補足 $A=(a_{ij}),\ B=(b_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ 2023/04/20

[第2回目] L1

$A=B \ :\Longleftrightarrow\ a_{ij}=b_{ij}$ ($\forall i,j$)

§.1.3 行列の演算

- スカラー倍
- 足し算, 引き算
- かけ算 やや難

教 1.2

行列の和と差.

Def $A=(a_{ij})_{i,j},\ B=(b_{ij})_{i,j}\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ に対して 行列

$(a_{ij}+b_{ij})_{i,j}\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を A,Bの和

といい $A+B$ とかく. 同様に 行列

$(a_{ij}-b_{ij})_{i,j}\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ を A,Bの差

といい $A-B$ とかく

Ex.

- $A=\begin{bmatrix}1&3&5\\7&9&11\end{bmatrix}$ に対して $3A=\begin{bmatrix}3&9&15\\21&27&33\end{bmatrix}$

- $A=\begin{bmatrix}1&-4\\-2&5\\3&-6\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-1&4\\5&3\\-2&1\end{bmatrix}$ に対して

$A+B$ と $A-B$ を計算せよ.

Thm $A,B,C\in M_{m,n}(\mathbb{K})$ とする. このとき次が成立つ.

(1) $A+B=B+A$

(2) $(A+B)+C=A+(B+C)$

(3) $A+O_{m,n}=A$

⑩ スカラー倍

Def $A=(a_{ij})_{i,j}\in M_{n,m}(\mathbb{K})$, $k\in\mathbb{K}$ に対して

行列 $(ka_{ij})_{i,j}$ を A のスカラー倍

又は k 倍といい $\underline{kA}$ で表す

(特に -1 倍を $-A$ とかく)

Ex.

- $$(-2)\cdot\begin{bmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & -2 & -4\\ -2 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

- $$(-i)\cdot\begin{bmatrix}1 & i & 0\\ 2 & 1 & -i\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-i & -1 & 0\\ -2i & -i & 1\end{bmatrix}$$

Th'm $A,B\in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $\lambda,\mu\in\mathbb{K}$: スカラー

とする. このとき次が成り立つ.

(1) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

(2) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$

(3) $(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A)$

(4) $1.A=A$

⑪ 行列の積

Def. $A=(a_{ij})\in M_{m,n}(\mathbb{K})$, $B=(b_{ij})\in M_{n,r}(\mathbb{K})$ とする.

このとき $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

$(1\leq i\leq m,\ 1\leq j\leq r)$

を (i,j) 成分とする行列 $(c_{ij})\in M_{m,r}(\mathbb{K})$ を

AとBの積といい ABと表す.

$$AB = m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} & & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ & & & \end{bmatrix}}^{n}\right. \; n\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} \end{bmatrix}}^{r}\right. = m\left\{\overbrace{\begin{bmatrix} & & \\ & c_{ij} & \\ & & \end{bmatrix}}^{r}\right.$$

Ex.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 5 & 1 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\cdot 7 + 0\cdot 1 + 3\cdot 5 & 2\cdot 6 + 0\cdot 2 + 3\cdot 3 & 2\cdot 4 + 0\cdot 2 + 3\cdot 1 \\ 5\cdot 7 + 1\cdot 1 + 4\cdot 5 & 5\cdot 6 + 1\cdot 2 + 4\cdot 3 & 5\cdot 4 + 1\cdot 2 + 4\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29 & 21 & 11 \\ 56 & 44 & 26 \end{bmatrix}$$

Rem 行列の積 AB が Def されても積 BA が Def できるとは限らない.

Ex. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

Ex. (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = O$$

(2)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 14 & -5 \end{bmatrix}$$

(3)

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

Rem. • $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ に対して一般には
$AB = BA$ となるとは限らない。 ((2), (3) に注目せよ)

$AB = BA$ が成り立つとき A と B は可換という

• $AB = O$ だから $A = O$ または $B = O$
であるとも言えない。 ((1) に注目せよ)

$A \neq O$, $B \neq O$ かつ $AB = O$ となる
行列を零因子という。