担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

# 行列とその演算

実施日：April 19, 2024

## 行列の定義

**定義 1.**

(i) $m, n \geq 1$ を整数とする．縦に $m$ 行, 横に $n$ 列の実数 (または複素数) を下のように並べたものを $m \times n$ **行列**とよぶ．

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij}$ のことを行列 $A$ の $(i, j)$-**成分**とよぶ．また, 成分を用いて行列を

$$A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$$

と書くこともある．

(ii) $m \times n$ 行列 $A$ の, 上から $i$ 番目の横向きの数の並び

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \qquad (1 \leq i \leq m)$$

を $A$ の**第 $i$ 行**と呼ぶ．また, $A$ の左から $j$ 番目の縦向きの数の並び

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \qquad (1 \leq j \leq n)$$

を $A$ の**第 $j$ 列**と呼ぶ．

(iii) 列と行の数が等しい行列 ($n \times n$ 行列) を $n$ **次正方行列**という．

**補足 1.**

(a) 高校では, ベクトルを $(a_1, \ldots, a_n)$ のように横に並べて書いていたが, 大学では上のように縦に並べることもある．これらを区別するために, 横向きのベクトルを**行ベクトル**（もしくは横ベクトル）, 縦向きのベクトルを**列ベクトル**（もしくは縦ベクトル）と呼ぶ．

(b) 成分 $a_{ij}$ が全て実数である行列を**実行列**と呼び, 複素数成分を持つ行列を**複素行列**と呼んで区別することもある．この演習では両者を特に区別せず, まとめて単に行列と呼ぶことにする．

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

## 行列の演算

今日は主に $2\times 2$ (または $3\times 3$) の正方行列に関する演算に慣れることを目標とする. (以下に述べる様々な性質の多くは, 一般の $n\times n$ 行列に対しても成り立つ.)

**定義 2.** $2\times 2$ 行列 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}$ が与えられたとする.

(i) 行列 $A$ と $B$ の**和** $A+B$ を次で定める:

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22}\end{pmatrix}$$

成分表示で書くと, $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ となる.

(ii) 行列 $A$ と $B$ の**積** $AB$ を次で定める:

$$AB=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$$

成分表示で書くと, $AB=\left(\sum_{k=1}^{2} a_{ik}b_{kj}\right)_{1\le i,j\le 2}$ となる.

(iii) 行列 $A$ の**定数倍** $cA$ $(c\in\mathbb{R})$ を次で定める:

$$cA=\begin{pmatrix} ca_{11} & ca_{12} \\ ca_{21} & ca_{22}\end{pmatrix}$$

成分表示で書くと, $cA=(ca_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ となる.

**補足 2.**

(a) 2 つの行列 $A$, $B$ の和 $A+B$ は $A$, $B$ の行の数と列の数がそれぞれ等しいときにのみ定義される.

(b) 横ベクトルと縦ベクトルの積（つまり $1\times 2$ 行列と $2\times 1$ 行列の積）は,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2\end{pmatrix}=a_1b_1+a_2b_2$$

と定める. (これは計算規則なので暗記すること.) 行列の積は, このベクトルの積を縦と横に並べたものだと覚えれば良い. 覚えやすくするために色をつけると

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{pmatrix}$$

(c) 一般に, $A=(a_{ij})_{1\le i\le m,1\le j\le k}$ を $m\times k$ 行列, $B=(b_{ij})_{1\le i\le k,1\le j\le n}$ を $k\times n$ 行列とすると, それらの積は $AB=\left(\sum_{\ell=1}^{k} a_{i\ell}b_{\ell j}\right)_{1\le i\le m,1\le j\le n}$ という $m\times n$ 行列で与えられる.

担当教員：山口 航平　研究室：A210 E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

行列 $A$ の列の数と, 行列 $B$ の行の数が一致した場合にのみ積は定義される. 例えば, $3\times 2$ 行列と $2\times 1$ 行列の積は次のようになる.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} \\ a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21} \end{pmatrix}$$

(d) 全ての成分が 0 であるような行列を**零行列**と呼ぶ. $m\times n$ の零行列を $O_{m,n}$ と書くと（添え字 $m, n$ を付けずに, 単に $O$ と書くこともある）, 任意の $m\times n$ の行列 $A$ について $O_{m,n}+A=A+O_{m,n}=A$ が成り立つ. (この性質から, 零行列は「行列の世界における数字の 0」と考えられる.)

(e) $n$ 次の正方行列で, $(1,1)$-成分, ..., $(n,n)$-成分が全て 1, 他の成分が 0 である行列

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

を $n$ 次の**単位行列**と呼ぶ. 任意の $n$ 次正方行列 $A$ について $AI_n = I_nA = A$ が成り立つ. (この性質から, 単位行列は「行列の世界における数字の 1」と考えられる.)

(f) 行列の積に対して, 分配則・結合則が成り立つ. つまり, 行列 $A, B, C$ に対して,

$$\begin{array}{ll} \text{分配則} & A(B+C)=AB+AC \\ \text{結合則} & (AB)C=A(BC) \end{array}$$

が成立する. （ただし, 場合に応じて積 $AB$ や $AC$, $BC$ などが定義されている場合に限る.） $2\times 2$ 行列の場合を問 6 で確認する.

(g) 一般に, 行列の積は交換しない. (すなわち, $AB\neq BA$ となることがある. 問 1 参照.)

**問題 1.** 以下の行列 $A$, $B$ に対して積 $AB$, 及び $BA$ を計算し, 積が交換しないことを確かめよ.

(1)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 2.** $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ とする．$k \geq 1$ に対し，等式

$$A^k = \overbrace{AA\cdots A}^{k} = \begin{pmatrix} a^k & 0 \\ 0 & b^k \end{pmatrix}$$

が成り立つことを示せ．

**補足 3.** 問題 2 の行列 $A$ や単位行列のように，対角線上の $(i,i)$-成分以外が全て 0 であるような正方行列を**対角行列**と呼ぶ．2 つの対角行列の積は必ず交換する (各自確かめよ)．

### 正則行列, 逆行列

**定義 3.** $A$ を $n$ 次正方行列とする．

(i) ある $n$ 次正方行列 $X$ が存在して，

$$AX = XA = I_n$$

が成り立つならば，$A$ は $n$ 次 **正則行列** と呼ばれる．

(ii) 上の条件を満たす $X$ を正則行列 $A$ の**逆行列**と呼び，$X = A^{-1}$ と表す．

**補足 4.**

(a) 単位行列が行列の世界における数字の 1 だったので，正則行列とは行列の世界で逆数をとることができる行列である．数字の世界では 0 でなければ逆数を持つが，行列の世界では (次の例題で見るのように) 零行列でないが正則でない行列が存在する．

(b) $A$ が正則な正方行列であるとき，逆行列 $A^{-1}$ も正則行列で，$(A^{-1})^{-1} = A$ であることが，逆行列の定義から従う．

**例題 1.** 次の行列 $A$ は正則かどうか判定せよ．また，もし正則なら，逆行列 $A^{-1}$ を求めよ．

(1) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$　　(2) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

**【解答】**

(1) 正則である．$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ とおく．$AX = I_2$ の各成分について左辺と右辺を比べることにより，4 つの等式が得られる．これらの等式を連立して解くことにより，$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ を得る．この $X$ は $XA = I_2$ も満たすので（各自，確認してみよう），$A$ の逆行列 $A^{-1} = X$ が存在する．　□

担当教員：山口 航平　研究室：A210　E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

(2) 正則でない.
もし逆行列 $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$ が存在したとすると, $AX = \begin{pmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} \\ x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} \end{pmatrix}$ であるが, これは $x_{11}, \dots, x_{22}$ をどのように選んでも単位行列 $I_2$ になりえない. □

**例題 2.** $A$ を正則行列とする. $A$ の逆行列は存在すれば, ただ一つであることを示せ.

**【解答】** $AX = XA = I_n$ および $AY = YA = I_n$ を満たす行列 $X, Y$ が存在したとすると,

$$Y = YI_n = YAX = I_nX = X$$

となるので $Y = X$ である. つまり, $A$ の逆行列が存在したとすればただ一つである.
(このように, ただ 1 つであることを示すためには, 「条件を満たすのものが複数あったとしたら, それらは等しい」ということを示すのが定石である.) □

**問題 3.** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を 2 次の正方行列で, $ad - bc \neq 0$ を満たすものとする. このとき, $A$ は正則行列で, 逆行列が

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

で与えられることを示せ.

**問題 4.** $A, B$ をともに $n$ 次の正則行列とする. このとき, 積 $AB$ も正則行列で, $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ であることを示せ.

**問題 5.** $A$ を $n$ 次正方行列で, 「ある正の整数 $k$ が存在して, $A^k = O$ となる」という条件を満たすものとする. このとき, $I_n - A$ は正則行列であることを示せ.

**補足 5.** ある正の整数 $k$ があって, $A^k = O$ となる正方行列 $A$ を**冪零行列**という. 例えば

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

は冪零行列である. 実際, 計算してみると, $A^3 = O$ となる.

**問題 6.** $2 \times 2$ の行列 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ を考える. このとき分配則

$$A(B + C) = AB + AC$$

と結合則

$$A(BC) = (AB)C$$

が成立することを, 行列の和と積の定義に従って（定義 2 参照）計算することで確かめよ.

担当教員：山口 航平　研究室：A210 E-mail:yamaguchi.kohei@math.nagoya-u.ac.jp

**問題 7.** $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ を次の行列とする (これらは **Pauli のスピン行列**と呼ばれる).

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

ただし, $i = \sqrt{-1}$ は複素数単位である. 次を示せ.

(1) $\sigma_x^2 = \sigma_y^2 = \sigma_z^2 = I_2$.

(2) $\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x = O,\ \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_y = O,\ \sigma_z\sigma_x + \sigma_x\sigma_z = O$.

(3) $\sigma_x\sigma_y - \sigma_y\sigma_x = 2i\sigma_z,\ \sigma_y\sigma_z - \sigma_z\sigma_y = 2i\sigma_x,\ \sigma_z\sigma_x - \sigma_x\sigma_z = 2i\sigma_y$.

ただし, $O = O_{2,2}$ は $2 \times 2$ の零行列である.

**問題 8.**

(1) 3 次正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ が正則行列となるために $a, b, c$ が満たすべき必要十分条件を求めよ. また, $A$ が正則であるような $a, b, c$ に対し, 逆行列 $A^{-1}$ を求めよ.

(2) $a$ を実数として $A = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ とおく. 正の整数 $k$ に対して, $A^k$ を求めよ.