問 1. 以下の連立 1 次方程式を解け. (各 10点)

(1). $\begin{cases} -x+y+z=2 \\ x-y+z=0 \\ x+y-z=4 \end{cases}$ (2). $\begin{cases} x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+4z=0 \end{cases}$ (3). $\begin{cases} x-3y-z+2w=3 \\ -x+3y+2z-2w=1 \\ -x+3y+4z-2w=9 \\ 2x-6y-5z+4w=-6 \end{cases}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[③+①]{②+①} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②\leftrightarrow③]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[③\times\frac{1}{2}]{②\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[①+②\times(-1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[①+③\times(-1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[①\times(-1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} //$$

(2) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{② + ① \times (-2)} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[① + ② \times 2]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[② \times (-1)]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

$x \quad y \quad z$

$z = C$ (任意定数)

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = C \\ y = -2C \\ z = C \end{cases} \Longleftrightarrow \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ //

(3)

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 4 & -2 & 9 \\ 2 & -6 & -5 & 4 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow[④ + ① \times (-2)]{\substack{② + ① \\ ③ + ①}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -12 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[\substack{③ \times \frac{1}{3} \\ ④ \times (-\frac{1}{3})}]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{③ + ② \times (-1) \\ ④ + ② \times (-1)}]{① + ②} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$x \quad y \quad z \quad w$

$y = s$, $w = t$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = 3s - 2t + 7 \\ y = s \\ z = 4 \\ w = t \end{cases} \Longleftrightarrow \therefore \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} //$$

(s, t は任意定数)

問 2. 以下の行列式を計算せよ. (各10点)

$$(1).\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} \qquad (2).\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 12 & 4 \end{vmatrix} \qquad (3).\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad (4).\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 1\cdot 5 - 3\cdot(-1) = 5 + 3 = 8 //$

(2) $\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 6 & 12 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2\cdot 3 & 2\cdot 6 & 2\cdot 2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}$

$\overline{\overline{③+①\times(-1)}} \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 //$

(3) $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \overline{\overline{①\leftrightarrow③}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overline{\overline{②+①\times(-2)}} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{vmatrix}$

$$= -1\,(2\cdot(-3) - 1\cdot 3) = -(-6-3) = 9 \text{ //}$$

(1,1) 成分で
余因子展開

(4)

$$\begin{vmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 8 & 5 & 2 \end{vmatrix} \underset{}{\overset{\triangle1 \leftrightarrow \triangle3}{=\!=}} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{②+①\times(-1) \\ ③+①\times(-2)}}{=\!=} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -(-1\cdot 2 - (-2)\cdot(-1))$$

$$= -(-2-2) = 4 \text{ //}$$

$$\begin{vmatrix} 6 & 12 & 4 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 8 & 5 & 2 \end{vmatrix}$$

問 3 (発展). (1) 次の等式を証明せよ. (10点)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(2) 対角成分より左下の成分がすべて零の行列式は対角成分の積になることを示せ. つまり

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots 0 & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn} \quad \cdots (*)$$

を証明せよ. (10点)

(1) 第14回目の講義ノートの定理2. を参照せよ

(2) 行列式のサイズ n に関する帰納法により示す.

(I) $n=1$ のとき $|a_{11}| = a_{11}$ より明らか.

(II) $n=k$ のとき $(*)$ が成り立っていると仮定する.

$n=k+1$ のときを考える

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1(k+1)} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ 0 & 0 & a_{33} \cdots & a_{3(k+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 \cdots & 0 & a_{(k+1)(k+1)} \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{(1)より}}{=} \quad a_{11} \underbrace{\left.\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2(k+1)} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3(k+1)} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_{(k+1)(k+1)} \end{vmatrix}\right\} k}_{k}$$

$$\underset{\text{仮定より}}{=} \quad a_{11}\left(a_{22}a_{33}\cdots a_{(k+1)(k+1)}\right)$$

$$= \quad a_{11}a_{22}\cdots a_{(k+1)(k+1)}$$

よって $n=k+1$ のときも (*) は正しい.

以上 (I), (II) より (*) はすべての自然数 n について成立つ ∎

問 4 (発展)**.** 次の行列式が 0 となる条件を求めよ. (10点)

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} \underset{③+①\times(-1)}{\overset{②+①\times(-1)}{=\!=}} \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & b-a & b^2-a^2 \\ 0 & c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\text{問3の(1)}}{=\!=} \begin{vmatrix} b-a & b^2-a^2 \\ c-a & c^2-a^2 \end{vmatrix}$$

$$= (b-a)(c^2-a^2) - (b^2-a^2)(c-a)$$

$$= (b-a)(c+a)(c-a) - (b-a)(b+a)(c-a)$$

$$= (b-a)(c-a)\left((c+a)-(b+a)\right)$$

$$= (b-a)(c-a)(c-b) = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $b-a=0$ または $c-a=0$ または $c-b=0$

$\therefore$ $b=a$ または $c=a$ または $c=b$ //