《行列と連立1次方程式》

中学校で習ったような連立1次方程式（決定系）

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n} = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn} = b_n \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} x_1 = c_1 \\ x_2 = c_2 \\ \vdots \\ x_n = c_n \end{cases}$$

（Gaussの）消去法で解ける

(1) ある方程式の両辺から共通因子を取る
(2) ある方程式の何倍かを他の方程式に足す(引く)
(3) 2つの方程式の書く順番を上下に入れかえる

ⓘ ← i行目の方程式を表す。
（行列のi行を表す）

Ex.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 2 \end{cases} \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{②-①\times 2 \\ ③-①}]{} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \end{cases} \qquad \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[②\leftrightarrow③]{} \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = -1 \\ x_2 + 2x_3 = 3 \\ x_3 = 1 \end{cases} \qquad \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\substack{①+③ \\ ②-③\times 2}]{} \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[①-②\times 2]{} \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 1 \\ x_3 = 1 \end{cases} \quad \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$ に対して

行列 $\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right)$ を係数拡大行列

という。Ex の連立1次方程式は係数拡大行列に対して"行基本変形"を行って解いた.

Def.（行基本変形）

行列 A の行基本変形とは以下の操作をいう.

(1) A の第 i 行をスカラー λ 倍する. ($\lambda \neq 0$)　ⓘ$\times\lambda$

(2) A の第 i 行を第 j 行に加える　ⓘ$+$ⓙ

(3) A の第 i 行と第 j 行を交換する.　ⓘ$\longleftrightarrow$ⓙ

行基本変形の本質的な理解はあとまわし
とにかく行列の行基本変形になれよう!

演習

(1)
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 = -6 \end{cases}$$

(2)
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 4 \end{cases}$$

(3)
$$\begin{cases} x_2 + 2x_3 = 7 \\ -2x_1 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 - 3x_3 = -12 \end{cases}$$