定期試験の対策問題集

ver. 2023.07.20
担当: 山口航平
kohei.yamaguchi.28 [at] gmail.com
https://www.math.nagoya-u.ac.jp/~d20003j/lin_alg1.html

問 1. 以下の連立 1 次方程式を解け.

$$(1).\ \begin{cases} x-y+z=1 \\ 4x-2y+z=-6 \\ 9x+3y+z=9 \end{cases} \qquad (2).\ \begin{cases} x+y+z=0 \\ 3x+y+4z=4 \\ x-y+2z=3 \end{cases}$$

$$(3).\ \begin{cases} x-2y+z-w=0 \\ 2x-y+w=0 \\ 3x+5z-2w=0 \end{cases} \qquad (4).\ \begin{cases} x-3y-z+2w=3 \\ -x+3y+2z-2w=1 \\ -x+3y+4z-2w=9 \\ 2x-6y-5z+4w=-6 \end{cases}$$

問 2. 以下の行列式を計算せよ.

$$(1).\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (2).\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} \qquad (3).\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \qquad (4).\ \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

問 3 (発展)**.** (1) 次の等式を証明せよ.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) 対角成分より左下の成分がすべて零の行列式は対角成分の積になることを示せ. つまり

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

を証明せよ.

問 4 (発展)**.** 次の行列式が 0 となる条件を求めよ.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$$