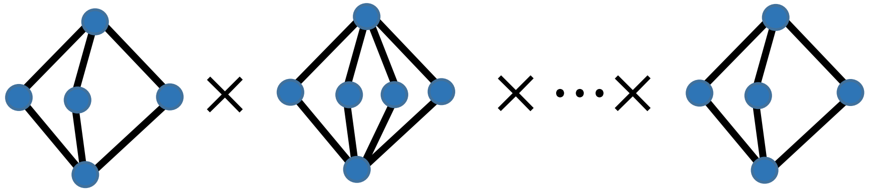
一意測地的

- 得られる距離空間は**CAT(0)**空間になる **(H. 2019)**
- **L**凸関数 ↪ 測地的凸関数になることが多い **(H. 2018)**

Lovasz拡張

- CAT(0)空間上の凸最適化が連続緩和として使えるかも？
  - ➢ 非可換ランク計算への応用 (Hamada-H.2017)

モジュラ束上の離散凸最適化

-  上の劣モジュラ関数最小化
  Kuivinen 2011
  Fujishige-Kiraly-Makino-Takazawa-Tanigawa 2014
- 劣モジュラ最大化による部分空間選択
  Maehara-Nakashima 2018
- 非可換Edmonds問題（非可換ランクの計算）
  Garg-Gurvits-Oliveira-Wigderson 2015(FOCS16)
  Ivanyos-Qiao-Subrahmanyam 2015(ITCS17)
- その重み付き版（Dieudonne行列式の次数計算）
  H.2018

組合せ最適化の代数的拡張

相補モジュラ束上の劣モジュラ関数

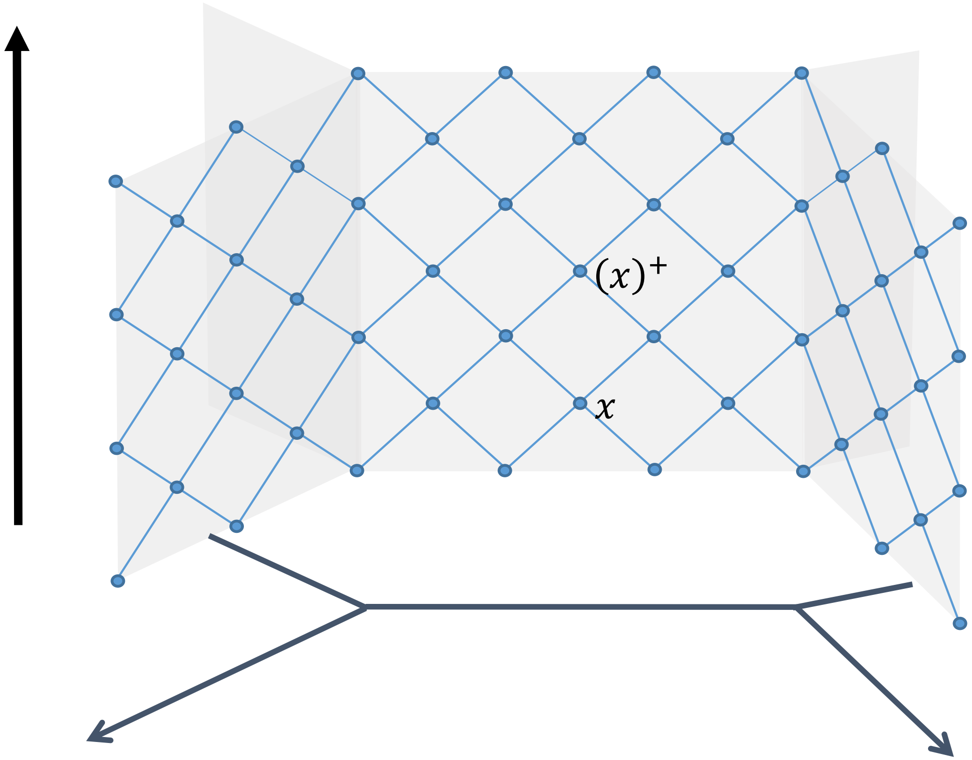
↑ 局所化

一様モジュラ束上のL凸関数

一様モジュラ束 [H.17]

$\Leftrightarrow$ モジュラ束であって

$x \longmapsto (x)^{+} := \bigvee\{y \mid y\colon x$の直上の元$\}$ が順序保存全単射



Ex. $\mathbb{Z}^{n}$, $\wedge$ = min, $\vee$ = max, $(x)^{+} = x + \mathbf{1}$

Rem. A型ユークリッド的ビルディングと等価 [H.17]

c.f. A型球面的ビルディング $\Leftrightarrow$ 相補モジュラ束 (Tits,Birkhoff)

一様モジュラ束上のL凸関数[H. 17]

$\mathcal{L}$: 一様モジュラ束

Def. $f: \mathcal{L} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$が L凸 $\Leftrightarrow$

$$f(x) + f(y) \geq f(x \wedge y) + f(x \vee y)$$

$$\exists \alpha, f\left((x)^+\right) = f(x) + \alpha$$

- $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^n$ のとき通常の定義に一致
- 局所化 → 相補モジュラ束上の劣モジュラ関数
- SDA + l_∞-反復上界

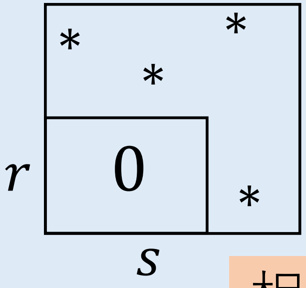
nc-rankとdeg-Det

Thm (Fortin-Reutenauer 2004)

$$\text{nc-rank} \textstyle\sum_k x_k A_k \quad = \quad n + m - \text{Max. } r + s$$

非可換変数

$\mathbb{K}$上

s.t. $PA_kQ =$ 

$(\forall k)$

P, Q: $\mathbb{K}$上正則

相補モジュラ束上の劣モ最小化

Thm (H.2018)

$\mathbb{K}(t)$上

$$\deg_t \text{Det} \textstyle\sum_k x_k A_k(t) \; = \; \text{Min. } -\deg_t \det P \; - \; \deg_t \det \mathrm{Q}$$

Dieudonne行列式

s.t. $\deg_t (PA_kQ)_{ij} \leq 0 \;\; (\forall k, \forall ij)$

P, Q: $\mathbb{K}(t)$上正則

一様モジュラ束上のL凸最小化

↑ 局所化

Rem: rank/deg detでは，$\leq$ 成立 (Lovasz 89/Murota 95)

$P = (p_1\, p_2\ \ldots\ p_n)$: $\mathbb{K}(t)$上正則

$\longrightarrow \langle P \rangle := \sum_i \mathbb{K}(t)^- p_i \quad \Leftrightarrow$ フルランク$\mathbb{K}(t)^-$自由加群 in $\mathbb{K}(t)^n$

$\mathbb{K}(t)^- := \{\, p/q \in \mathbb{K}(t) \mid \deg p/q \leq 0\}$

$$\deg \mathrm{Det} = \ \mathrm{Min.}\ \ -\deg L\ -\ \deg M$$

$$\text{s.t.}\ \ \deg A_k(L, M) \subseteq [-\infty, 0]\ \ (\forall k)$$

L, M:フルランク$\mathbb{K}(t)^-$自由加群 $\subseteq \mathbb{K}(t)^n$

where $A_k(x, y) := x^T A_k y$

- フルランク $\mathbb{K}(t)^-$自由加群の族は，一様モジュラ束になる

where ∧ = ∩, ∨ = +, $(L)^+ = tL$

注： SL($\mathbb{K}(t)^n$)のユークリッド的ビルディングと呼ばれているもの

- 目的関数はL凸になる

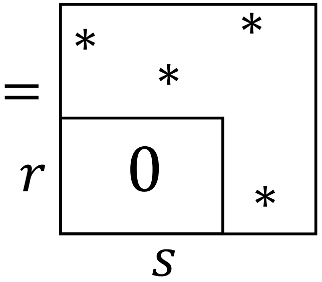
deg Detを求めるSDA

Input: $A(t) = x_1A_1(t) + x_2A_2(t) + \cdots + x_mA_m(t)$

0: $\deg_t(PAQ)_{ij} \leq 0$となるP, Q ($\mathbb{K}(t)$上正則)をとる

1: $PAQ = (PAQ)^0 + t^{-1}M$

2: Choose S, T s.t. $S(PAQ)^0T =$



with maximum $r + s$

局所最適性:
可補モジュラ束上の
劣モ最小化= nc-rank計算

3: If $r + s \leq n \Rightarrow P, Q$ 最適; $\deg \mathrm{Det}\, A = -\deg \det P - \deg \det Q$

4: If $r + s > n \Rightarrow$

$$P, Q \leftarrow \begin{pmatrix} I & O \\ O & tI_r \end{pmatrix} SP,\ QT \begin{pmatrix} I & O \\ O & t^{-1}I_{n-s} \end{pmatrix}$$; go to 1

部分加群$\langle P \rangle, \langle Q \rangle$が一様モジュラ束を移動しているとみなせる

Remarks

- deg detを計算する組合せ緩和法（Murota 1990,1995）の変種/簡単化

  組合せ緩和法 ≈ SDA +アパートメント($\approx \mathbb{Z}^n$)上の部分最適化

- 反復回数がAのSmith-McMillan 標準形を用いてシャープに評価できる

- 線形マトロイド交差 $A = \sum_k x_k t^{c_k} a_k b_k^T$ に適用すると,

  Frankのweight splitting algorithm の新しい実装となる(Furue-H 2019)

- 歪多項式行列のdeg Det計算(Oki 2019)

まとめ：離散凸解析 *beyond* $\mathbb{Z}^n$

- 土台構造からのL/L$^\natural$凸性の追求（M/M$^\natural$凸性をひとまず忘れて）
- 離散凸解析の射程の拡大
    - ➢ マルチフロー・ネットワークデザインのアルゴリズム設計
    - ➢ モジュラ束にかかわる最適化問題・組合せ最適化の代数バージョン
- 非ユークリッド的な凸性の活用
- 離散最適化の新しいパラダイムへの挑戦

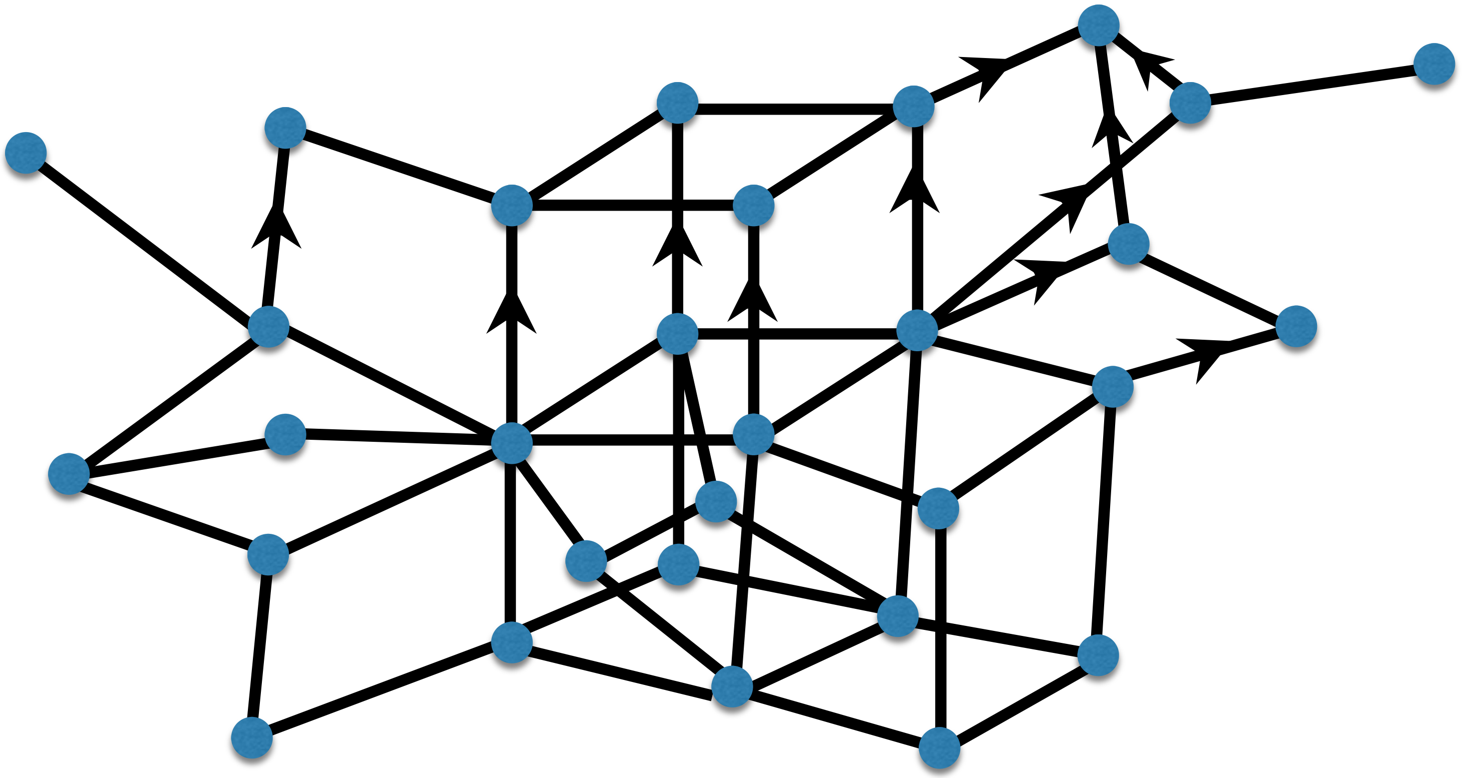
～ さきがけ研究課題「新しい凸性に基づく最適化理論とアルゴリズム」

おわり

References

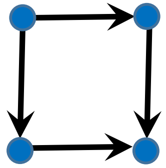
- H. Hirai: Discrete convexity and polynomial solvability in minimum 0-extension problems, SODA13, MPA16.
- J. Chalopin, V. Chepoi, H. Hirai, D. Osajda: Weakly modular graphs and nonpositive curvature, Mem. AMS, to appear
- H. Hirai: L-extendable functions and a proximity scaling algorithm for minimum cost multiflow problem, DISOPT15.
- H. Hirai: A dual descent algorithm for node-capacitated multiflow problems and its applications, TALG18
- H. Hirai: L-convexity on graph structures, JORSJ18
- M. Hamada and H. Hirai: Maximum vanishing subspace problem, CAT(0)-space relaxation, and block-triangularization of partitioned matrix, 2017, arXiv.
- H. Hirai: Uniform modular lattices and affine buildings, Adv. in Geometry, to appear,
- H. Hirai: Computing the degree of determinants via discrete convex optimization over Euclidean buildings, SIAGA, to appear.
- H.Hirai: A nonpositive curvature property of modular semilattices, 2019, arXiv.
- H.Furue and H.Hirai: On a weighted linear matroid intersection algorithm by deg-det computation, 2019, arXiv.
- H.Hirai and M.Ikeda: A cost-scaling algorithm for minimum-cost node-capacitated multiflow problem, 2019, arXiv.

Appendix



G: modular $\Leftrightarrow$

$$\forall v_1, v_2, v_3, \exists z, d\left(v_i, v_j\right) = d(v_i, z) + d(z, v_j) \quad (1 \leq i < j \leq 3)$$

G: orientable $\Leftrightarrow$ $\exists$ orientation s.t.
$\forall$4-cycle is oriented as 

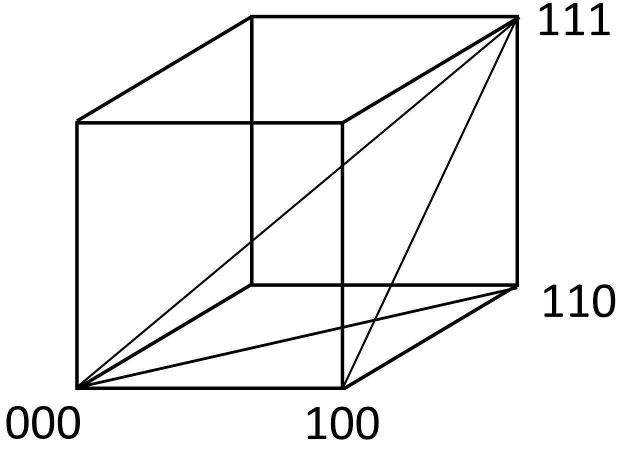
modular semilattice $\Leftrightarrow$ Hasse diagram is oriented modular

Submodular / L$^\natural$-convex func.

is extended to a convex function on $\mathbb{R}^n$

via *Lovász extension*.

$$f : \{0,1\}^n \to \mathbb{R} \quad ➔ \quad \bar{f} : [0,1]^n \to \mathbb{R}$$



An analogous property (often) holds

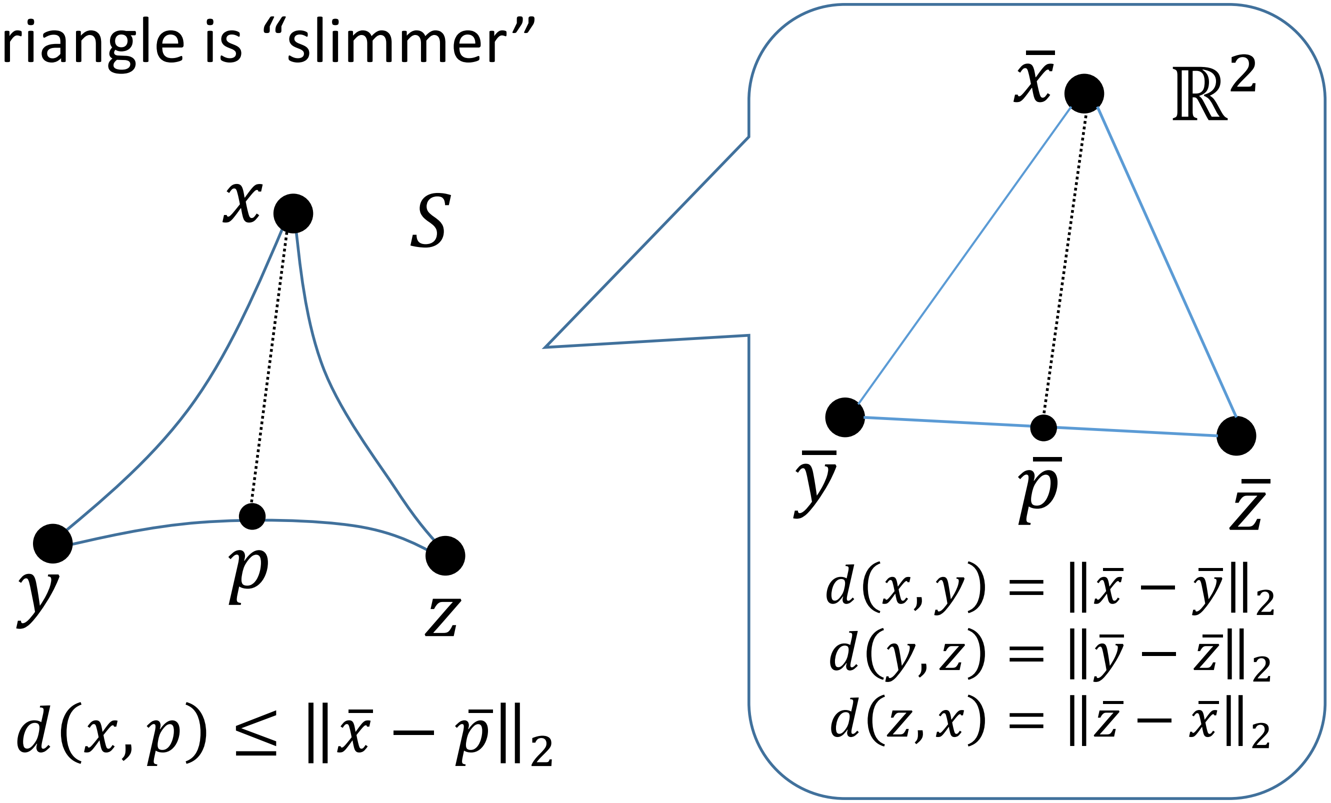
for our new submodular / L-convex func.

by means of *CAT(0) space + convexity*

Cartan-Alexandrov-Topogonov curvature ≤ 0

CAT(0)-space (Gromov 87)

$\Leftrightarrow$ geodesic metric space (S, d) in which every triangle is “slimmer”



$$d(x,y) = \|\bar{x} - \bar{y}\|_2$$
$$d(y,z) = \|\bar{y} - \bar{z}\|_2$$
$$d(z,x) = \|\bar{z} - \bar{x}\|_2$$

$$d(x,p) \leq \|\bar{x} - \bar{p}\|_2$$

FACT: CAT(0)-space is uniquely geodesic

---> convex function

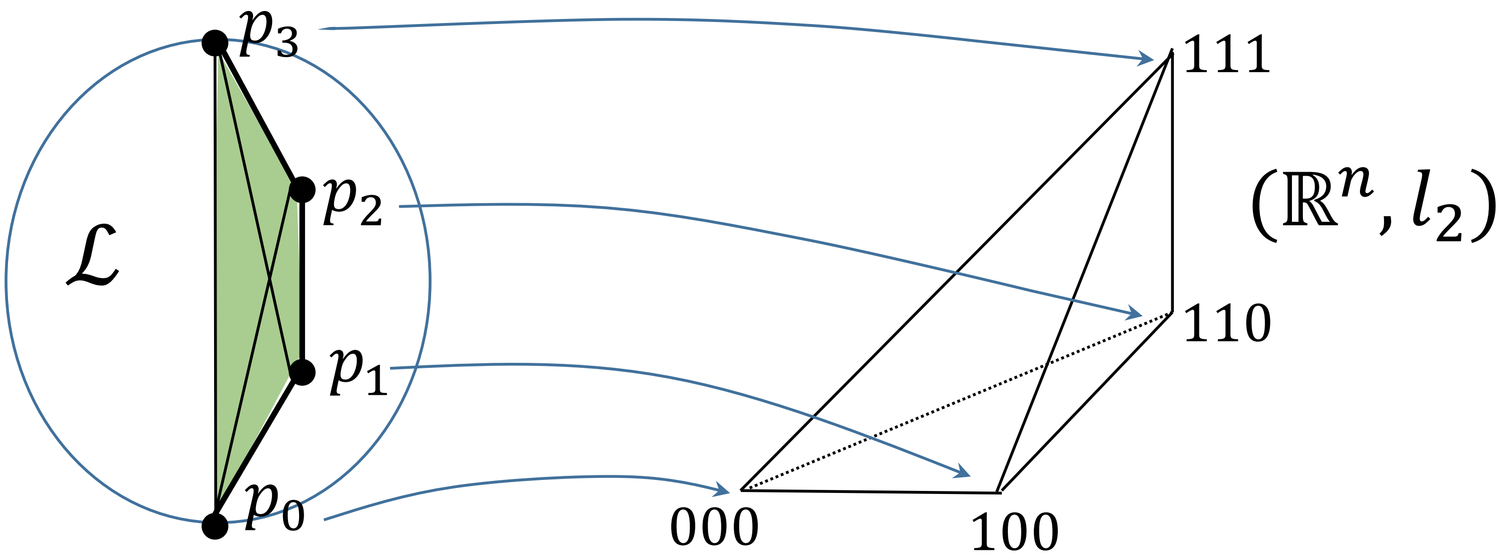
Modular lattice $\hookrightarrow$ CAT(0)-space

othoscheme complex

$\mathcal{L}$: modular lattice of finite rank

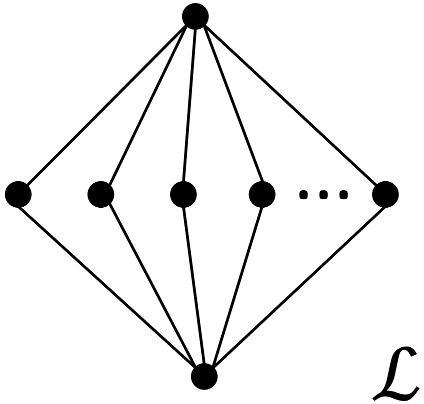
$K(\mathcal{L}) :=$ the set of convex combinations $\sum_{p\in\mathcal{L}} \lambda(p)p$ of $\mathcal{L}$
s.t. supp λ is a chain

(Brady-McCammond 2012)

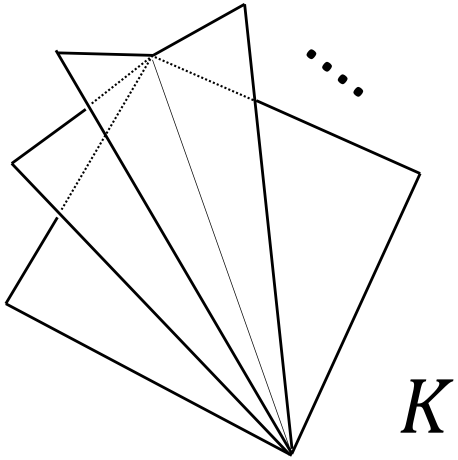


Theorem (Chalopin-Chepoi-H-Osajda 2014, c.f. Haettel-Kielak-Schwer 2017)
$K(\mathcal{L})$ is a complete CAT(0)-space.

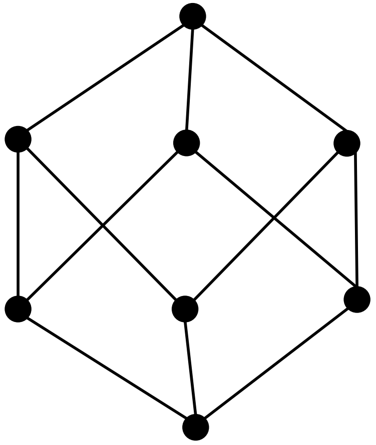
Example



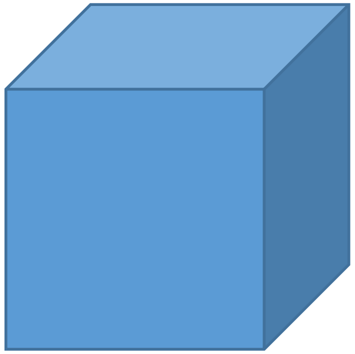
$\mathcal{L}$



$K(\mathcal{L})$



$\mathcal{L} = 2^{\{1,2,\ldots,n\}} \simeq \{0,1\}^n$



$K(\mathcal{L}) \simeq [0,1]^n$

Submodular function
$\hookrightarrow$ convex function

$\mathcal{L}$: modular lattice of finite rank

Lovász extension $\bar{f}: K(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}$ of $f: \mathcal{L} \to \mathbb{R}$

$$\bar{f}(x) \coloneqq \sum_i \lambda_i f(p_i) \quad (x = \sum_i \lambda_i p_i \in K(\mathcal{L}))$$

Theorem (H. 2016)

f is submodular on $\mathcal{L}$

$\Leftrightarrow$ $\bar{f}$ is convex on $K(\mathcal{L})$ (w.r.t. CAT(0)-metric)

original version: $\mathcal{L} = \{0,1\}^n, K(\mathcal{L}) \simeq [0,1]^n$

This suggests "continuous" optimization approach to submodular minimization on modular lattice.

Maximum Vanishing Subspace Problem (MVSP)

Input：$A_1, A_2, \ldots, A_N \in \mathbb{K}^{m\times n}$ ($\mathbb{K}$: field)

$$\text{Max.} \quad \dim X + \dim \mathrm{Y}$$

$$\text{s.t.} \quad A_k(X, Y) = 0 \quad (\forall k)$$

$$X \subseteq \mathbb{K}^m, Y \subseteq \mathbb{K}^n$$ vector subspaces

where $A_k(x, y) \coloneqq x^T A_k y$

$A_k = E_{ij}$ ⇒ stable set in bipartite graph = dual of bipartite matching

$A_k = a_k b_k^T$ ⇒ dual of linear matroid intersection

Submodular optimization approach

Hamada-H 2017

- MVSP is viewed as a submodular optimization over the modular lattice of all vector subspaces:

$$\text{Min.} - \dim X - \dim Y + M \sum_k \operatorname{rank} A_k|_{X\times Y}$$
$$\text{s.t.} \quad (X, Y) \in \mathcal{L}\times\mathcal{M}$$

- Apply CAT(0)-space relaxation + Lovász extension
  → convex optimization on CAT(0)-space

- Apply *Splitting Proximal Point Algorithm* (Bačák 2014)
  + its convergence rate (Ohta-Pálfia 2015)

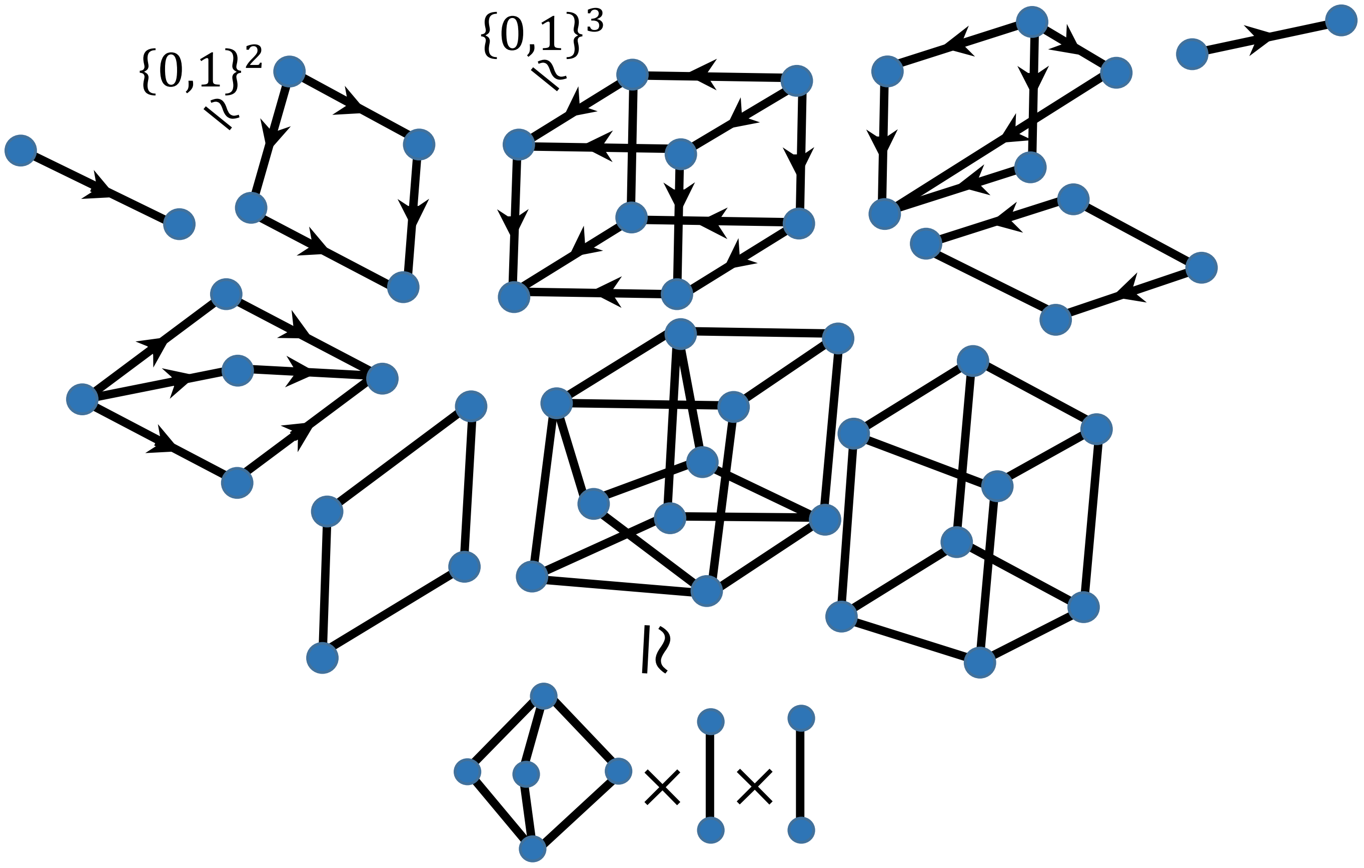
M. Bačák: *Convex Analysis and Optimization in Hadamard Spaces*, De Gruyter, Berlin, 2014.

DE GRUYTER

Miroslav Bačák

CONVEX ANALYSIS AND OPTIMIZATION IN HADAMARD SPACES

SERIES IN NONLINEAR ANALYSIS AND APPLICATIONS 22


$\{0,1\}^2$
$\cong$
$\{0,1\}^3$
$\cong$
$\cong$
$\times$
$\times$