2004年度 整数論サマースクール

Grothendieck-Teichmüller群

古庄英和(名大多元)

[Reference]

[1] Y. Ihara: Braids, Galois groups and some arithmetic functions, Proc of ICM (Kyoto 1990), pp 99-120

[2] Y. Ihara: On the embedding of $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ into $\widehat{GT}$, pp 289-321. London Math Soc, LNS 200, Cambridge Univ Press. 1994.

$$\begin{tikzcd}
G_{\mathbb{Q}} \arrow[d, equal] & & \hat{F}_2 \arrow[d, equal] \\
\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q}) \arrow[rr, hook, "\mathrm{Bel}_{\chi,\tau}"] \arrow[dd, hook] & & \mathrm{Aut}\, \hat{\pi}_1(\mathbb{P}^1_{\overline{\mathbb{Q}}} \setminus \{0,1,\infty\}, \vec{01}) \arrow[dd, hook] \\
 & & \\
\hat{GT} := \left\{ \sigma \in \mathrm{Aut}\,\hat{F}_2 \;\middle|\; \begin{array}{l} \exists_1 \lambda_\sigma \in \hat{\mathbb{Z}}^\times,\ \exists_1 f_\sigma \in [\hat{F}_2, \hat{F}_2] \\ \text{s.t.} \quad \sigma(x) = x^{\lambda_\sigma} \\ \qquad\quad \sigma(y) = f_\sigma^{-1} y^{\lambda_\sigma} f_\sigma \\ \text{そして } (\lambda_\sigma, f_\sigma) \text{ は} \\ \quad \text{2-cycle relation} \\ \quad \text{3-cycle relation} \\ \quad \text{5-cycle relation を満たす} \end{array} \right\} &
\end{tikzcd}$$

: Grothendieck-Teichmüller 群

(from Drinfel'd's paper '90)

<u>Conventions</u> ① うめこみ $\overline{\mathbb{Q}} \hookrightarrow \mathbb{C}$ を1つfixする。

② $\overline{\mathbb{Q}}\{\{t\}\} = \bigcup_{N \geq 1} \overline{\mathbb{Q}}((t^{\frac{1}{N}}))$ ：形式的Puiseux級数体

$\cup$

M ：$t = 0, 1, \infty$ の外で不分岐な最大ガロア拡大体

$\cup$

$\overline{\mathbb{Q}}(t)$

③ $F_2 = \pi_1(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, \infty\} : D_\varepsilon) = \langle x, y \rangle$

④ 各 $t^{\frac{1}{N}}$ $(N \geq 1)$ は開区間 $(0, 1)$ 上 $\mathbb{R}_+^\times$ に値をとるようにしておくと M の各元

$$h(t) = \sum_{\substack{i \in \mathbb{Z} \\ i \geq -n}} a_i t^{\frac{i}{N}} \quad (a_i \in \overline{\mathbb{Q}})$$

は単連結領域 D_ε 上の有理型関数と思える。

Prop

$$\begin{array}{ccc} F_2 & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(M/\overline{\mathbb{Q}}(t)) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \gamma & \longmapsto & (h \longmapsto \gamma(h)) \end{array}$$

hのγに沿った解析接続のこと

により 同型 $\hat{F}_2 \simeq \mathrm{Gal}(M/\overline{\mathbb{Q}}(t))$ が誘導される.

Conventions

① $\overline{\mathbb{Q}}\{\{1-t\}\}$

$\cup$

M' : $t=0,1,\infty$の外で不分岐な最大ガロア拡大体

$\cup$

$\overline{\mathbb{Q}}(t)$

② $\sigma \in G_{\mathbb{Q}} \rightsquigarrow \sigma_M \curvearrowright M$, $\sigma_{M'} \curvearrowright M'$

③ $$\begin{array}{ccc} P : M & \longrightarrow & M' \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ h & \longmapsto & P(h) \end{array}$$

$0 \xrightarrow{P} 1$ このパスPに沿った解析接続のこと

④ $f_\sigma := P^{-1} \cdot \sigma_{M'} \cdot P \cdot \sigma_M^{-1} \in \mathrm{Aut}\, M$

$$M \xrightarrow{\sigma_M^{-1}} M \xrightarrow{P} M' \xrightarrow{\sigma_{M'}} M' \xrightarrow{P^{-1}} M$$

$\rightsquigarrow$ $f_\sigma \in \hat{F}_2$ と思える.

Th 1 $f_\sigma \in [\hat{F}_2, \hat{F}_2]$

∵ $f_\sigma(t^{\frac{1}{n}}) = t^{\frac{1}{n}}$, $f_\sigma((1-t)^{\frac{1}{n}}) = (1-t)^{\frac{1}{n}}$. //

Th 2 $\begin{cases} \sigma(x) = x^{\chi(\sigma)} \\ \sigma(y) = f_\sigma^{-1} \cdot y^{\chi(\sigma)} \cdot f_\sigma \end{cases}$

∵ 素点 $M \longrightarrow \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\}$ を考える。

$$\begin{array}{ccc} M & \longrightarrow & \overline{\mathbb{Q}} \cup \{\infty\} \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \sum a_i t^{\frac{i}{n}} & \longmapsto & a_0 \end{array}$$

これの惰性群は $\langle x \rangle$ である。

これは $G_{\mathbb{Q}}$ の作用で安定なので $\sigma(x) = x^\lambda$ とかける

$\lambda = \chi(\sigma) \in \hat{\mathbb{Z}}^\times$ (χ：円分指標) である。

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\} & \longrightarrow & \mathbb{P}^1 \setminus \{0,1,\infty\} \\ t & \longmapsto & 1-t \end{array}$$

により誘導される π_1 間の射を θ とすると

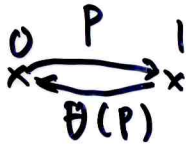
$y = P^{-1} \cdot \theta(x) \cdot P$ である。これに σ を作用させて

$\sigma(y) = \sigma(P)^{-1} \sigma(\theta(x)) \cdot \sigma(P)$ ($\sigma(P) = \sigma_{M'} \cdot P \cdot \sigma_M^{-1}$ のこと)

$= f_\sigma^{-1} \cdot P^{-1} \cdot \theta(\sigma(x)) \cdot P \cdot f_\sigma$

$= f_\sigma^{-1} \cdot y^{\chi(\sigma)} \cdot f_\sigma$ を得る。 //

Th3 ((2-cycle relation)) $f_\sigma(x,y)\,f_\sigma(y,x)=1$

∵ 

$\theta(x)=p\cdot y\cdot p^{-1}$, $\theta(y)=p\cdot x\cdot p^{-1}$

$\theta(p)\cdot p=1$ である.

これに σ を作用させることにより

$$1=\sigma(\theta(p)\cdot p)=\sigma(\theta(p))\cdot\sigma(p)=\theta(\sigma(p))\cdot\sigma(p)$$

$$=\theta(p\cdot f_\sigma)\cdot p\cdot f_\sigma=\theta(p)\cdot\theta(f_\sigma)\cdot p\cdot f_\sigma$$

$$=\theta(p)\cdot f_\sigma(\theta(x),\theta(y))\cdot p\cdot f_\sigma$$

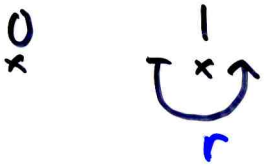
$$=\theta(p)\cdot p\cdot f_\sigma(y,x)\cdot p^{-1}\cdot p\cdot f_\sigma$$

$$=f_\sigma(y,x)\,f_\sigma(x,y).$$

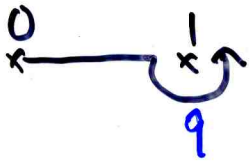
//

Th4 ((3-cycle relation)) $m=\frac{\chi(\sigma)-1}{2}$, $z=(xy)^{-1}$ とおくと

$$f_\sigma(z,x)\,z^m f_\sigma(y,z)\,y^m f_\sigma(z,y)\,x^m=1$$

∵ 

とおくと $r^{-1}\cdot\sigma(r)=\theta(x)^m$



$q:=r\cdot p$ とおくと

$$q^{-1}\sigma(q)=p^{-1}r^{-1}\sigma(r)\sigma(p)=p^{-1}\theta(x)^m\sigma(p)$$

$$=y^m p^{-1}\sigma(p)=y^m f_\sigma$$ となる.

$\mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\} \longrightarrow \mathbb{P}^1\setminus\{0,1,\infty\}$ より誘導されるπ_1間の

$$t \longmapsto \frac{1}{1-t}$$

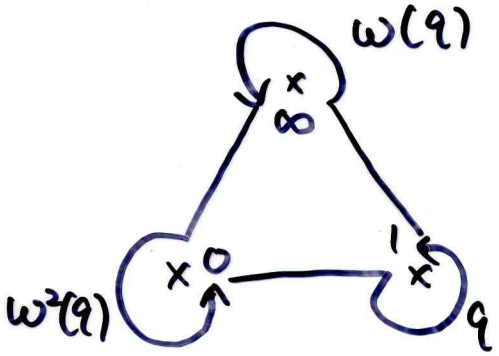
射を ω とすると

$$\omega(x) = q\,y\,q^{-1}, \quad \omega^2(x) = \omega(q)q\cdot z\cdot q^{-1}\omega(q)^{-1}$$

$$\omega(y) = q\,z\,q^{-1}, \quad \omega^2(y) = \omega(q)q\cdot x\cdot q^{-1}\omega(q)^{-1}$$

$$\omega(z) = q\,x\,q^{-1}, \quad \omega^2(z) = \omega(q)q\cdot y\cdot q^{-1}\omega(q)^{-1}$$

であり そして



$$\omega^2(q)\cdot\omega(q)\cdot q = 1$$

が成り立っている.

これに σ を作用させることにより

3-cycle relation が出せる. //

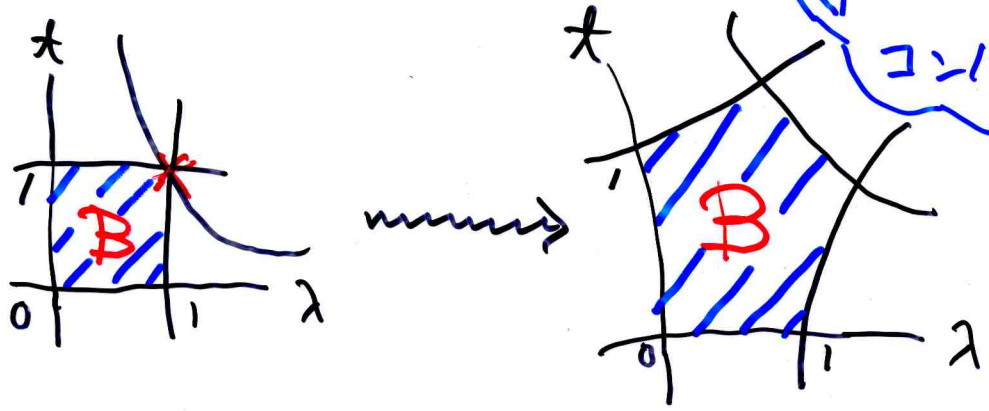
Conventions ① X を $\mathbb{P}^1$ 上の5点のモジュライ空間とする

$$X = \{(z_1, z_2, z_3, z_4, z_5) \in (\mathbb{P}^1)^5 \mid z_i \neq z_j \ (i \neq j)\} / PGL(2)$$

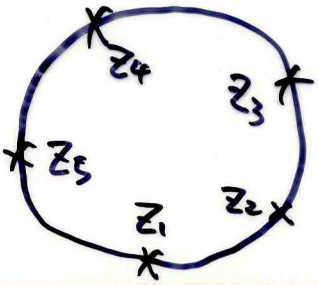
$$\wr \qquad \begin{array}{c} \Psi \\ (0, \lambda, 1, \frac{1}{t}, \infty) \\ \downarrow \\ (\lambda, t) \\ \cap \\ \{(\lambda, t) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \mid \lambda, t \neq 0, 1, \infty, \ \lambda t = 1\} \end{array}$$

② ここでは $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ を $(\lambda, t) = (\infty, 0), (0, \infty), (1, 1)$ 点で blow up したもの X^* に X をうめこんで考える.

これを X の点平等なコンパクト化という.

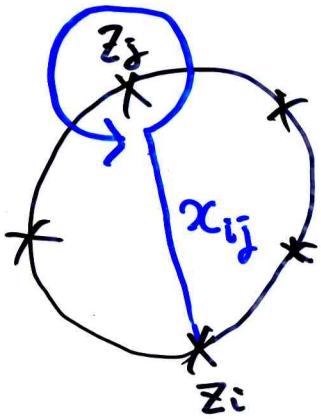


③ $B = \{(\lambda, t) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < \lambda, t < 1\} \subset X(\mathbb{C})$ とおく



$\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ に5点が並んでいるさま

④ $\pi_1(X(\mathbb{C}), B)$ は下の x_{ij} $(1 \leq i, j \leq 5)$ で生成され $\pi_1(X(\mathbb{C}), B) \simeq P_5^*$ と同一視される。



P_5 : 5本系純組紐群

$P_5^* = P_5 / \text{center}$

⑤ $\overline{\mathbb{Q}}\{\{x, y\}\} = \bigcup_{N \geq 1} \overline{\mathbb{Q}}[[x^{\frac{1}{N}}, y^{\frac{1}{N}}]][\frac{1}{x}, \frac{1}{y}]$

<u>Th 4</u> ([2] Prop 2.3)

$F : Y \longrightarrow X \in E_* X$ とする.

下の性質で一意に特徴付けられる全単射

$$\begin{array}{ccc} \pi_0(F_{\mathbb{C}}^{-1}(B)) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)}(\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \overline{\mathbb{Q}}\{\{\lambda, t\}\}) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ \mathfrak{D} & \longmapsto & \psi \end{array}$$

が存在する.

性質 : ペア $(\mathfrak{D}, \psi)$ は次をみたす.

『 $h \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ が $\psi(h) = \sum_{i, j \geq -n} a_{ij} \lambda^{\frac{i}{N}} t^{\frac{j}{N}}$ とかけたとき h の $(\lambda_0, t_0) \in B \simeq \mathfrak{D}$ でとる値は

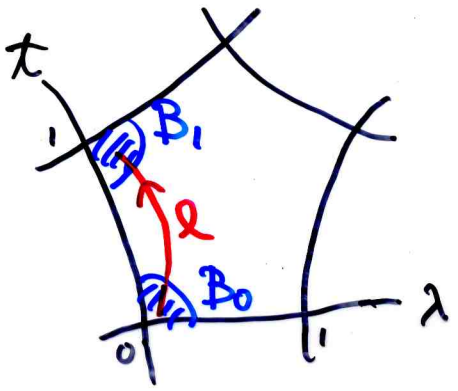
$\sum_{i, j \geq -n} a_{ij} \lambda_0^{\frac{i}{N}} t_0^{\frac{j}{N}}$ $(\lambda_0^{\frac{1}{N}}, t_0^{\frac{1}{N}} \in \mathbb{R}_+^\times)$ になっている. 』

Prop ([2] Prop 2.4)

$$\begin{tikzcd} \psi : \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \overline{\mathbb{Q}}\{\{\lambda, t\}\} \\ & M\{\{\lambda\}\} \arrow[ur] \arrow[u, phantom, "\circlearrowleft"] & \end{tikzcd}$$

$t = 0, 1, \infty$ で不分岐な $\overline{\mathbb{Q}}(t)$ 上の最大がロア拡大体

Convention



$$\ell \in \pi_1(X(\mathbb{C}) ; B_0, B_1)$$

Prop $\ell^{-1}\sigma(\ell) = f_\sigma(x_{45}, x_{34})$

$\because$ $(\ell^{-1}\sigma\ell\sigma^{-1})\psi = f_\sigma(x_{45}, x_{34})\psi$

for $\psi \in \mathrm{Hom}_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)}(\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y), \overline{\mathbb{Q}}\{\{\lambda, t\}\})$

が $F : Y \longrightarrow X \in \mathrm{Et}/X$ に対して成り立つことを示せば充分.

$h \in \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y)$ をとる.

h に適当に $\lambda, t, 1-t$ をかけることにより h は

$\lambda=0$, $t=0,1$ の引戻しの因子上で正則としておく.

$$\psi(h) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \lambda^{\frac{i}{N}} t^{\frac{j}{N}}$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{a_i(t)}_{M} \lambda^{\frac{i}{N}}$$. これより

$$(\ell\psi)(h) = \sum_{i=0}^{\infty} P(a_i) \lambda^{\frac{i}{N}}$$

$$(\sigma \ell \sigma^{-1})(\psi)(h) = \sum_{i=0}^{\infty} (\sigma P \sigma^{-1})(a_i) \lambda^{\frac{i}{N}}$$

$$(\ell^{-1}\sigma(\ell))(\psi)(h) = \sum_{i=0}^{\infty} f_\sigma(a_i) \lambda^{\frac{i}{N}}$$. //

<u>Th5</u> ((5-cycle relation))

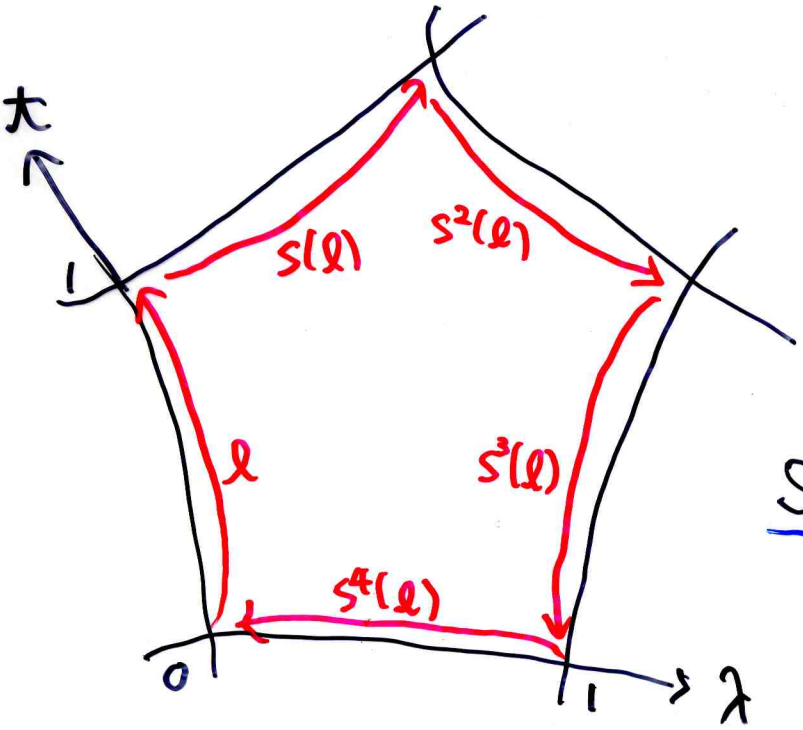
$$f_\sigma(x_{12}, x_{23}) f_\sigma(x_{34}, x_{45}) f_\sigma(x_{51}, x_{12}) f_\sigma(x_{23}, x_{34})$$

$$f_\sigma(x_{45}, x_{51}) = 1 \quad \text{in } \widehat{P}_5^*$$

∵ $X \longrightarrow X$ で誘導される π_1 間の射

$(\lambda, t) \longmapsto \left(\frac{1-t}{1-\lambda t}, \lambda\right)$

を s とする。



$$s^4(\ell)s^3(\ell)s^2(\ell)s(\ell)\ell = 1$$

が成り立っている.

これにσを作用させ $\ell^{-1}\sigma(\ell) = f_\sigma(x_{45}, x_{34})$

を用いると 5-cycle relation が出る。

Th $G_{\mathbb{Q}} \subseteq \widehat{GT} \subset \mathrm{Aut}\,\hat{F}_2$

∵ Th1〜5 より出る.

Open Problem $G_{\mathbb{Q}} = \widehat{GT}$ かどうか?