第5回　行列 $\longleftrightarrow$ 線形写像

$A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \longleftrightarrow f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$

ここを説明する.

第6回　行列と連立一次方程式 ①

第7回　行列と連立一次方程式 ②

第8回　中間テスト

第9回　行列と連立一次方程式 ③

第10回　行列式

⋮

Def

$(1\times n)$ 行列のことを行ベクトル,
$(n\times 1)$ 行列のことを列ベクトルという

$(a_1, a_2, \cdots, a_n)$: 行ベクトル

$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$: 列ベクトル

Def

$n\in\mathbb{N}$ に対して n 次元ベクトル空間を

$$\mathbb{R}^n := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \ x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R} \right\}$$

とかく.

$$\underbrace{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \cdots, \ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n}_{\text{標準ベクトルという}}$$

Rem

すべてのベクトル $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ は

$e_1, \dots, e_n$ の線形結合でかける.

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= x_1 e_1 + x_2 e_2 + \cdots + x_n e_n \quad \blacksquare$$

Def 写像 $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ であって次の (L1) (L2) を満たすものを線形写像という

(L1) 各 $x, y \in \mathbb{R}^m$ に対して

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(L2) 各 $x \in \mathbb{R}^m$ と各 $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(c \cdot x) = c f(x) \quad \blacksquare$$

Ex.1 $f_a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f_a(x) = ax$

は線形写像である.

各 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$\begin{aligned} f(x+y) &= a.(x+y) \\ &= a \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a x_1 + a y_1 \\ a x_2 + a y_2 \end{pmatrix} \\ &= a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + a \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = f(x) + f(y) \end{aligned}$$

(L1) ok!

各 $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ と各 $c \in \mathbb{R}$ に対して

$$f(c\boldsymbol{x}) = a(c.\boldsymbol{x}) = a\begin{pmatrix} cx_1 \\ cx_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} acx_1 \\ acx_2 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \end{pmatrix}$$

$$= cf(\boldsymbol{x}).$$ (L2) ok! ☒

Rem

$a=1$ のとき　$f_a = \mathrm{Id}$: 恒等写像

$$\mathrm{Id}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \mathrm{Id}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}$$

$a=0$ のとき　f_0 : 零写像

$$f_0 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f_0(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ex. 2　$a_{ij} \in \mathbb{R}$　$(i=1,\dots,m\ ;\ j=1,\dots,n)$ に対して

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m,$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right) = \left.\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_{2n} \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_{mn} \end{pmatrix}\right\} m$$

$\iff$ $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ とすると

$f(x) = Ax$ とかける。

$\longrightarrow$ fは線形写像になる。

Prop 線形写像 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ は
Ex.2 の形のものに限る。

Pf. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$: 線形写像

示すこと : $f(x) = A_f x$ とかける
行列 $A_f \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ があること。

各 $e_j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \in \mathbb{R}^n$ $(j = 1, \cdots, n)$ に対して

$f(e_j) =: a_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$ とおく。

このとき 各 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ に対して

$$f(x) = f(x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n) \underset{(L1)}{=} f(x_1 e_1) + \cdots + f(x_n e_n)$$

Rem

$$= x_1 f(e_1) + \cdots + x_n f(e_n)$$

(L2)

$$= x_1 a_1 + \cdots + x_n a_n$$

$$= \begin{pmatrix} x_1 a_{11} \\ x_1 a_{21} \\ \vdots \\ x_1 a_{n1} \end{pmatrix} + \cdots + \begin{pmatrix} x_n a_{1n} \\ x_n a_{2n} \\ \vdots \\ x_n a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ a_{21} x_1 + \cdots + a_{2n} x_n \\ \vdots \\ a_{n1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}}_{=: A_f} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underset{M_{m,n}(\mathbb{R})}{\underset{\cap}{A_f}} \overset{\mathbb{R}^n}{\overset{\in}{x}}$$

$\rightsquigarrow$

$$M_{m,n}(\mathbb{R}) \ni A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \longleftrightarrow f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad f(x) = Ax$$

行列　　　　線形写像

単位行列

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \longleftrightarrow \mathrm{Id} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$

恒等写像

$$\mathrm{Id}(x) = x = E_2 x.$$

零行列

$$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longleftrightarrow f_0 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2,$$

零写像

$$f_0(x) = \vec{0} = O x$$

回転行列

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \longleftrightarrow r_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$

回転運動

$$r_\theta(x) = \underbrace{R_\theta x}_{\text{x を θ 回転移動したベクトル}}.$$

2つの線形写像

$f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ に対して

写像

$f \circ g : \mathbb{R}^l \longrightarrow \mathbb{R}^m$ を

$f \circ g(x) = f(g(x))$ で定義する

$$\mathbb{R}^l \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \xrightarrow{f} \mathbb{R}^m$$

$$\mathbb{R}^l \xrightarrow{f \circ g} \mathbb{R}^m$$

これを f と g の合成という.

Thm $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $g:\mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^m$ を線形写像とする.

$$\left(\begin{array}{l} f \longleftrightarrow A \in M_{m,n}(\mathbb{R}) \\ g \longleftrightarrow B \in M_{m,l}(\mathbb{R}) \end{array}\right)$$

このとき $f \circ g : \mathbb{R}^l \to \mathbb{R}^n$ に対応する行列は AB である.

pf. 各 $x \in \mathbb{R}^l$ に対して

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(Bx) \\ &= A(Bx) \\ &= (AB)(x) \quad \blacksquare\end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longleftrightarrow f_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f_A(x) = Ax$$

$(ad - bc \neq 0)$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \longleftrightarrow f_{A^{-1}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\quad f_{A^{-1}}(x) = A^{-1}x$$

(A の逆行列)

$$f_A \circ f_{A^{-1}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad (f_A \circ f_{A^{-1}})(x) = f_A(A^{-1}x)$$

$$= A(A^{-1}x)$$

$$= (AA^{-1})x$$

$$= E_2 x = x$$

$\rightsquigarrow$ $f_A \circ f_{A^{-1}} = \mathrm{Id}$

$\rightsquigarrow$ $f_{A^{-1}}$ は f_A の逆写像!