非可換な変数をもつ多項式行列の行列式の次数の計算について

平井 広志
東京大学大学院情報理工学系研究科
数理情報学専攻
e-mail：hirai@mist.i.u-tokyo.ac.jp

1 イントロダクション

本発表では，変数 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ と体 $\mathbb{K}$ 上の n 次正方行列 $A_0, A_1, \ldots, A_m$ によって，

$$A = A_0 + A_1 x_1 + \cdots + A_m x_m \qquad (1)$$

とかける行列 A のランク計算とその拡張について論じる．この問題は，あるクラスの組合せ最適化問題の代数的一般化とみなせる．例えば，カラークラスのサイズが等しい 2 部グラフ G を考えるとき，G の各枝 $e_k = ij$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ に対して，行列 A_k を (i, j) 要素が 1，それ以外をゼロと定める．そして A_0 はゼロ行列とする．すると，A のランクは，G の最大マッチング数に一致する．したがって，この場合は，A のランクはマッチングアルゴリズムによって多項式時間で計算可能である．J. Edmonds は，これを一般化して，(1) のような変数付き行列のランクは多項式時間で計算できるか，という問題を提示している（Edmonds 問題, 1967 年）．素朴にやると，x_i たちをシンボリックに扱わなければならず指数時間かかってしまう．もしも，各変数 x_i に，$\mathbb{K}$ の元を代入すれば，代入後の A のランクは，ガウスの消去法によって効率的に計算できる．$\mathbb{K}$ のサイズが十分大きければ，それは高い確率で，(代入前の)A のランクであろう．この考えに基づき，L. Lovász は，A のランクを求める乱択多項式時間アルゴリズムを与えている（1979 年）．しかし，決定性多項式時間アルゴリズムは，限られたクラスの行列にしか知られておらず，その存在性は，理論計算機科学における重要な未解決問題となっている．

2 非可換ランク

最近，この問題が興味深い展開を見せている．上の議論では，変数 x_i たちが互いに可換であるものとして，A を多項式環 $\mathbb{K}[x]$ 上の行列とみなし，そのランクは，有理関数体 $\mathbb{K}(x)$ 上で考えていた．しかし，変数 x_i たちが互いに非可換であるとして，A を自由環 $\mathbb{K}\langle x \rangle$ 上の行列とみることもできる．すると，$\mathbb{K}\langle x \rangle$ は，自由斜体 $\mathbb{K}(\langle x \rangle)$ と呼ばれる斜体（＝任意の非ゼロな元が逆元をもつ可換とは限らない環）に埋め込まれる．この斜体上で，A のランクが定義できて，これを非可換ランクという．

Garg et al. [1] は，$\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ のとき，Ivanyos et al. [2] は，$\mathbb{K}$ が一般の場合に，非可換ランクが多項式時間で計算できることを証明している．前者は，Gurvits の作用素スケーリングに基づくもので，後者は，Wong 列と呼ばれる 2 部マッチングの交互道のベクトル空間アナログに基づくもので，どちらも大変興味深い．ここで，鍵となるのは，Fortine-Reutenaur [3] による非可換ランクの公式である．それは，非可換ランクが次の最適化問題の最適値に一致するというものである：

$$\begin{aligned} \text{Min.} \quad & 2n - r - s \\ \text{s.t.} \quad & (PA_kQ)_{ij} = 0 \\ & (0 \leq k \leq m, 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s), \\ & P, Q : \mathbb{K} \text{ 上の正則行列}. \end{aligned} \qquad (2)$$

一般にランク $\leq$ 非可換ランクであるが，(2) がランクの上界を与えることをみるのは容易い．上述の 2 部グラフの場合は，ランクと非可換ランクが一致し，問題 (2) は，最大マッチング数の公式 (König-Egerváry の公式) を与える．

一方，これらの研究の流れとは独立に，行列のブロック三角化の文脈から，Hamada-Hirai [4] は，(2) を考察し，ベクトル部分空間のなすモジュラ束上の劣モジュラ最適化として定式化することで新しいアルゴリズムを与えている．

3 本研究の動機

組合せ最適化理論においては,「重み付き」の問題を考えることは自然である．例えば，上述の 2 部グラフ G において，各枝 e に非負整数重み c_e が与えられていると仮定する．そして，重みが最大の完全マッチングを求めたいとしよう．この場合も，完全マッチングの最大重みは以下のような代数的な解釈を持つ．変数 t を用意し，上で定義した A_k に $t^{c_{e_k}}$ をかける．そし

て，A を $\mathbb{K}(x)[t]$ 上の正方行列とみなす．このとき，最大重みは，行列式 $\det A$ の t に関する最大次数 $\deg\det A$ に一致する．このような行列式の次数を用いる解釈は，より一般的な重み付き線形マトロイド交差問題においても可能である．したがって，式 (1) において，各 A_k を t に関する正方多項式行列としたときに，$\deg\det A$ の計算は，重み付きの組合せ最適化問題の線形代数バージョンといってよいだろう．

では，x_i たちが互いに非可換，t とは可換，とし，A を $\mathbb{K}\langle x\rangle$ 上の t に関する多項式行列とみたときに，非可換ランクに対応するべき「行列式の次数の非可換版」を考えることは自然であろう．本研究ではそれを以下のように定義する．$\mathbb{F} = \mathbb{K}(\langle x\rangle)$ を自由斜体とし，t に関する多項式環 $\mathbb{F}[t]$ の有理関数斜体 (Ore 商環) $\mathbb{F}(t)$ を考える．そして，A を斜体 $\mathbb{F}(t)$ 上の行列とみて，斜体上の行列式概念である Dieudonné 行列式 $\mathrm{Det}\, A$ を考える．$\mathrm{Det}\, A$ の値は，乗法群 $\mathbb{F}(t) \setminus \{0\}$ の元をその交換子群で割ったものであるが，交換子の次数はゼロであることから，$\mathrm{Det}\, A$ の次数 $\deg \mathrm{Det}\, A \in \mathbb{Z}$ が自然に定まる．我々の目標は，$\deg \mathrm{Det}\, A$ の計算であり，以下の成果を得た [5].

4 本研究の成果

Fortine-Reutenaur の非可換ランクの公式の拡張として，$\deg \mathrm{Det}\, A$ の値が，以下の最適化問題の最適値に一致することを示した．

$$
\begin{aligned}
\text{Min.} \quad & -\deg\det P - \deg\det Q \qquad (3)\\
\text{s.t.} \quad & \deg(PA_kQ)_{ij} \le 0\\
& (0 \le k \le m, 1 \le i, j \le n),\\
& P, Q : \mathbb{K}(t) \text{ 上の正則行列.}
\end{aligned}
$$

一般に $\deg\det \le \deg\mathrm{Det}$ であるが，問題 (3) が $\deg\det$ の上界を与えることは，組合せ緩和による $\deg\det$ 計算の文脈 [6] で知られていた．

非可換ランクの問題 (2) がモジュラ束上の劣モジュラ関数の最小化とみなせたことの拡張として，問題 (3) が「一様モジュラ束の L 凸関数」という離散凸関数の最小化とみなせることを示した．これにより，L 凸関数に対する最急降下法が適用できる．ここで，最適性のチェック，すなわち，最急降下方向を見つける問題は，問題 (2) に帰着することを示した．したがって，問題 (2) を解くアルゴリズムをサブルーチンとすることで $\deg\mathrm{Det}$ が計算できる．サブルーチンの呼出し回数に対して，A のスミス・マクミラン標準形を用いた精密な評価を与えた．このアルゴリズムは，$\deg\det$ を計算する組合せ緩和アルゴリズム [6]（の変種）の拡張となっている．

A_0 を除く A_k がすべて $\mathbb{K}(t)$ 上でランクが 1 のとき，$\deg\det A = \deg\mathrm{Det}\, A$ となることを示した．これは，ランクと非可換ランクが一致する場合の自然な拡張である．これによって，線形マトロイドの最小重み基，重み付き 2 部マッチング，重み付き線形マトロイド交差，混合多項式行列の $\deg\det$ 計算などが $\deg\mathrm{Det}$ 計算と解釈できることになった．さらに，貪欲アルゴリズム，ハンガリー法なども上述の最急降下法の立場から自然に解釈できることを示した．

謝辞　本研究は JSPS 科研費 JP26280004，および，JP17K00029 の助成を受けたものです．

参考文献

[1] A. Garg, L. Gurvits, R. Oliveira, and A. Wigderson: Operator scaling: theory and applications. (2015), arXiv:1511.03730.

[2] G. Ivanyos, Y. Qiao, and K. V. Subrahmanyam, Constructive noncommutative rank computation in deterministic polynomial time over fields of arbitrary characteristics. *Computational Complexity*, to appear.

[3] M. Fortin and C. Reutenauer, Commutative/non-commuative rank of linear matrices and subspaces of matrices of low rank. *Séminaire Lotharingien de Combinatoire* **52** (2004), B52f.

[4] M. Hamada and H. Hirai: Maximum vanishing subspace problem, CAT(0)-space relaxation, and block-triangularization of partitioned matrix, 2017, arXiv:1705.02060.

[5] H. Hirai: Computing degree of determinant via discrete convex optimization on Euclidean building, preprint, 2018, arXiv:1805.11245.

[6] K. Murota: *Matrices and Matroids for Systems Analysis.* Springer-Verlag, Berlin, 2000.