

データサイエンス基礎数理 定期試験

実施日時: 2023.07.27 13:10-14:30 (80 分間)

定義 1. 標本空間 S が与えられたとき, S の任意の事象 A に対して次の 3 つの公理を満たすようなある実数 $P(A)$ が対応する. これを A の確率という.

- (1) S の任意の事象 A に対して $0 \leq P(A) \leq 1$.
- (2) $P(S) = 1$.
- (3) 互いに排反な事象 A, B に対して, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

問 1. とある実験のデータ $x = (1, 3, 3, 3, 4, 4, 5, 7, 9, 11)$ について以下に答えよ.

- (1) データ x の最大値 x_{max} , 最小値 x_{min} , 中央値 q_M , 上側四分位点 q_U , 下側四分位点 q_L を求めよ.
- (2) データ x の箱ひげ図を作成せよ.
- (3) データ x に, はずれ値があるか否かを答えよ. また, はずれ値あればそれを具体的に答えよ.
- (4) データ x の平均 \bar{x} と不偏標本分散 σ_x^2 を計算せよ. 但し, 少数第一位を四捨五入して答えること.

問 2. 偏りのないサイコロ (目は 1~6) をひとつ投げて, 出た目を記録する実験を行う. 1 または 3 の目が出る事象を A , 偶数の目が出る事象を B , 奇数の目が出る事象を C とする. 以下に答えよ.

- (1) この実験の標本空間 S を明記せよ.
- (2) $P(A), P(B), P(C)$ を計算せよ.
- (3) A の余事象 A^c の確率を求めよ.
- (4) $P(A \cap B), P(B \cap C), P(A \cup C)$ を計算せよ.
- (5) 事象 A と事象 B は排反か否かを説明付きで答えよ.

問 3. ネジの製造工場において, 製造されたネジが“細すぎる”事象を A , “短すぎる”事象を B , “長すぎる”事象を C とする. $P(A) = 0.2, P(B) = 0.5, P(C) = 0.3$ とする. また“細すぎる”ネジがまた“短すぎる”ネジでもある条件付き確率 $P(B|A) = 0.3$, “細すぎる”ネジがまた“長すぎる”ネジでもある条件付き確率 $P(C|A) = 0.3$. 以下に答えよ.

- (1) $P(A \cap B)$ と $P(A \cap C)$ を求めよ.
- (2) 事象 A と事象 B は独立か否かを説明付きで答えよ.
- (3) 事象 A と事象 C は独立か否かを説明付きで答えよ.

問 4. サイコロ 1 つを投げて出た目を記録する実験を行う. ただし用いるサイコロは偏っていて 1,2,3,4,5 の目が出る確率は $1/7$ であり 6 の目が出る確率は $2/7$ である. 確率変数 X をサイコロの出た目とする.

- (1). 確率変数 X の分布関数 $F(x)$ のグラフをかけ.
- (2). 確率変数 X の確率関数 $f(x)$ のグラフをかけ.

問 5 (発展). 標本空間 S の事象 A, B, C について.

- (1) 事象 A, B, C が互いに排反ならば $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C)$ が成り立つことを証明せよ.
- (2) 空集合 $\emptyset \subset S$ に対して $P(\emptyset) = 0$ となることを証明せよ.

問 6 (発展). 連続型確率変数 X の確率関数 $f(x)$ は $f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4}(1-x^2) & (-1 \leq x \leq 1) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$ で与えられている. 以下に答えよ.

- (1). X の分布関数 $F(x)$ を求めよ.
- (2). 確率 $P(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2})$ を求めよ.