正標数多重ポリログ関数の解析接続

古庄　英和

正標数関数体の世界においてポリログ関数や多重ポリログ関数の類似が [AT90, C] により考察されている。これらの関数は冪級数で定義されており、その級数の収束半径内でしか関数として定義されていない。これらの関数を Artin-Schreier 方程式を用いて全空間に解析接続していく [F22] の手法を説明する。

1. 標数 0 のポリログ関数の復習

複素数体 $\mathbb{C}$ の場合と p-進 (p: 素数) の場合のポリログ関数の解析接続について手短かに復習する。

1.1. $\mathbb{C}$ の場合. $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}$ とする。ポリログ関数 $\mathrm{Li}_n(z)$ とは以下の冪級数で定義される複素関数である：

$$\mathrm{Li}_n(z) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k^n}$$

この級数は $z \in \mathbb{C}$ が $|z| < 1$ のとき絶対収束するが以下の逐次微分方程式

$$\frac{d}{dz}\mathrm{Li}_n(z) = \begin{cases} \frac{1}{z}\mathrm{Li}_{n-1}(z) & (n \geq 1) \\ \frac{1}{1-z} & (n = 1) \end{cases}$$

を反復積分を用いて逆算することにより半径 1 の開円盤を超えてポリログ関数の解析接続ができる。詳しくには $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\}$ の普遍被覆まで定義域を広げられて、これよりポリログ関数 $\mathrm{Li}_n(z)$ の枝が生じるのである。また、特に $\mathrm{Li}_1(z) = -\log(1-z)$ であることにも注意しておく。

1.2. p-進の場合. $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}_p$ とする ($\mathbb{C}_p$ は有理数体 $\mathbb{Q}$ の代数閉包 $\bar{\mathbb{Q}}$ の p 進距離による完備化のことである)。p 進ポリログ関数は上の $\mathrm{Li}_n(z)$ と同じ冪級数で定義される p-進関数であり、この級数は半径 1 の p-進開円盤内で収束する。p 進ポリログ関数も上と同じ逐次微分方程式を満たしており、これを用いて半径 1 の p-進開円盤を超えての “解析接続” ができる。ここで使われるのは Coleman の p-進反復積分論 ([Co]) であり、定義域は $\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus \{1, \infty\}$ まで広げられる。そもそもこの Coleman

Date: 2023 年 12 月 10 日.
2023 年度代数学シンポジウム報告集原稿.

の p-進反復積分論は p-進対数 $\log : \mathbb{C}_p^\times \to \mathbb{C}_p^+$ の枝の取り方 (即ち、値 $\log(p) \in \mathbb{C}_p$ の決め方) に依存しているため、それに応じて解析接続された p 進ポリログ関数 $\mathrm{Li}_n(z)$ も p-進対数の枝の取り方に応じて関数として変わっていくことを注意しておく (cf. [Co, F04])。

2. 正標数の場合

q を素数 p の冪, $\mathbb{F}_q$ を位数 q の有限体, A を 1 変数多項式環 $\mathbb{F}_q[\theta]$, K を 1 変数有理関数体 $\mathbb{F}_q(\theta)$(すなわち A の商体), K_∞ を $\mathbb{F}_q((\frac{1}{\theta}))$ (K の無限素点 ∞ の定める距離 $|\cdot|_\infty$ による完備化), $\mathbb{C}_\infty$ を K_∞ の代数閉包 $\bar{\mathrm{K}}_\infty$ の無限素点による完備化とする。

2.1. **ポリログ関数.** $n \in \mathbb{N}$, $z \in \mathbb{C}_\infty$ とする。**Carlitz ポリログ関数**とは [AT90] で考察されている正標数の世界でのポリログ関数の類似物であり以下の冪級数で定義される:

$$\mathrm{Li}_n(z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{q^k}}{(L_k)^n}$$

(ただし $L_k := (\theta - \theta^q) \cdots (\theta - \theta^{q^k}) \in A$ である。) この冪級数は開単位円盤を含む領域 $D_n := \{z \in \mathbb{C}_\infty \mid |z|_\infty < |\theta|_\infty^{\frac{nq}{q-1}}\}$ で収束する。

$n \in \mathbb{N}$, $Z \in \mathbb{T}$ とする。ここで $\mathbb{T}$ とは Tate 代数、$|t|_\infty \leqslant 1$ で収束する形式的冪級数 $f = \sum a_i t^i \in \mathbb{C}_\infty[[t]]$ 全体のなす代数に Gauss ノルム $||f||_\infty := \max_i\{|a_i|_\infty\}$ を入れたノルム付き代数のことである。[P, C] で考察されているいわゆる **t-motivic ポリログ関数**は以下の冪級数で定義される:

$$\mathfrak{Li}_n(Z) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{Z^{(k)}}{(\mathbb{L}_k)^n}$$

(ここで $\mathbb{L}_k = (t - \theta^q) \cdots (t - \theta^{q^k}) \in K[t]$ とおいている。また $k \in \mathbb{Z}$, $f = \sum_i a_i t^i$ に対して Frobenius 捻り $f^{(k)}$ は $f^{(k)} := \sum_i a_i^{q^k} t^i$ で定義される。) この冪級数は $\mathbb{D}_n := \{Z \in \mathbb{T} \mid ||Z||_\infty < |\theta|_\infty^{\frac{nq}{q-1}}\}$ 内で収束する。特に $Z = z \in D_n \subset \mathbb{C}_\infty$ のとき $t = \theta$ を代入すると

$$\mathfrak{Li}_n(z)|_{t=\theta} = \mathrm{Li}_n(z)$$

となることに注意する。

2.2. **解析接続の第一ステップ.** $n = 0$ の場合の t-motivic ポリログ関数

$$\mathfrak{Li}_0(Z) := \sum_{k=0}^{\infty} Z^{(k)} \qquad (Z \in \mathbb{D}_0)$$

を考える。この関数は $Z \in \mathbb{D}_0$ に対して以下の Artin-Schreier 方程式を満たすことに注目する：

$$\mathfrak{Li}_0(Z) - \mathfrak{Li}_0(Z)^{(1)} = Z$$

これを受け $\mathbb{F}_q[t]$-線型写像

$$\wp : \mathbb{T} \to \mathbb{T}\ ; \quad f \mapsto f - f^{(1)}$$

を考える。この写像 $\wp$ は全射でありかつ $\ker \wp = \mathbb{F}_q[t]$ であることに留意する。これより、本来 $\mathfrak{Li}_0(Z)$ は $Z \in \mathbb{D}_0$ に対して定義されていたが以下のようにして (値域は $\mathbb{T}/\mathbb{F}_q[t]$ になってしまうが) 定義域を $\mathbb{T}$ までに広げられる:

$$\mathfrak{Li}_0 : \mathbb{T} \to \mathbb{T}/\mathbb{F}_q[t]\ ; \quad Z \mapsto \wp^{-1}(Z).$$

また $\mathbb{T}_\infty (\subset \mathbb{T})$ を収束半径無限大の冪級数のなす代数とすると, そこへの制限は

$$\mathfrak{Li}_0|_{\mathbb{T}_\infty} : \mathbb{T}_\infty \to \mathbb{T}_\infty/\mathbb{F}_q[t]$$

を定める。

2.3. **解析接続の第二ステップ.** 以下の冪級数

$$\Omega = \Omega(t) := (-\theta)^{\frac{-q}{q-1}} \prod_{i=1}^{\infty} (1 - \frac{t}{\theta^{q^i}}) \in \mathbb{C}_\infty[[t]]$$

が [AT90, T] において考察されている。この冪級数は $\mathbb{T}_\infty$ に属しており

$$\Omega^{(-1)}(t) = (t - \theta)\Omega(t)$$

を満たしている。特殊値 $\tilde{\pi} := \frac{1}{\Omega(\theta)} \in \mathbb{C}_\infty$ は Carlitz 加群の周期を与え $2\pi\sqrt{-1}$ の正標数類似物と考えられている。$Z \in \mathbb{D}_n$ のときに

$$\mathfrak{Li}_n(Z) = \Omega^{-n} \cdot \mathfrak{Li}_0(\Omega^n Z)$$

が成り立つことに着目する。本来 $\mathfrak{Li}_n(Z)$ は $Z \in \mathbb{D}_n$ に対して定義されていたが以下のようにして定義域を $\mathbb{T}$ までに広げることができる:

$$\mathfrak{Li}_n : \mathbb{T} \to \Omega^{-n}\mathbb{T}/\Omega^{-n}\mathbb{F}_q[t]\ ; \quad Z \mapsto \Omega^{-n}\mathfrak{Li}_0(\Omega^n Z).$$

特に $\mathbb{T}_\infty$ への制限は

$$\mathfrak{Li}_n : \mathbb{T}_\infty \to \Omega^{-n}\mathbb{T}_\infty/\Omega^{-n}\mathbb{F}_q[t]$$

を定める。これに自然な埋め込み $\mathbb{C}_\infty \hookrightarrow \mathbb{T}_\infty$ と特殊化写像 $\mathbb{T}_\infty/\Omega^{-n}\mathbb{F}_q[t] \to \mathbb{C}_\infty/\tilde{\pi}^n A$ を繋げることにより

$$\vec{\mathrm{Li}}_n : \mathbb{C}_\infty \hookrightarrow \mathbb{T}_\infty \to \Omega^{-n}\mathbb{T}_\infty/\Omega^{-n}\mathbb{F}_q[t] \to \mathbb{C}_\infty/\tilde{\pi}^n A$$

が定まる。これが $\mathrm{Li}_n(z)$ の解析接続である。

Theorem 1 ([F22])**.** $\vec{\mathrm{Li}}_n$ は局所解析的であり、$z \in \mathbb{D}_n$ のとき

$$\vec{\mathrm{Li}}_n(z) \equiv \mathrm{Li}_n(z) \mod \tilde{\pi}^n A$$

が成り立つ。

各 $z \in \mathbb{C}_\infty$ に対して $\vec{\mathrm{Li}}_n(z) \in \mathbb{C}_\infty/\tilde{\pi}^n A$ の $\mathbb{C}_\infty$ への持ち上げ $\mathrm{Li}_n^o(z)$ を $\vec{\mathrm{Li}}_n(z)$ の枝と呼び、また $\tilde{\pi}^n A$ を $\vec{\mathrm{Li}}_n(z)$ のモノドロミー加群と呼ぶことにする。

$\mathbb{C}$ の場合では $\mathrm{Li}_n^o(z)$ と $\mathrm{Li}_n^{o'}(z)$ を複素ポリログ関数 $\mathrm{Li}_n(z)$ の二つの枝とした時, この二つの枝の差は

$$\mathrm{Li}_n^o(z) - \mathrm{Li}_n^{o'}(z) = \sum_{p+q+r=n} c_{p,q,r}(2\pi\sqrt{-1})^p \zeta(q)(\log z)^r \qquad (c_{p,q,r} \in \mathbb{Q})$$

とかけるので正標数の場合では少々状況が異なることが観察される。

2.4. **多重ポリログ関数.** $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$, $z_1, \ldots, z_d \in \mathbb{C}_\infty$ とする。[C, CM] では Carlitz ポリログ関数の多重化である以下の冪級数で定義される多変数関数が考察されている：

$$\mathrm{Li}_{n_1,\ldots,n_d}(z_1, \ldots, z_d) = \sum_{0 \leqslant k_1 < \cdots < k_d} \frac{z_1^{q^{k_1}} \cdots z_d^{q^{k_d}}}{L_{k_1}^{n_1} \cdots L_{k_d}^{n_d}}$$

この冪級数は

$$\mathbb{D}_{n_1,\ldots,n_d} = \left\{ (z_i) \in \mathbb{C}_\infty^d \;\middle|\; |z_1/\theta^{\frac{qn_1}{q-1}}|_\infty^{q^{i_1}} \cdots |z_d/\theta^{\frac{qn_d}{q-1}}|_\infty^{q^{i_d}} \to 0 \ (0 \leqslant i_1 < \cdots < i_d \to \infty) \right\}$$

内で収束する。上で説明した Carlitz ポリログ関数の解析接続法と同様の議論を行うことで Carlitz 多重ポリログ関数は（1 変数関数として）解析接続が行える：

Theorem 2 ([F22])**.** $n_1, \ldots, n_d \in \mathbb{N}$ とする。$z_1, \ldots, z_{d-1} \in \mathbb{C}_\infty$ を固定する。局所解析的な $\mathbb{F}_q$-線型写像

$$\vec{\mathrm{Li}}_{n_1,\ldots,n_d}(z_1, \ldots, z_{d-1}, -) : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty^d / M_{n_1,\ldots,n_d}^{z_1,\ldots,z_{d-1}}$$

で $(z_1, \ldots, z_d) \in \mathbb{D}_{n_1,\ldots,n_d}$ のとき

$$\vec{\mathrm{Li}}_{n_1,\ldots,n_d}(z_1, \ldots, z_{d-1}, z_d) \equiv \begin{pmatrix} \tilde{\pi}^{n_1+\cdots+n_{d-1}} \mathrm{Li}_{n_d}(z_d) \\ \vdots \\ \tilde{\pi}^{n_1} \mathrm{Li}_{n_2,\ldots,n_d}(z_2, \ldots, z_d) \\ \mathrm{Li}_{n_1,\ldots,n_d}(z_1, \ldots, z_d) \end{pmatrix} \mod M_{n_1,\ldots,n_d}^{z_1,\ldots,z_{d-1}}$$

がある。ここで $M_{n_1,\ldots,n_d}^{z_1,\ldots,z_{d-1}}$ は

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{\pi}^{n_d} M_{n_1,\ldots,n_{d-1}}^{z_1,\ldots,z_{d-2}} \end{pmatrix} \qquad と \qquad \tilde{\pi}^{n_d} \begin{pmatrix} \tilde{\pi}^{n_1+\cdots+n_{d-1}} \\ \vec{\mathrm{Li}}_{n_1,\ldots,n_d}(z_1, \ldots, z_{d-1}) \end{pmatrix}$$

で生成される $\mathbb{C}_\infty^d$ の部分 A-加群として帰納的に定義される。

$\vec{\mathrm{Li}}_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},z_d) \in \mathbb{C}_\infty^d/M_{n_1,\dots,n_d}^{z_1,\dots,z_{d-1}}$ の $\mathbb{C}_\infty^d$ への持ち上げ $\vec{\mathrm{Li}}^o_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},z_d) \in \mathbb{C}_\infty^d$ の最後の成分 $\mathrm{Li}^o_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},z_d)$ を $\mathrm{Li}_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},z_d)$ の枝と呼び $M_{n_1,\dots,n_d}^{z_1,\dots,z_{d-1}}$ をモノドロミー加群と呼ぶ。

Carlitz 多重ポリログ関数のスター版

$$\mathrm{Li}^\star_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_d) = \sum_{0\leqslant k_1\leqslant\cdots\leqslant k_d} \frac{z_1^{q^{k_1}}\cdots z_d^{q^{k_d}}}{L_{k_1}^{n_1}\cdots L_{k_d}^{n_d}}$$

に関しても同様の解析接続

$$\vec{\mathrm{Li}}^\star_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},-) : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty^d/M_{n_1,\dots,n_d}^{\star,z_1,\dots,z_{d-1}}$$

が [F22] で得られている。

2.5. **応用.** $n_1,\dots,n_d \in \mathbb{N}$, $z_1,\dots,z_d \in \mathbb{C}_\infty$ とする。枝 $\mathrm{Li}^o_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},z_d)$ が Eulerian であるとは $\mathrm{Li}^o_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},z_d)/\tilde{\pi}^{n_1+\cdots+n_d} \in K$ が成り立つこととする。この時以下が成り立つ:

Theorem 3 ([F22])**.** *$n_1,\dots,n_d \in \mathbb{N}$, $z_1,\dots,z_d \in \bar{K}$ ($\bar{K}$ は K の代数的閉包) とする。このとき一つの枝 $\mathrm{Li}^o_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},z_d)$ が Eulerian であると他の枝 $\mathrm{Li}^{o'}_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},z_d)$ も Eulerian になる。*

Proof. 以下の二つの議論を組み合わせることにより示せる。

- [CPY] と同様の議論を行うことにより $\mathrm{Li}^o_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},z_d)$ が Eulerian であると $\mathrm{Li}^o_{n_1,\dots,n_i}(z_1,\dots,z_{i-1},z_i)$ $(1 \leqslant i < d)$ も Eulerian であることが従う。
- 二つの枝の差 $\mathrm{Li}^{o'}_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},z_d) - \mathrm{Li}^o_{n_1,\dots,n_d}(z_1,\dots,z_{d-1},z_d)$ はある $\alpha_i \in A$ $(0 \leqslant i < d)$ を用いて $\sum_{i=0}^{d-1} \alpha_i \cdot \tilde{\pi}^{n_{i+1}+\cdots+n_d} \mathrm{Li}^o_{n_1,\dots,n_i}(z_1,\dots,z_i)$ とかける。

□

また上の定理は Carlitz 多重ポリログ関数のスター版でも同じ結果が成り立つことも [F22] で示されている。

2023 年度代数学シンポジウムにて講演の機会をいただきました愛媛大学の山崎義徳氏及びこの原稿についてコメントをしてくれました三柴善範氏に感謝いたします。本研究は JSPS 科研費 JP18H01110, JP20H00115, JP21H00969, JP21H04430 の助成を受けております。

References

[AT90] Anderson, G.W. and Thakur, D.S., *Tensor powers of the Carlitz module and zeta values*, Ann. of Math. **132** (1990), 159–191.

[C] Chang, C.-Y., *Linear independence of monomials of multizeta values in positive characteristic*, Compositio Math. **150** (2014), 1789–1808.

[CM] Chang, C.-Y. and Mishiba, Y., *On multiple polylogarithms in characteristic p: v-adic vanishing versus ∞-adic Eulerianness,* Int. Math. Res. Notices. IMRN (2019), no. 3, 923–947.

[CPY] Chang, C.-Y., Papanikolas. M., and Yu, J, *An effective criterion for Eulerian multizeta values in positive characteristic*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS)**21** (2019) , no. 2, 405–440.

[Co] Coleman, R., *Dilogarithms, regulators and p-adic L-functions*, Invent. Math. **69** (1982), 171–208.

[F04] Furusho, H., *p-adic multiple zeta values. I. p-adic multiple polylogarithms and the p-adic KZ equation*, Invent. Math. **155** (2004), 253–286.

[F22] Furusho, H., *Analytic continuation of multiple polylogarithms in positive characteristic*, Tunisian. J. Math **4**-3 (2022), 559-586.

[P] Papanikolas, M. A., *Tannakian duality for Anderson-Drinfeld motives and algebraic independence of Carlitz logarithms*, Invent. Math. **171** (2008), no. 1, 123–174.

[T] Thakur, D.S., *Function field arithmetic*, World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ, 2004.

〒 464-8602 名古屋市千種区不老町名古屋大学大学院多元数理科学研究科
Email address: `furusho@math.nagoya-u.ac.jp`