2023年4月27日

§.0　線型写像と行列　［第3回］

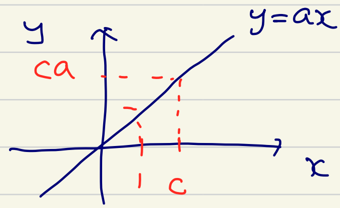
§.0.1　比例関数から線型写像へ

◎ 比例関数（中学で習った？）

$$f(x) = ax \quad \left(f(1) = a : \text{比例定数} \right)$$

x : 入力　,　$y := f(x)$: 出力

$$\left(\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & c & \longmapsto & ac \end{array} \right)$$



◎

$$f(\vec{x}) = ax_1 + bx_2$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: 入力　,　$y := f(\vec{x})$: 出力

$\vec{e}_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,　$\vec{e}_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ とすると　$\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2$ とかける

（$f(\vec{e}_1) = a$,　$f(\vec{e}_2) = b$ としている.）

$$\left(\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (\text{平面}) & & (\text{直線}) \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} & \longmapsto & ap + bq = p f(\vec{e}_1) + q f(\vec{e}_2) \end{array} \right)$$

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} \quad \text{—} (☆)$$

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$: 入力 , $\vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := f(\vec{x})$

$f(\vec{e_1}) = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$, $f(\vec{e_2}) = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ & \vec{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 \end{pmatrix} \end{array} = c_1 f(\vec{e_1}) + c_2 f(\vec{e_2})$$

② 線型写像の特徴付け

Def

f は線型写像 (linear map) $\iff \begin{cases} (1)\ f(\vec{v} + \vec{w}) = f(\vec{v}) + f(\vec{w}) \\ (2)\ f(k\vec{x}) = kf(\vec{x}) \quad (k \in \mathbb{K}) \end{cases}$

Prop. (☆)のように出力の成分が入力の成分の1次同次式で表されるような写像は線型写像になる。逆に線型写像は(☆)のようにかける。

Ex.

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ とし $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$ とする

(1) と (2) が成り立つことを確かめよ.

(1) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix}$ とする.

$$f(\vec{v} + \vec{w}) = f\left(\begin{pmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2(v_1 + w_1) \\ (v_1 + w_1) + (v_2 + w_2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2v_1 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2w_1 \\ w_1 + w_2 \end{pmatrix} = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$$

(2) $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{K}$ とする.

$$f(k\vec{v}) = f\left(\begin{pmatrix} kv_1 \\ kv_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2kv_1 \\ kv_1 + kv_2 \end{pmatrix}$$

$$= k\begin{pmatrix} 2v_1 \\ v_1 + v_2 \end{pmatrix} = kf(\vec{v})$$

$\blacksquare$

Not 1次同次式

Rem $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \end{pmatrix}$ は線型写像でない.

実際、(1)ですら一般に成り立ちません.

$$f(\vec{v} + \vec{w}) = f\left(\begin{pmatrix} v_1 + v_2 \\ w_1 + w_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} (v_1 + v_2)^2 \\ (w_1 + w_2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\neq \begin{pmatrix} v_1^2 \\ w_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_2^2 \\ w_2^2 \end{pmatrix} = f(\vec{v}) + f(\vec{w})$$

$\blacksquare$

⑩ 線型写像と行列.

$$f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix}$$

行列のかけ算.

$$= \underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}}_{\underset{A}{\shortparallel}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A\vec{x}$$

$\rightsquigarrow$ $f(\vec{x}) = A\vec{x}$ とかける　($f(x) = ax$ と比較せよ).

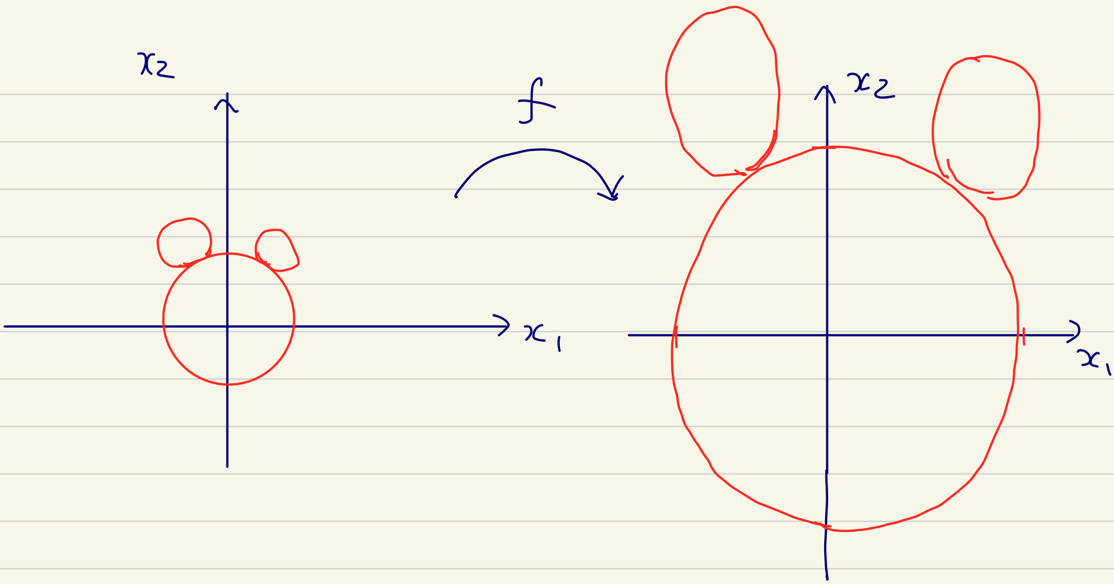
<u>Ex.1.</u> $A = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ のとき.

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \vec{x}$$

$\rightsquigarrow$ このとき f は恒等写像.

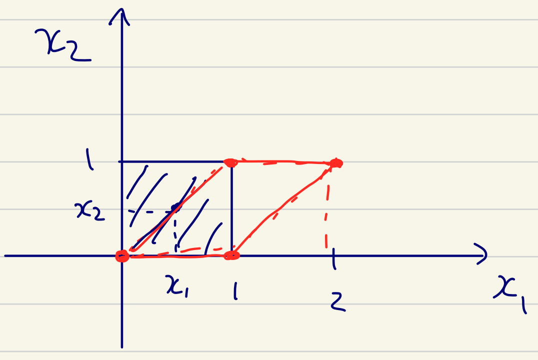
<u>Ex.2</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ のとき

$$f(\vec{x}) = A\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$$



演 $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ とし $f(\vec{x})=A\vec{x}$ とする.

このとき、以下の正方形は f によってどのようなものに写るか？



$$f(\vec{x})=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1+x_2\\x_2\end{pmatrix}$$