2023年6月1日

## ◎ 逆行列の計算

$$A \longleftrightarrow f_A(x) = Ax$$

$$A^{-1} \longleftrightarrow f_{A^{-1}}(x) = A^{-1}x$$

$A$ の逆行列 $(AA^{-1} = A^{-1}A = E)$

$f_A$ の逆写像 $(f_A \circ f_{A^{-1}} = f_{A^{-1}} \circ f_A = Id)$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases} \longleftrightarrow \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}}_{y}$$

逆に解く　　　　両辺に $A^{-1}$ をかける

$$\begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + \cdots + b_{1n}y_n \\ \quad \cdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases} \longleftrightarrow x = A^{-1}y$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix} = A^{-1}$$

以下，$A^{-1}$ の具体的な計算方法を記す．

(三次定形)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = y_1 \\ \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = y_n \end{cases}$$

単位行列

$$\Longleftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}}_{=A} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

前回の行基本変形を両辺に施す.

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}}_{=A^{-1}} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = b_{11}y_1 + \cdots + b_{1n}y_n \\ \quad \cdots \\ x_n = b_{n1}y_1 + \cdots + b_{nn}y_n \end{cases}$$

以上を以下のように記す.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{変形}]{\text{行基本}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & 0 & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ & \ddots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & & 1 & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{array}\right)$$

例 $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

答 $\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[②\times 2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 14 & 8 & 0 & 2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[②+①\times(-7)]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[①+②\times(-1)]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & 8 & -2 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \end{array}\right)$

$\xrightarrow[①\div 2]{} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & -7 & 2 \end{array}\right)$ $\therefore \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

例 $\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ の逆行列を求めよ.

$\therefore \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 3 \end{pmatrix}$