量子重力における11次元時空の考察

名古屋大学多弦セミナー
2023/10/16

静岡大学 森田 健

Based on

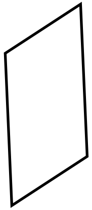
TM 2305.15161

◆ Overview

「超弦理論や超重力では, 10次元や11次元が重要.」

D次元

p-brane



超対称性 (or 超重力)

「なぜ超対称性?」

11次元の膜 (M理論)

10次元の弦 (超弦理論)

<u>今回の研究</u>

スケール不変性

電磁双対性

(+簡単な次元解析)

11次元 M2/M5膜の理論

self-dual brane理論 (例 D3 in IIB)

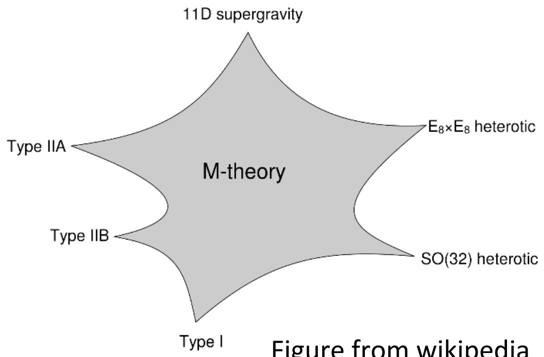


Figure from wikipedia

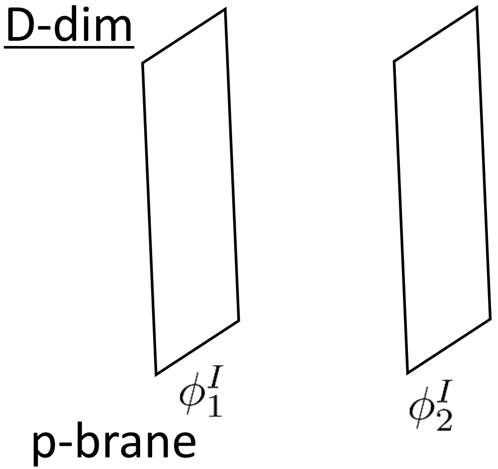
これまでと異なるアプローチで

10/11次元の特殊性や弦理論を理解できる.

1. Overview
2. 解析
3. まとめ

★ Set up

Two p-dimensional objects (p-branes)
in D-dimensional spacetime.



この系の低エネルギー
有効理論

$$S = \int d^{p+1}x \sum_{a=1}^{2} \frac{1}{2}(\partial \phi_a^I)^2 + \cdots$$

便宜上, カノニカルな
規格化(あとで次元解析)

ϕ_a^I: coordinates in the D-dimensions

$$\begin{cases} I = 1, \cdots, D-p-1 \\ a = 1, 2 \end{cases}$$

Situations

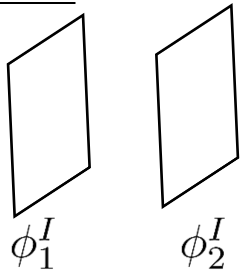
- Low energy
- braneは遠距離.
- braneはほぼ平行

Assumptions

- tension-lessでない.
- 通常の運動項
- 並進不変性
- 微分展開可能
- スケール不変
- Xが次元を決める.
- 電磁双対性
- nは双対で共通

〇 相互作用(相対運動に注目)

D-dim



$$S = \int d^{p+1}x \sum_{a=1}^{2} \frac{1}{2}(\partial\phi_a^I)^2 + \cdots$$

低エネルギーで
どのような項が重要か?

$$\begin{cases} \partial\phi & \text{: 小} \\ |\phi_1 - \phi_2| & \text{: 大} \end{cases}$$

〇 系にスケール不変性を課す. ←「きれいな対称性」

質量次元: $[\phi] = \dfrac{p-1}{2}$

スケール変換: $\begin{cases} x \to \eta^{-1}x \\ \phi \to \eta^{\frac{p-1}{2}}\phi \end{cases}$

η: constant

作用がスケール変換で不変
→ 質量次元をもった結合定数なし

$n = 0, 1, 2, \cdots$

適当な
非負整数

$$\frac{(\partial\phi_1 - \partial\phi_2)^{2n}}{|\phi_1 - \phi_2|^X} \cdots$$

次元解析

$$X = 2(n-1) + \frac{4(n-1)}{p-1}$$

Situations

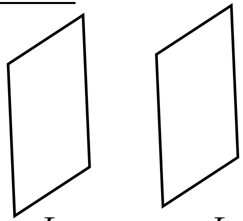
- Low energy
- braneは遠距離.
- braneはほぼ平行

Assumptions

- tension-lessでない.
- 通常の運動項
- 並進不変性
- 微分展開可能
- スケール不変
- Xが次元を決める.
- 電磁双対性
- nは双対で共通

○ ここまでのまとめ: スケール不変な有効理論

D-dim



ϕ_1^I ϕ_2^I

$n = 0, 1, 2, \cdots$: 適当な非負整数

$$S = \int d^{p+1}x \sum_{a=1}^{2} \frac{1}{2}(\partial\phi_a^I)^2 + \frac{(\partial\phi_1 - \partial\phi_2)^{2n}}{|\phi_1 - \phi_2|^X} \cdots$$

スケール不変「次元を持った結合定数無し」

次元解析

$$[\phi] = \frac{p-1}{2} \quad \rightarrow \quad X = 2(n-1) + \frac{4(n-1)}{p-1}$$

ここでXが整数の場合: $\frac{1}{|\phi_1 - \phi_2|^X}$ は通常の遠距離ポテンシャルの形

→ 指数Xから次元Dを読み取れる: D=X+p+3

(例) *D=4, p=0* → *X=1* (点電荷)

そこで「Xが整数」を要請すると, 特定の(n,p)の組しか許されない.
→「XとpからD決まる.」→「(*n,p,D*)に非自明な関係」

Situations

- Low energy
- braneは遠距離.
- braneはほぼ平行

Assumptions

- tension-lessでない.
- 通常の運動項
- 並進不変性
- 微分展開可能
- スケール不変
- Xが次元を決める.
- 電磁双対性
- nは双対で共通

○ ここまでのまとめ: スケール不変な有効理論

補足

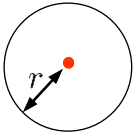
D増やす.　　X増える.

D=4, p=0 → X=1 (点電荷) ⟶ *D=4+k, p=0 → X=1+k →D=X+3*

p増やす.

X減る. *D=4, p=0+k → X=1-k*

$U \propto r^{-1}$　$U \propto \log(r)$　$U \propto r$



点電荷を囲む
超球の表面積
$\propto r^{D-2}$

$\to U \propto r^{-(D-3)}$

⇓

$$D = X + p + 3$$

ここでXが整数の場合: $\frac{1}{|\phi_1 - \phi_2|^X}$ は通常の遠距離ポテンシャルの形

→ 指数Xから次元Dを読み取れる: $\boxed{\text{D=X+p+3}}$

(例) *D=4, p=0 → X=1* (点電荷)

そこで「Xが整数」を要請すると, 特定の(n,p)の組しか許されない.
→「XとpからD決まる.」→「(*n,p,D*)に非自明な関係」

Situations

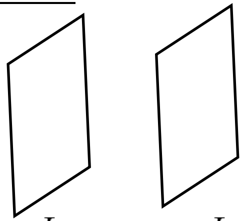
- Low energy
- braneは遠距離.
- braneはほぼ平行

Assumptions

- tension-lessでない.
- 通常の運動項
- 並進不変性
- 微分展開可能
- スケール不変
- Xが次元を決める.
- 電磁双対性
- nは双対で共通

○ 可能な*(n,p,D)*

D-dim



$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$S = \int d^{p+1}x \sum_{a=1}^{2} \frac{1}{2}(\partial\phi_a^I)^2 + \underline{\frac{(\partial\phi_1 - \partial\phi_2)^{2n}}{|\phi_1 - \phi_2|^{X}}} \cdots$$

$$\begin{cases} X = 2(n-1) + \dfrac{4(n-1)}{p-1} & : 整数 \\ D = X + p + 3 \end{cases}$$

n<4の解:
(n=1除く)

n=0 p=0, X=2 → D=5
n=2 p=2, X=6 → D=11
p=3, X=4 → D=10
p=5, X=3 → D=11
n=3 p=2, X=12 → D=17
p=3, X=8 → D=14
p=5, X=6 → D=14
p=9, X=5 → D=17

(p≧0, D≧1)

Situations

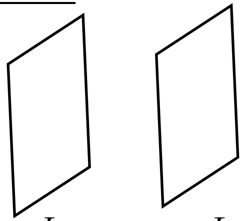
- Low energy
- braneは遠距離.
- braneはほぼ平行

Assumptions

- tension-lessでない.
- 通常の運動項
- 並進不変性
- 微分展開可能
- スケール不変
- Xが次元を決める.
- 電磁双対性
- nは双対で共通

○ 可能な*(n,p,D)*

D-dim



ϕ_1^I ϕ_2^I

$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$S = \int d^{p+1}x \sum_{a=1}^{2} \frac{1}{2}(\partial\phi_a^I)^2 + \underline{\frac{(\partial\phi_1 - \partial\phi_2)^{2n}}{|\phi_1 - \phi_2|^{X}}} \cdots$$

$$\begin{cases} X = 2(n-1) + \dfrac{4(n-1)}{p-1} \ :\text{整数} \\ D = X + p + 3 \end{cases}$$

Situations

・Low energy
・braneは遠距離.
・braneはほぼ平行

Assumptions

・tension-lessでない.
・通常の運動項
・並進不変性
・微分展開可能
・スケール不変
・Xが次元を決める.
・電磁双対性
・nは双対で共通

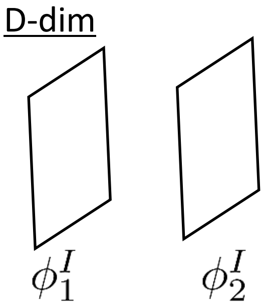
n<4の解:
(n=1除く)

~~n=0 p=0, X=2 → D=5~~
n=2 p=2, X=6 → D=11
p=3, X=4 → D=10
p=5, X=3 → D=11
n=3 ~~p=2, X=12 → D=17~~
~~p=3, X=8 → D=14~~
p=5, X=6 → D=14
~~p=9, X=5 → D=17~~

電磁双対性

p-brane に対して
電磁双対な
(D-p-4)-brane も
同じnの解として出現を
要請する.
cf) Dirac 量子化
沼地予想

〇 可能な(n,p,D)



$$n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$S = \int d^{p+1}x \sum_{a=1}^{2} \frac{1}{2}(\partial\phi_a^I)^2 + \underline{\frac{(\partial\phi_1 - \partial\phi_2)^{2n}}{|\phi_1 - \phi_2|^X}} \cdots$$

$$\begin{cases} X = 2(n-1) + \dfrac{4(n-1)}{p-1} & \text{: 整数} \\ D = X + p + 3 \end{cases}$$

Situations

- Low energy
- braneは遠距離.
- braneはほぼ平行

Assumptions

- tension-lessでない.
- 通常の運動項
- 並進不変性
- 微分展開可能
- スケール不変
- Xが次元を決める.
- 電磁双対性
- nは双対で共通

一般解 (2種類のみ存在)

①: (n,p,D)=(2,2,11) と (2,5,11)

→ M-theory (M2 & M5)

(n=2もSUGRAと一致)

②: (n,p,D)=(n,2n-1,4n+2)

→ self-dual 解

(p=D-p-4)

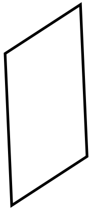
$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

電磁双対性

p-brane に対して
電磁双対な
(D-p-4)-brane も
同じnの解として出現を
要請する.
cf) Dirac 量子化
沼地予想

○ 可能な(n,p,D)

補足1: 電磁双対



p-brane

$A_{p+1} := A_{\mu_1 \cdots \mu_{p+1}} \longrightarrow F_{p+2} = dA_{p+1} \longrightarrow \tilde{F}_{D-(p+2)} = d\tilde{A}_{D-p-3}$

と結合できる.　　場の強さ　　ポアンカレ双対 (電磁双対)

↓

(D-p-4)-brane

→ 量子化可能「braneが数えられる.」

一般解 (2種類のみ存在)

①: (n,p,D)=(2,2,11) と (2,5,11)

→ M-theory (M2 & M5)

(n=2もSUGRAと一致)

②: (n,p,D)=(n,2n-1,4n+2)

→ self-dual 解

(p=D-p-4)

$n = 1, 2, 3, \cdots$

電磁双対性

p-brane に対して電磁双対な (D-p-4)-brane も同じnの解として出現を要請する.

cf) Dirac 量子化

沼地予想

Situations

- Low energy
- braneは遠距離.
- braneはほぼ平行

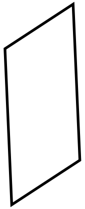
Assumptions

- tension-lessでない.
- 通常の運動項
- 並進不変性
- 微分展開可能
- スケール不変
- Xが次元を決める.
- 電磁双対性
- nは双対で共通

○ 可能な(n,p,D)

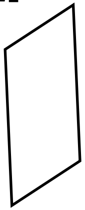
補足2: 「nは双対で共通」

$$\begin{cases} \tilde{p} := D - p - 4 \\ \tilde{X} := D - \tilde{p} - 3 \end{cases}$$



$$\int d^{p+1}x \frac{(\partial\phi_1 - \partial\phi_2)^{2n}}{|\phi_1 - \phi_2|^X}$$

p-brane



$$\int d^{\tilde{p}+1}x \frac{(\partial\phi_1 - \partial\phi_2)^{2n}}{|\phi_1 - \phi_2|^{\tilde{X}}}$$

(D-p-4)-brane

トーラスコンパクト化

$R^D \to R^{D-d} \times T^d$

適当にトーラス上にbraneをwrap or smearさせる.

→ R^{D-d}における2種のbraneの (p,X)を等しく出来る.

→ n共通: ポテンシャルが等価な形

→ きれい (cf. U-dual)

一般解 (2種類のみ存在)

①: (n,p,D)=(2,2,11) と (2,5,11)

→ M-theory (M2 & M5)

(n=2もSUGRAと一致)

②: (n,p,D)=(n,2n-1,4n+2)

→ self-dual 解

(p=D-p-4)

$$n = 1, 2, 3, \cdots$$

電磁双対性

p-braneに対して電磁双対な(D-p-4)-braneも同じnの解として出現を要請する.

cf) Dirac 量子化 沼地予想

Situations

- Low energy
- braneは遠距離.
- braneはほぼ平行

Assumptions

- tension-lessでない.
- 通常の運動項
- 並進不変性
- 微分展開可能
- スケール不変
- Xが次元を決める.
- 電磁双対性
- nは双対で共通

○ 可能な(n,p,D)

補足3: n=1

(X ≠ 0)

$n=1$: 同じベキ → $[\phi]=\dfrac{p-1}{2}=0$ のみ可能

$$S=\int d^{p+1}x\sum_{a=1}^{2}\frac{1}{2}(\partial\phi_a^I)^2+\frac{(\partial\phi_1-\partial\phi_2)^{2n}}{|\phi_1-\phi_2|^X}\cdots$$

→ p=1

$p=1$

→ 電磁双対: D-p-4=D-5=1

→ D=6 (→ X=2)

→ (n,p,D)=(1,1,6)

電磁双対もn=1
→1-brane
(self-dual)

[X=0 → log (ϕ) → [ϕ]=0]

一般解 (2種類のみ存在)

①: (n,p,D)=(2,2,11) と (2,5,11)
→ M-theory (M2 & M5)
(n=2もSUGRAと一致)

②: (n,p,D)=(n,2n-1,4n+2)
→ self-dual 解
(p=D-p-4)

$$\boxed{n=1,2,3,\cdots}$$

電磁双対性

p-brane に対して
電磁双対な
(D-p-4)-brane も
同じnの解として出現を
要請する.
cf) Dirac 量子化
沼地予想

Situations

- Low energy
- braneは遠距離.
- braneはほぼ平行

Assumptions

- tension-lessでない.
- 通常の運動項
- 並進不変性
- 微分展開可能
- スケール不変
- Xが次元を決める.
- 電磁双対性
- nは双対で共通

○ Self-dual解?

(n,p,D)=(n,2n-1,4n+2) $n = 1, 2, 3, \cdots$

n=1 → (p,D)=(1,6) → little string theoryのself-dual string
(non-gravitational theory) (Gustavsson 2003)

n=2 → (p,D)=(3,10) → D3-brane in IIB superstring

n=3 → (p,D)=(5,14) → ?
n=4 → (p,D)=(7,18) → ?
n=5 → (p,D)=(9,22) → ?
n=6 → (p,D)=(11,26) → !?
・・・・

- consistentな理論か不明.
- Einstein-Dilaton-(p+1)-formではなさそう.
- Higher-Spin theoryの可能性.

Situations

- Low energy
- braneは遠距離.
- braneはほぼ平行

Assumptions

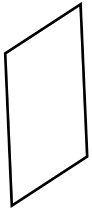
- tension-lessでない.
- 通常の運動項
- 並進不変性
- 微分展開可能
- スケール不変
- Xが次元を決める.
- 電磁双対性
- nは双対で共通

まとめ

★ まとめ

D次元

p-brane



超対称性 (or 超重力)

11次元の膜 (M理論)

10次元の弦 (超弦理論)

スケール不変性

電磁双対性

超対称性

↓

11次元 M2/M5膜の理論

self-dual brane理論 (例 D3 in IIB)

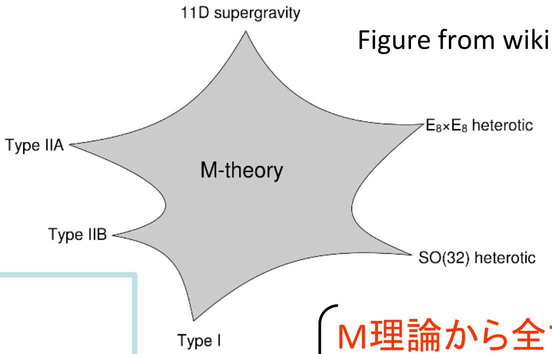


Figure from wikipedia

M理論から全ての超弦は導かれる.

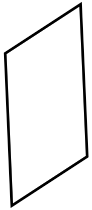
- IRの物理で次元が制限される.
- 量子論をほぼ使っていない.
  ・次元解析→$\hbar$ を仮定 (「質量」と「長さ」を結ぶ定数)

  → 理論体系の詳細に依らない強い結論

★ まとめ

D次元

p-brane



超対称性 (or 超重力)

11次元の膜 (M理論)

10次元の弦 (超弦理論)

スケール不変性

電磁双対性

11次元 M2/M5膜の理論

self-dual brane理論 (例 D3 in IIB)

超対称性

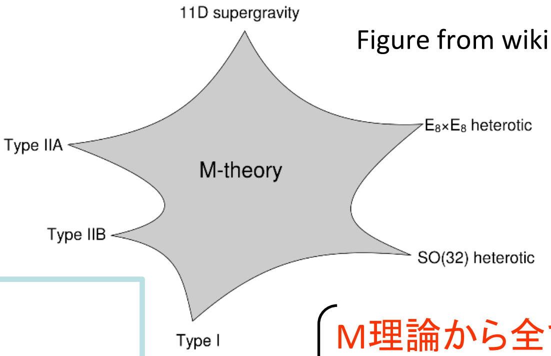


Figure from wikipedia

M理論から全ての超弦は導かれる.

今後の展望

- self-dual解で n≧3の物理的意味
- なぜスケール不変&電磁双対?
- 超対称性の起源?