アダマール空間上の凸解析と
スケーリング問題

平井 広志
東京大学大学院 情報理工学系研究科
数理情報学専攻
JST さきがけ
hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

応用数理学会 研究部会連合発表会
離散システム研究部会
2022年3月8日

背景：行列スケーリング（Sinkhorn 1964）

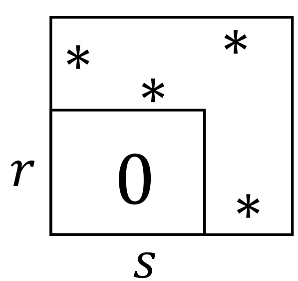
A: $n \times n$非負行列

正対角行列 R, Cによって RACを２重確率行列にできるか？

Thm (Rothblum-Schneider 1984): 以下は同値.

(a) $\exists(R_i, C_i)$ s.t. $R_i A C_i$が２重確率に収束

(b) $\inf\limits_{x,y>0} \log \dfrac{x^T A y}{x_1 x_2 \ldots x_n y_1 y_2 \ldots y_n} > -\infty$

(c) $A =$ 

, $r + s > n$ となる ゼロブロック無し

Aの非ゼロパターンがつくる２部グラフに完全マッチングが存在

凸解析の視点からは

Rockafellerの本にのってる定理を組み合わせると

Thm: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, 滑らかな凸関数. $p \in \mathbb{R}^n$に対し，以下は同値.

(a) $\exists (x_i)$ s.t. $\nabla f(x_i) \to p$.

(b) $\inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) - \langle p, x \rangle > -\infty$ ($\mathrm{dom}\, f^*$が閉なら)

(c) $\langle u, p \rangle \leq f^\infty(u)$ $(\forall u \in \mathbb{R}^n)$

f^*: Legendre-Fenchel 共役関数

$$f^*(p) \coloneqq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \langle p, x \rangle - f(x)$$

f^∞: 後退関数（recession function）

$$f^\infty(u) \coloneqq \lim_{t \to \infty} \frac{f(x + tu) - f(x)}{t}$$

正斉次凸,
$\mathrm{dom}\, f^*$の支持関数

→ 適切なf, p の設定で前ページの定理が導かれる

作用素スケーリング（Gurvitz 2004）

$A_1, A_2, \ldots, A_m$: $n \times n$ 行列 over $\mathbb{C}^n$
がつくる完全正値作用素が

2 重確率 $\underset{\text{def}}{\Leftrightarrow}$ $\displaystyle\sum_k A_k A_k^\dagger = I, \sum_k A_k^\dagger A_k = I$

正則行列 g, hによって， $g^\dagger(A_1, A_2, \ldots, A_m)h$ を2 重確率 にできるか？

Thm (Gurvitz 2004): 以下は同値.

(a) $\exists(g_i, h_i)$ s.t. $g_i^\dagger(A_1, A_2, \ldots, A_m)h_i$ が2重確率に収束

(b) $\inf_{X,Y \succ 0} n \log \operatorname{tr} \sum_k X A_k Y A_k^\dagger - \log\det X - \log\det Y > -\infty$

凸でないけど測地的凸

(c) $U^\dagger A_k V = \{0\}\ (\forall k)$, $\dim U + \dim V > n$ となる

ベクトル部分空間 $U, V \subseteq \mathbb{C}^n$ 無し

作用素スケーリングは多項式時間で解ける（Garg et al. 2019）

- $P_n \coloneqq \{X \succ 0\}$ 上の測地的凸最適化，交互最適化，非可換ランク,…

  測地線 $t \mapsto g e^{tH} g^{\dagger}$

発展：*Noncommutative Optimization* （Burgisser et al. 2019）

～ 群軌道上の最適化

G: 簡約代数群（$\mathbb{C}$上），$K \subseteq G$: 極大コンパクト

$\pi: G \to GL(N, \mathbb{C})$: 有理表現

Null-cone メンバシップ: $0 \overset{?}{\notin} \overline{\pi(G)v}$

$$\Updownarrow$$

$$-\infty \overset{?}{<} \inf \log \|\pi(g)v\| \text{ s.t. } g \in G$$

非正曲率対称空間 G/K 上の**測地的凸最適化の有界性判定**問題とみなせる

本研究の動機・目標

- ユークリッド空間上の凸最適化の有界性判定には,
  後退関数と関連する凸解析理論が有用であった.

- これをアダマール空間（特に非正曲率対称空間）上で展開し,
  作用素スケーリングや Noncommutative Optimization に応用したい.

- アダマール空間 ≔ 完備な CAT(0) 空間

- ベースとなるアイデア
  ～ Asymptotic slope function (Kapovich, Leeb, Milson 2009)

M の無限遠境界

$$f^{\infty}(\xi) \coloneqq \lim_{t \to \infty} \frac{f\big(c(t)\big) - f\big(c(0)\big)}{t} \quad (\xi \in M^{\infty})$$

$c\colon [0, \infty) \to M$: 測地線 *asymptotic* to ξ

成果 無定義語はあとで説明

M: 非正曲率対称空間（例：$P_n = GL_n/U_n$）

Thm [H. 2022] $f: M \to \mathbb{R}$ smooth convex, $p \in CM^\infty$ に対し，以下は同値.

(a) $\exists (x_i)$ s.t. $\nabla^\infty f(x_i) \to p$ (informal)

(b) $\inf_{x \in M} f(x) + b_p(x) > -\infty$ (dom f^*が閉なら)

(c) $\langle u, p \rangle \leq f^\infty(u)$ ($\forall u \in CM^\infty$)

$CM^\infty := \mathbb{R}_+ \times M^\infty/\sim$ **無限遠境界錐**

$f^\infty: CM^\infty \to \overline{\mathbb{R}}$: **後退関数**

$b_p: M \to \mathbb{R}$ **Busemann 関数** associated with $p \in CM^\infty$

$f^*: CM^\infty \to \overline{\mathbb{R}}$: **漸近 Legendre-Fenchel 共役**

$$f^*(p) := \sup_{x \in M} -b_p(x) - f(x)$$

新しく導入

$\nabla^\infty f(x) \in CM^\infty$: **漸近勾配**

大事な帰結

CM^{∞}: (非多様体的な)アダマール空間，対称空間のときは Euclidean building

Thm [H. 22]: 後退関数 f^{∞} は，CM^{∞} 上の正斉次凸関数

→ 条件 $\langle u, p \rangle \le f^{\infty}(u)$ $(\forall u \in CM^{\infty})$ のチェックは

凸最適化 $\inf f^{\infty}(u) - \langle u, p \rangle$ s.t. $u \in CM^{\infty}$ に帰着

- 作用素スケーリング with marginals (Franks 2018)
  → $f^{\infty} - \langle \cdot, p \rangle$は劣モジュラ関数のLovasz 拡張，Hamada-H 21 のアプローチと整合
- Hilbert-Mumford 規準，モーメント多面体メンバシップ
- Brascamp-Lieb 定数の有界性
- Hornの問題

⋮

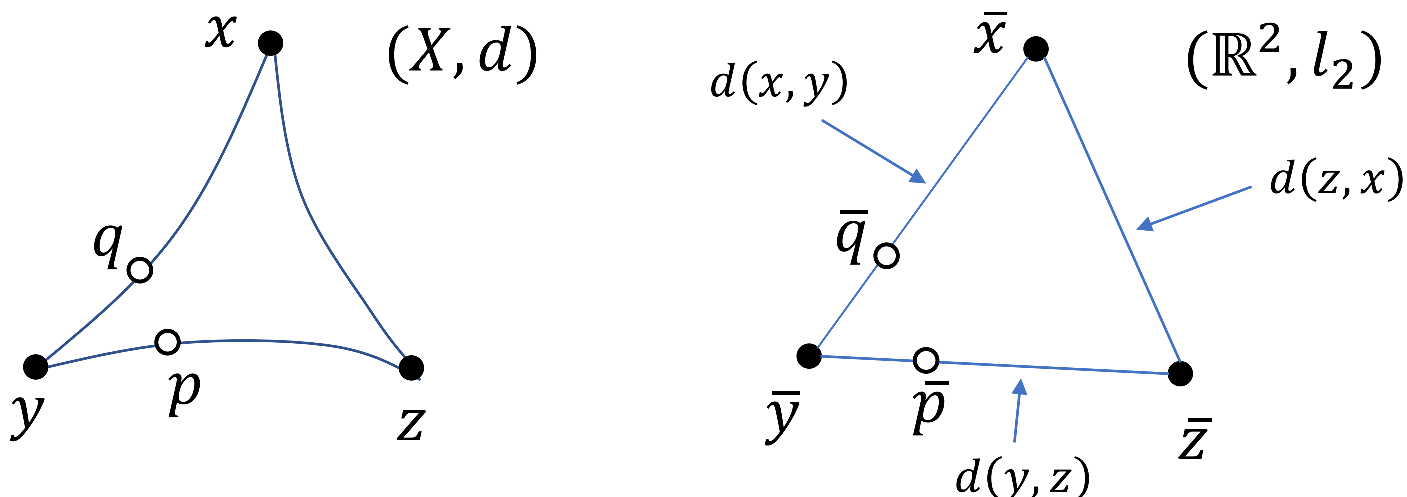
などが上の最適化問題に帰着

技術的細部・未定義語の解説

- CAT(0) 空間・アダマール空間
- 無限遠境界・ 無限遠境界錐
- 後退関数
- Busemann 関数
- 漸近 Legendre-Fenchel 共役
- 漸近勾配

CAT(0)空間 (Gromov 1987)

:= 測地的距離空間 (X,d) s.t. 三角形が痩せている



CAT(0)-inequality: $d(p,q) \leq \|\bar{p}-\bar{q}\|_2$

Def: **アダマール空間** := 完備な CAT(0) 空間

FACT: CAT(0) 空間は一意測地的である

→ （測地的な）凸性が定義できる.

計算複雑度と相性がいい凸最適化理論が展開できるか？

さきがけ研究「新しい凸性に基づくアルゴリズムと最適化理論」2019～2023

Examples

- $\mathbb{R}^n$, 双曲空間, …
- 非正曲率対称空間・非コンパクト型対称空間

  $\mathbb{R}^k \times G/K$ (G: 半単純リー群, K: 極大コンパクト部分群)

  Ex. $GL_n(\mathbb{C})/\,U_n = P_n$
- アダマール多様体 := 非正な断面曲率をもつ単連結完備リーマン多様体
- Tree, Euclidean building, …

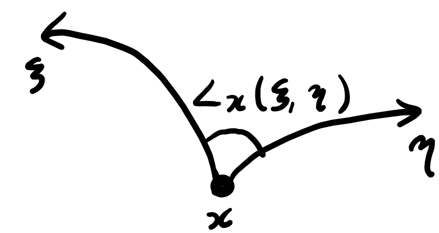
無限遠境界（Boundary at Infinity）

M: アダマール空間，距離 d

Def 測地線 $c, c' : [0, \infty) \to M$が漸近的 (asymptotic) $\Leftrightarrow d\big(c(t), c'(t)\big)$が有界

Def [無限遠境界] M^∞ := { 漸近関係による測地線の同値類 }

FACT [代表元] M^∞ = { xからでる測地線 } ($x \in M$は任意)



Def [角度距離] $\angle(\xi, \eta) \coloneqq \sup_{x \in M} \angle_x(\xi, \eta) \quad (\xi, \eta \in M^\infty)$

Def [無限遠境界錐] $CM^\infty \coloneqq \mathbb{R}_+ \times M^\infty / \sim \quad (r, \xi) \sim (r', \xi') \Leftrightarrow (r, \xi) = (r', \xi') \text{ or } r = r' = 0$

$$\langle p, p' \rangle \coloneqq r r' \cos \angle(\xi, \xi')$$

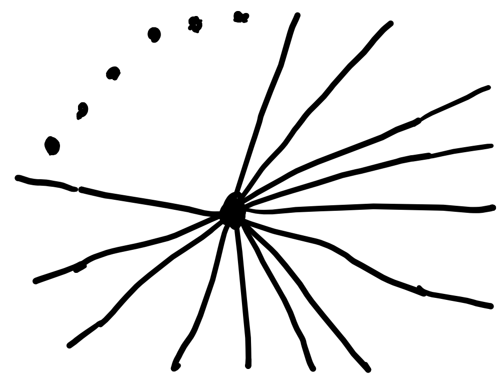
$$d^\infty(p, p') \coloneqq \sqrt{\|p\|^2 + \|p'\|^2 - 2\langle p, p' \rangle} \qquad (p = (r, \xi), p' = (r', \xi') \in CM^\infty)$$

FACT (CM^∞, d^∞) はアダマール空間

例

- $M = \mathbb{R}^n \quad \rightarrow \quad M^\infty = \mathbb{S}^{n-1},\ CM^\infty = \mathbb{R}^n$

- $M =$ 双曲空間 $\rightarrow$ $M^\infty =$ 離散位相空間 $\angle(\xi,\eta) = \pi \quad (\forall \xi,\eta \in M^\infty : \xi \neq \eta)$

$CM^\infty =$ 

- $M =$アダマール多様体 $\rightarrow$ $CM^\infty \equiv T_x\ (\forall x \in M)$

位相が異なる！

- $M = P_n \quad \rightarrow \quad CM^\infty = \{\sum_i \alpha_i U_i \mid U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_n = \mathbb{C}^n\}$

形式的（非負）結合

ベクトル部分空間の列（flag）

Euclidean building という構造

Busemann 関数$b_c: M \to \mathbb{R}$

Def [Busemann 関数] $c: [0, \infty) \to M$: 測地線

$$b_c(x) \coloneqq \lim_{t \to \infty} d\big(x, c(t)\big) - t \quad (x \in M)$$

FACT $c \sim c' \Longrightarrow b_c - b_{c'}$ は定数関数

Fix $x_0 \in M$ $\qquad p = (r, \xi) \iff b_p \coloneqq r b_{x_0, \xi}$

→ CM^∞ = Busemann関数の空間

Ex. $M = \mathbb{R}^n, x_0 = 0,\ c(t) = \xi t \ \to \ b_c(x) = -\langle \xi, x \rangle$

→ CM^∞ = 線形関数の空間 ~ 双対空間$(\mathbb{R}^n)^*$

漸近 Legendre-Fenchel 共役 $f^*: CM^\infty \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$

$f: M \to \mathbb{R}$, (smooth) convex

Def [asymptotic Legendre-Fenchel conjugate, H. 2022]

$$f^*(p) \coloneqq \sup_{x \in M} -b_p - f(x) \quad (p \in CM^\infty)$$

Def [asymptotic gradient, H. 2022]

$$\nabla^\infty f(x) \coloneqq t \mapsto \exp_x t\nabla f(x) \text{ の同値類 } \in CM^\infty$$

Lem [H. 2022] $x \in M, p \in CM^\infty$に対して以下は同値

- x minimizes $f + b_p$
- $\nabla^\infty f(x) = p$
- $f(x) + f^*(p) = -b_p(x)$

後退関数, asymptotic slope f^{∞}

$f: M \to \mathbb{R}$, (smooth) convex

Def [Kapovich-Leeb-Milson 2009; H. 2022]

$$f^{\infty}(\xi) \coloneqq r \lim_{t\to\infty} \frac{f\big(c(t)\big) - f\big(c(0)\big)}{t} \quad (p = (r, \xi) \in CM^{\infty})$$

$c: [0, \infty) \to M$: 測地線 *asymptotic* to ξ

Lem [Kleiner-Leeb 2006]: Well-defined

Thm [H. 2022] $f^{\infty}: CM^{\infty} \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ は正斉次凸

Lem [Kapovich-Leeb-Milson 2009; H. 2022]

$$b_p(u)^{\infty} = -\langle u, p\rangle \quad (u, p \in CM^{\infty})$$

Lem [H.2022] $\inf_{x\in M}\big(f + b_p\big)(x) > -\infty$

$$\Longrightarrow \langle u, p\rangle \leq f^{\infty}(u) \ (\forall u \in CM^{\infty})$$

M: 非正曲率対称空間（例：P_n）

CM^∞ = Euclidean building ～ 凸錐（Weyl chamber）の貼り合わせ

$f: M \to \mathbb{R}$, smooth convex

Thm [H. 2022] $p \in CM^\infty$に対して以下は同値

(a) $\forall (x_i)$ s.t. $\lim_{i\to\infty} \left\| \nabla(f + b_p)(x_i) \right\|_{x_i} = 0$

$\nabla f(x_i) \to p$ の対応物

(b) $p \in \overline{\mathrm{dom}\, f^*}$

(c) $p \in B(f^\infty) \coloneqq \{q \in CM^\infty \mid \langle u, q\rangle \le f^\infty(u) (\forall u \in CM^\infty)\}$

Thm [H. 2022] f^*はWeyl chamber C 上で凸，$C \cap B(f^\infty)$は凸集合

- モーメント多面体の凸性定理（Guillemin-Sternberg 1982）が導ける
- f が漸近的に劣モジュラのとき，$B(f^\infty)$は基多面体のアナログ

まとめ

作用素スケーリング や Noncommutative Optimization に動機付けられて
アダマール空間上の測地的凸最適化の非有界性判定に対する
凸解析理論構築を試みた.

今後の展開

- アダマール空間の無限遠境界錐上の凸最適化

$$\inf\ f^{\infty}(u) - \langle u, p \rangle \ \text{s.t.}\ u \in CM^{\infty}$$

  に対するアルゴリズム開発

- アダマール多様体上の測地的凸最適化に対する情報幾何的アプローチ

- 離散凸解析 beyond $\mathbb{Z}^n$ における Legendre-Fenchel 共役性理論

おわり

H. Hirai: Convex analysis on Hadamard spaces and scaling problems, 2022, arXiv:2203.03193