各5点

問 1. とある実験のデータ $x=(1,3,3,3,4,4,5,7,9,11)$ について以下に答えよ.

(1) データ x の最大値 x_{max}, 最小値 x_{min}, 中央値 q_M, 上側四分位点 q_U, 下側四分位点 q_L を求めよ.

(2) データ x の箱ひげ図を作成せよ.

(3) データ x に, はずれ値があるか否かを答えよ. また, はずれ値あればそれを具体的に答えよ.

(4) データ x の平均 $\overline{x}$ と不偏標本分散 σ_x^2 を計算せよ. 但し, 少数第一位を四捨五入して答えること.

(1)
- $x_{max} = 11$
- $x_{min} = 1$
- $q_M = (4+4)\times\frac{1}{2} = 4$
- $q_U = (7+9)\times\frac{1}{2} = 8$
- $q_L = (3+3)\times\frac{1}{2} = 3$ //

(2)

//

(3) $IQR = q_U - q_L = 8 - 3 = 5$

$\rightsquigarrow$ ・$q_U + 5 = 13$

・$q_L - 5 = -2$

(したがって はずれ値は ない.

(4)

x	$x-\bar{x}$	$(x-\bar{x})^2$
1	−4	16
3	−2	4
3	−2	4
3	−2	4
4	−1	1
4	−1	1
5	0	0
7	2	4
9	4	16
11	6	36
Σ 50		86

$$\bar{x} = \frac{50}{10} = 5$$

$$\sigma_x^2 = \frac{86}{9} = 9.555\cdots \fallingdotseq 9.6$$

//

各5点.

問 2. 偏りのないサイコロ (目は 1〜6) をひとつ投げて, 出た目を記録する実験を行う. 1 または 3 の目が出る事象を A, 偶数の目が出る事象を B, 奇数の目が出る事象を C とする. 以下に答えよ.

(1) この実験の標本空間 S を明記せよ.

(2) $P(A)$, $P(B)$, $P(C)$ を計算せよ.

(3) A の余事象 A^c の確率を求めよ.

(4) $P(A \cap B), P(B \cap C), P(A \cup C)$ を計算せよ.

(5) 事象 A と事象 B は排反か否かを説明付きで答えよ.

(1) $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

(2) $A = \{1, 3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $C = \{1, 3, 5\} \subset S$

$$\begin{cases} P(A) = \dfrac{\#A}{6} = \dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3} \\ P(B) = \dfrac{\#B}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \\ P(C) = \dfrac{\#C}{6} = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$ //

(3) $P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{3}$ //

(4) $A \cap B = \emptyset$, $B \cap C = \emptyset$,

$A \cup C = \{1, 3, 5\} = C$

$\rightsquigarrow$ $P(A \cap B) = 0$, $P(B \cap C) = 0$

$P(A \cup C) = P(C) = \dfrac{1}{2}$ //

(5) AとBは排反である
なぜなら $A \cap B = \phi$ だから.

問 3. ネジの製造工場において, 製造されたネジが“細すぎる”事象を A, “短すぎる”事象を B, “長すぎる”事象を C とする. $P(A) = 0.2$, $P(B) = 0.5$, $P(C) = 0.3$ とする. また“細すぎる”ネジがまた“短すぎる”ネジでもある条件付き確率 $P(B|A) = 0.3$, “細すぎる”ネジがまた“長すぎる”ネジでもある条件付き確率 $P(C|A) = 0.3$. 以下に答えよ.

(1) $P(A \cap B)$ と $P(A \cap C)$ を求めよ.

(2) 事象 A と事象 B は独立か否かを説明付きで答えよ.

(3) 事象 A と事象 C は独立か否かを説明付きで答えよ.

各7点.

(1) $P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = 0.2 \times 0.3$
$= 0.06$

$P(A \cap C) = P(A)P(C|A) = 0.2 \times 0.3$
$= 0.06$

(2) $P(A)P(B) = 0.2 \times 0.5 = 0.1$ より
(1) から $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ である.
したがって AとBは独立でない.

(3) $P(A)P(C) = 0.2 \times 0.3 = 0.06$ より
(1) から $P(A \cap C) = P(A)P(C)$ である.
したがって AとCは独立である

各7点

問 4. サイコロ 1 つを投げて出た目を記録する実験を行う．ただし用いるサイコロは偏っていて 1,2,3,4,5 の目が出る確率は 1/7 であり 6 の目が出る確率は 2/7 である。確率変数 X をサイコロの出た目とする．

(1). 確率変数 X の分布関数の $F(x)$ のグラフをかけ．

(2). 確率変数 X の確率関数の $f(x)$ のグラフをかけ．

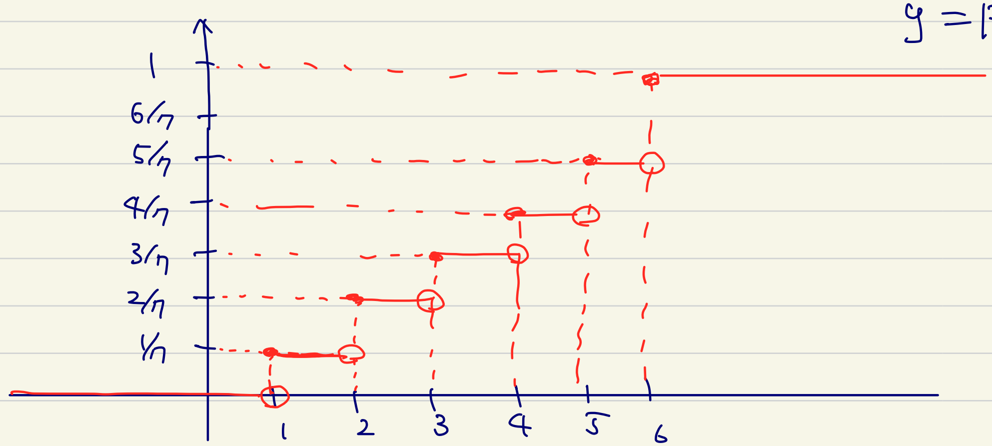
問 5 (発展)．標本空間 S の事象 A, B, C について，

(1) i の目が出る確率を p_i とかく．

$p_1 = 1/7,\ p_2 = 1/7,\ p_3 = 1/7,\ p_4 = 1/7,\ p_5 = 1/7,\ p_6 = 2/7$

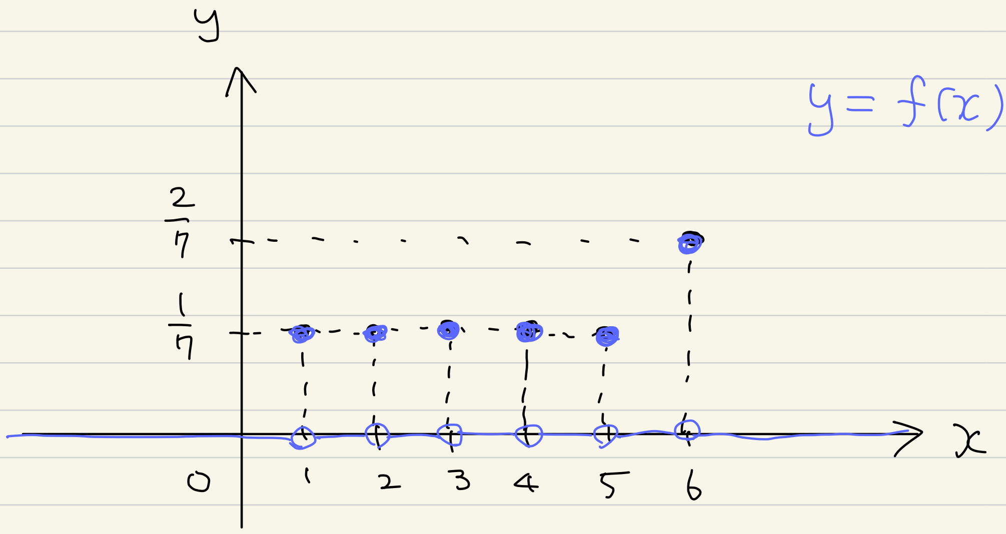
$$F(x) = P(X \leqq x) = \begin{cases} 0 & (x < 1) \\ p_1 = 1/7 & (1 \leqq x < 2) \\ p_1 + p_2 = 2/7 & (2 \leqq x < 3) \\ p_1 + p_2 + p_3 = 3/7 & (3 \leqq x < 4) \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 4/7 & (4 \leqq x < 5) \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 5/7 & (5 \leqq x < 6) \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 & (6 \leqq x) \end{cases}$$

$y = F(x)$



//

(2) $f(x) = \begin{cases} p_i & (x = i,\ i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$



//

各5点

問 5 (発展)**.** 標本空間 S の事象 A, B, C について.

(1) 事象 A, B, C が互いに排反ならば $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ が成り立つことを証明せよ.

(2) 空集合 $\emptyset \subset S$ に対して $P(\emptyset) = 0$ となることを証明せよ.

$\Big\{ \frac{3}{4}(1 - x^2) \quad (-1 \le x \le 1)$

(1) $D := B \cup C$ とおく. A, B, C は互いに排反なので $A \cap D = \phi$ である.

$P(A \cup B \cup C) = P(A \cup D) = P(A) + P(D)$

$= P(A) + P(B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ //

$B \cap C = \phi$

(2) $S^c = \phi$ であり $\underset{\underset{S^c}{\parallel}}{S \cap \phi} = \phi$ である.

テーギ(2) テーギ(3)

$1 = P(S) = P(S \cup S^c) = P(S) + P(S^c)$

$= 1 + P(\phi)$

$\therefore \quad P(\phi) = 0$ //

各5点

問 6 (発展). 連続型確率変数 X の確率関数 $f(x)$ は $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$ で与えられている. 以下に答えよ.

(1). X の分布関数を求めよ.

(2). 確率 $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$ を求めよ.

(1) $-1 \leqq x \leqq 1$ のとき

$F(x) = F(X \leqq x) = \int_{-\infty}^{x} f(v)\,dv$

$= \int_{-\infty}^{-1} \underbrace{f(v)}_{=0} dv + \int_{-1}^{x} f(v)\,dv$

$= \int_{-1}^{x} \frac{3}{4}(1-v^2)\,dv = \frac{3}{4}\int_{-1}^{x}(1-v^2)\,dv$

$$= \frac{3}{4}\left[v - \frac{v^3}{3}\right]_{-1}^{x} = \frac{3}{4}\left(x - \frac{x^3}{3} - \left(-1 + \frac{1}{3}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$$

$$\therefore\ F(x) = \begin{cases} 0 & (x < -1) \\ -\frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{4}x + \frac{1}{2} & (-1 \leqq x \leqq 1) \\ 1 & (x > 1) \end{cases}$$

//

(2) $P\left(-\frac{1}{2} \leqq X \leqq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right)$

$$\underset{(1)}{=} -\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{4}\frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$- \left(-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{32} + \frac{3}{8} - \frac{1}{32} + \frac{3}{8}$$

$$= \frac{11}{16}$$

//