ダブルシャッフル群の BETTI 類似
(B. ENRIQUEZ 氏との共同研究)

古庄　英和

近年 Enriquez 氏とダブルシャッフル関係式の Betti 版について共同研究 [EF1, EF2, EF3] を行っている。この報告では主に Part II, III ([EF2, EF3]) について報告する。Part I ([EF1]) については [E] で解説されている。

1. ダブルシャッフル群の復習

この節では Racinet [R] によるダブルシャッフル群の定義を復習する。まず以下の記号を準備する。

$\mathbb{K}$ を標数 0 の体とする。$\mathcal{V}_{\mathrm{DR}}$ を二変数 e_0, e_1 の非可換多項式 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{K}\langle e_0, e_1\rangle$ とする。$\Delta_{\sqcup\!\sqcup}^{\mathrm{DR}}(e_i) = e_i \otimes 1 + 1 \otimes e_i$ $(i = 0, 1)$ で定まる余積 $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}^{\mathrm{DR}} : \mathcal{V}_{\mathrm{DR}} \to \mathcal{V}_{\mathrm{DR}}^{\otimes 2}$ により $\mathcal{V}_{\mathrm{DR}}$ にはホップ代数の構造が入る。この $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}^{\mathrm{DR}}$ をシャッフル余積と呼ぶことにする。

$\mathcal{M}_{\mathrm{DR}}$ を $\mathbb{K}$-線型商空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{DR}}/\mathcal{V}_{\mathrm{DR}}e_0$ とする。線型空間 $\mathcal{M}_{\mathrm{DR}}$ は無限生成非可換多項式 $\mathbb{K}$-代数 $\mathbb{K}\langle y_1, y_2, y_3 \dots, \rangle$ と対応 $e_0^{k-1}e_1 \mapsto -y_k$ $(k = 1, 2, 3, \dots)$ により線形同型となる。$y_0 = 1$ とおくと対応 $y_k \mapsto \sum_{i=0}^{k} y_i \otimes y_{k-i}$ $(k = 0, 1, 2, \dots)$ で定まる余積 $\Delta_*^{\mathrm{DR}} : \mathcal{M}_{\mathrm{DR}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{DR}}^{\otimes 2}$ により $\mathcal{M}_{\mathrm{DR}}$ にはホップ代数の構造が入る。この Δ_*^{DR} を調和余積と呼ぶことにする。

定義により全射な線型写像 $\pi_{\mathrm{DR}} : \mathcal{V}_{\mathrm{DR}} \twoheadrightarrow \mathcal{M}_{\mathrm{DR}}$ が存在するがこれはホップ代数の準同型ではないことに注意しておく。

$\hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{DR}}$ を $\mathcal{V}_{\mathrm{DR}}$ の次数による完備化、$\hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{DR}}^{\times}$ を可逆元のなす群とする。$g \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{DR}}$ に対して, 各語 W の係数を $(g|W) \in \mathbb{K}$ と記すことにする。ダブルシャッフル群 DS_0 は以下で定義される。

Definition 1 ([R])**.** DS_0 は以下の 4 条件を満たす $\varphi \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{DR}}^{\times}$ の集合として定義される:

$$\begin{aligned}
&\hat{\Delta}_{\sqcup\!\sqcup}^{\mathrm{DR}}(\varphi) = \varphi \hat{\otimes} \varphi, \\
&\hat{\Delta}_*^{\mathrm{DR}}(\varphi_*) = \varphi_* \hat{\otimes} \varphi_*, \\
&(\varphi|e_0) = (\varphi|e_1) = 0, \\
&(\varphi|e_0 e_1) = 0.
\end{aligned}$$

Date: 2021 年 11 月 29 日.

2021 年早稲田整数論研究集会報告集.

本研究は JSPS 科研費 (基盤 (B) 課題番号 JP18H01110) の助成を受けております.

ここで

$$\varphi_* := \pi_{\mathrm{DR}}(\Gamma_\varphi(-e_1)^{-1}\cdot\varphi) \in \hat{\mathcal{M}}_{\mathrm{DR}},$$
$$\Gamma_\varphi(e_1) := \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\varphi|e_0^{n-1}e_1)e_1^n\right\} \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{DR}}^{\times}$$

としている。DS_1 を 4 番目の条件式を $(\varphi|e_0e_1)=\frac{1}{24}$ で置き換えた集合とする。[1]

上の定義における 1 番目と 2 番目の式は多重ゼータ値のシャッフル積と調和積に対応している。これより KZ 方程式の正規化ホロノミーとして定義される KZ アソシエーター $\varphi_{\mathrm{KZ}}(e_0,e_1)$ が DS_1 に属すことが従う (cf. [Z])。

$\varphi_1,\varphi_2\in\hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{DR}}^{\times}$ に対して

$$\varphi_1 \circledast \varphi_2 := \varphi_1(e_0,e_1)\cdot\varphi_2(e_0,\varphi_1^{-1}e_1\varphi_1) \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{DR}}^{\times}$$

と定める。

Theorem 2 ([R]).
- 上の $\circledast$ により DS_0 は群をなす。そして群 DS_0 は集合 DS_1 に左作用する。
- さらに DS_1 は左 DS_0-*torsor* をなす。

2. ダブルシャッフル群の Betti 版

前節での定義を基にしたダブルシャッフル群の Betti 類似の構成を紹介する。

$\mathcal{V}_{\mathrm{B}}$ を 2 変数 X_0, X_1 で生成された自由群 F_2 の群環 $\mathbb{K}[F_2]$ とする。$\Delta_{\sqcup\!\sqcup}^{\mathrm{B}}(X_i)=X_i\otimes X_i$ $(i=0,1)$ で定まる余積 $\Delta_{\sqcup\!\sqcup}^{\mathrm{B}}:\mathcal{V}_{\mathrm{B}}\to\mathcal{V}_{\mathrm{B}}^{\otimes 2}$ により $\mathcal{V}_{\mathrm{B}}$ にはホップ代数の構造が入る。この $\Delta_{\mathrm{B}}^{\sqcup\!\sqcup}$ がシャッフル余積 $\Delta_{\mathrm{DR}}^{\sqcup\!\sqcup}$ の Betti 版である。

Theorem-Definition 3 ([EF1]). $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}$ を $\mathbb{K}$-線型商空間 $\mathcal{V}_{\mathrm{B}}/\mathcal{V}_{\mathrm{B}}(X_0-1)$ とする。対応 $X_1^{\pm1}\mapsto X_1^{\pm1}\otimes X_1^{\pm1}$, $Y_k^{\pm}\mapsto\sum_{i=0}^{k}Y_i\otimes Y_{k-i}$ $(k=0,1,2,\dots)$ で定まる余積 $\Delta_*^{\mathrm{B}}:\mathcal{M}_{\mathrm{B}}\to\mathcal{M}_{\mathrm{B}}^{\otimes 2}$ により $\mathcal{M}_{\mathrm{B}}$ にはホップ代数の構造が入る。この Δ_*^{B} が調和余積 Δ_*^{DR} の Betti 類似である。ここで $Y_0=1$, $Y_n^{\pm}=(X_0^{\pm1}-1)^{n-1}X_0^{\pm1}(1-X_1^{\pm1})$ としている。

定義により全射な線型写像 $\pi_{\mathrm{B}}:\mathcal{V}_{\mathrm{B}}\twoheadrightarrow\mathcal{M}_{\mathrm{B}}$ が存在するがこれもホップ代数の準同型ではない。

$\hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{B}}$ を $\mathcal{V}_{\mathrm{B}}$ の次数による完備化、$\hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{B}}^{\times}$ を可逆元のなす群とする。

[1] 論文 [R] では DS ではなく DMR の記号が使われている。これは double mélange regularisé を表している。

Definition 4 ([EF3])**.** $\mathrm{DS}_0^{\mathrm{B}}$ は以下の 4 条件を満たす $g \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{B}}^{\times}$ の集合として定義される:

$$\begin{aligned}
&\hat{\Delta}_{\sqcup\!\sqcup}^{\mathrm{B}}(g) = g\hat{\otimes}g,\\
&\hat{\Delta}_{*}^{\mathrm{B}}(g_*) = g_*\hat{\otimes}g_*,\\
&(g|A) = (g|B) = 0,\\
&(g|AB) = 0.
\end{aligned}$$

ここで $X_0 \mapsto \exp A,\ X_1 \mapsto \exp B$ により $\hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{B}} \simeq \mathbb{K}\langle\langle A, B\rangle\rangle$ と同一視をしており、

$$\begin{aligned}
&g_* := \pi_{\mathrm{B}}(\Gamma_g(-B)^{-1}\cdot g) \in \hat{\mathcal{M}}_{\mathrm{B}},\\
&\Gamma_g(B) := \exp\left\{\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(g|A^{n-1}B)B^n\right\} \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{B}}^{\times}
\end{aligned}$$

としている。

この $\mathrm{DS}_0^{\mathrm{B}}$ がダブルシャッフル群の Betti 版であり、以下が成り立っている。

Theorem 5 ([EF3])**.**

- $g_1, g_2 \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{B}}^{\times}$ に対して
$$g_1 \circledast_{\mathrm{B}} g_2 := g_1(X_0, X_1)\cdot g_2(X_0, g_1^{-1}X_1g_1) \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{B}}^{\times}$$
と定めると、この演算により $\mathrm{DS}_0^{\mathrm{B}}$ は群をなす。
- $\varphi \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{DR}}^{\times},\ g \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{B}}^{\times}$ に対して
$$\varphi \circledast g := \varphi(e_0, e_1) \circledast g(\exp e_0, \exp e_1) \in \hat{\mathcal{V}}_{\mathrm{DR}}^{\times}$$
と定めると、この演算により DS_1 は右 $\mathrm{DS}_0^{\mathrm{B}}$-*torosor* をなす。さらに、これより DS_1 には $(\mathrm{DS}_0, \mathrm{DS}_0^{\mathrm{B}})$-*bitorsor* の構造が入る。

自然に DS_0 には次数付けが与えられ、DS_1 と $\mathrm{DS}_0^{\mathrm{B}}$ には重みフィルトレーション W が入る。これらは bitorsor の構造と両立しており標準的な同一視

$$\mathrm{DS}_0 \simeq \mathrm{gr}^W\mathrm{DS}_1 \simeq \mathrm{gr}^W\mathrm{DS}_0^{\mathrm{B}}$$

が存する。

3. 他の BITORSORS との関係

Drinfeld は [Dr] において $(\mathrm{GRT}_1, \mathrm{GT}_1)$-bitorsor M_1 を導入している。GT_1 は Grothendieck-Teichmüller 群、GRT_1 は次数付き Grothendieck-Teichmüller 群、M_1 はアソシエーターの集合である (正確な定義等は [F1, FKN] も参照されたい)。

Theorem 6 ([EF2, EF3])**.** $(\mathrm{GRT}_1, \mathrm{GT}_1)$-*bitorsor* M_1 から $(\mathrm{DS}_0, \mathrm{DS}_0^{\mathrm{B}})$-*bitorsor* DS_1 への *bitorsor* の埋め込みが存在する。

アソシエーターの関係式よりダブルシャッフル関係式が従うことは既に [F2] で bar 複体の議論を用いて示されているが、[EF1, EF2, EF3] での証明は調和余積の幾何学的解釈 [EF1] を与えることにより示されている。この議論は [DT] の未完の議論を補っている証明ともいえる。

一方で、不分岐混合 Tate モティーフがなす $\mathbb{Q}$-線形淡中圏 $\mathcal{M} = \mathcal{MT}(\mathbb{Z})_{\mathbb{Q}}$ において Betti 実現と de Rham 実現より定まるファイバー関手 $\mathrm{real}_{\mathrm{B}}$ と $\mathrm{real}_{\mathrm{DR}}$ を考えることにより定まる $(\mathrm{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{Z})_1, \mathrm{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathrm{B}}(\mathbb{Z})_1)$-bitorsor $\mathrm{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathrm{DR,B}}(\mathbb{Z})_1$ が [DG] で考察されている (cf. [A])。ここで $\mathrm{Gal}^{\mathcal{M}}_{\omega}(\mathbb{Z})_1$ ($\omega = \mathrm{B}, \mathrm{DR}$) はモチヴィックガロア群 $\mathrm{Aut}^{\otimes}_{\mathcal{M}}(\mathrm{real}_{\omega})$ の unipotent part である。この bitorsor $\mathrm{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathrm{DR,B}}(\mathbb{Z})_1$ から bitorsor M_1 へは自然に準同型があるが、これが単射であることが Brown [B] の結果より従う。

これより以下の bitorsor の埋め込みが在ることになる:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\text{de Rham side}} & \mathrm{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathrm{DR}}(\mathbb{Z})_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, bend left] & \mathrm{GRT}(\mathbb{K})_1 \arrow[r, hook] \arrow[d, bend left] & \mathrm{DS}_0 \arrow[d, bend left] \\
\underline{\text{de Rham-Betti side}} & \mathrm{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathrm{DR,B}}(\mathbb{Z})_1 \arrow[r, hook] \arrow[u, bend left] \arrow[d, bend right] & M(\mathbb{K})_1 \arrow[r, hook] \arrow[u, bend left] \arrow[d, bend right] & \mathrm{DS}_1 \arrow[u, bend left] \arrow[d, bend right] \\
\underline{\text{Betti side}} & \mathrm{Gal}^{\mathcal{M}}_{\mathrm{B}}(\mathbb{Z})_1 \arrow[r, hook] & \mathrm{GT}(\mathbb{K})_1 \arrow[r, hook] & \mathrm{DS}^{\mathrm{B}}_0 \arrow[u, bend right]
\end{tikzcd}$$

上の 6 つの埋め込み $\hookrightarrow$ は全て同型であることが予想されている (cf. [F3])。

References

[A] Y. André, *Une introduction aux motifs (motifs purs, motifs mixtes, périodes).* Panoramas et Synthèses, **17**, Société Mathématique de France, Paris, 2004.

[B] F. Brown, *Mixed Tate Motives over* $\mathbb{Z}$, Annals of Math., **175**, no. 2 (2012), 949–976.

[DG] P. Deligne, A. Goncharov, *Groupes fondamentaux motiviques de Tate mixte*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) **38** (2005), no. 1, 1–56.

[DT] P. Deligne, T. Terasoma, *Harmonic shuffle relation for associators*, preprint (2005).

[Dr] V. Drinfeld, *On quasitriangular quasi-Hopf algebras and on a group that is closely connected with* $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$, Leningrad Math. J. 2 (1991), no. 4, 829–860.

[E] B. Enriquez, *The Betti side of the double shuffle theory: a survey*, `arXiv:2007.06197`, 数理解析研究所講究録 No.**2160**, RIMS 共同研究（公開型）報告集多重ゼータ値の諸相 2019 年 11 月.

[EF1] B. Enriquez, H. Furusho, *The Betti side of the double shuffle theory. I. The harmonic coproducts*, `arXiv:1803.10151v5`, to appear in Selecta. Math.

[EF2] B. Enriquez, H. Furusho, *The Betti side of the double shuffle theory. II. Torsor structures*, `arXiv:1807.07786`.

[EF3] B. Enriquez, H. Furusho, *The Betti side of the double shuffle theory. III. Bitorsor structures*, `arXiv:1908.00444`.

[F1] H. Furusho, *Pentagon and hexagon equations*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no. 1, 545–556.

[F2] H. Furusho, *Double shuffle relation for associators*, Ann. of Math. (1) **174** (2011), no. 1, 341–360.

[F3] H. Furusho, *Around associators*, Automorphic forms and Galois representations, 2, 105-117, London Math.Soc. Lecture Note Ser. **415** (2014), Cambridge Univ. Press, Cambridge.

[FKN] 古庄英和 (著) ; 小谷久寿, 新甫洋史 (述) ; 結び目と Grothendieck-Teichmüller 群, MI lecture note series, vol. **68**, 九州大学マス・フォア・インダストリ研究所 2016 年 2 月.

[R] G. Racinet, *Doubles mélanges des polylogarithmes multiples aux racines de l'unité*, Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. No. **95** (2002), 185–231.

[Z] J. Q. Zhao, *Multiple zeta functions, multiple polylogarithms and their special values*, Series on Number Theory and its Applications, **12**, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Hackensack, NJ, 2016.

〒 464-8602 名古屋市千種区不老町名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Email address: `furusho@math.nagoya-u.ac.jp`