

2023年5月11日
(第4回)

⑧ 回転行列

$$f_\theta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\begin{array}{ccc} \psi & & \psi \\ x & \mapsto & x' := x \text{ を正の方向に } \theta \\ & & \text{回転移動量 } (\theta = \theta \text{ の}) \end{array}$$

このとき f_θ は 線形写像 である

よって線形写像の Def. を思い出そう

Def. 写像 $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ が 次の条件 (1), (2) を満たすとき, f を線形写像という

(1) 各 $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

(2) 各 $x \in \mathbb{R}^2$ と $c \in \mathbb{R}^2$ について

$$f(cx) = c f(x)$$



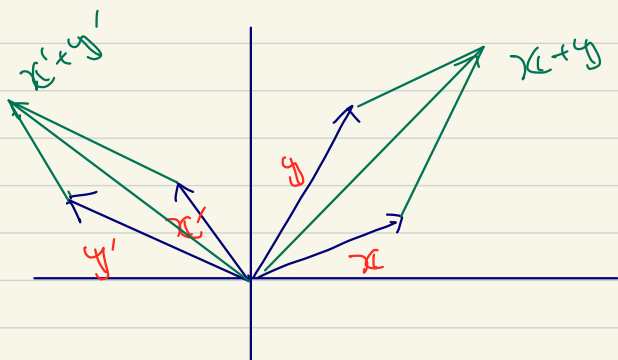
f_θ は線形写像であることがわかる。(証明は2次元
の回転に注意)

(1) 各 $x, y \in \mathbb{R}^2$ に対して

$$f_\theta(x+y) = (x+y)'$$

$$= x' + y' = f_\theta(x) + f_\theta(y)$$

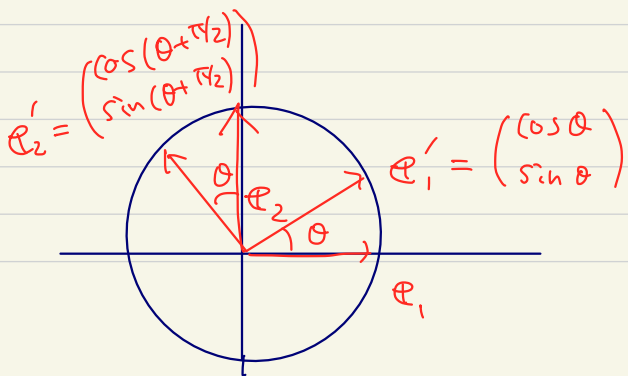
(*)



(*) のところは2次元の
よじり絵をかいた
ものが成り立つ。

(2) これは絵をかいたことがわかるので省略。

前回の授業より f_θ は線形写像なので
それに対して (2×2) 行列があるはず。



$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と可也。

$$\bullet f_{\theta}(e_1) = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\bullet f_{\theta}(e_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta + \pi/2) \\ \sin(\theta + \pi/2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow x \neq 0$$

$$f_{\theta}(x) = f_{\theta}(x_1 e_1 + x_2 e_2)$$

$$= f_{\theta}(x_1 e_1) + f_{\theta}(x_2 e_2)$$

(1)

$$\stackrel{(2)}{=} x_1 f(e_1) + x_2 f(e_2)$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



↑ 旋轉行列

④ 正則行列と逆行列

Def (逆行列)

正則行列 A に対して性質

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E \text{ (単位行列)}$$

E を満たす行列 A^{-1} を A の逆行列 とする

Rem 正則行列 A に対して
いつでも逆行列 A^{-1} が存在可能である。

Def (正則行列)

正則行列 (A) に対して逆行列 (A^{-1}) が
存在可能な行列 (A) を正則行列 (という)

Ex.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad ad - bc \neq 0$$

$$\rightsquigarrow A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

今日はこれだけ。