前回の補足

一般に正方行列 A に対して

(1) $A + {}^tA$: 対称行列　　(3) $A + A^*$: エルミート行列

(2) $A - {}^tA$: 交代行列　　(4) $A - A^*$: 反エルミート行列 $\square$

Pf. (1) $B = A + {}^tA$ とおく.

$$ {}^tB = {}^t(A + {}^tA) \underset{\text{前回の Prop.}}{=} {}^tA + {}^t({}^tA) = {}^tA + A = B. $$

(2)〜(4) も同様のギロンで示せる $\square$

§3. 正則行列

$\left(\begin{array}{l} 0 \neq a \in \mathbb{R} \text{ に対して } ax = 1 \text{ を満たす } x \in \mathbb{R} \text{ を} \\ x = a^{-1} = \frac{1}{a} \text{ とかいた.} \end{array} \right)$

Def. n次正方行列 A に対し, 次を満たす n次正方行列 X が存在するとき A は正則であるという:

$$ AX = XA = E_n \quad (*) \qquad \square $$

もし上のような X があれば唯一つである.

Pf. (X の一意性)

A に対して $(*)$ を満たす行列が X, Y と2つあるとする.

$(AX = XA = E_n , \quad AY = YA = E_n)$

このとき

$$ Y = YE_n = Y(AX) = (YA)X = E_n X = X $$

となり唯一つである. $\square$

Aに対して(存在すれば)一意に定まる行列 X を
Aの逆行列といい A^{-1} とかく.

Eg. ・単位行列Eは正則.

$$EE = EE = E \qquad (E^{-1} = E)$$

・ $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ は? $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} a+3c & b+3d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} a+3c=1 \\ b+3d=0 \\ 2c=0 \\ 2d=1 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=-\frac{3}{2} \\ c=0 \\ d=\frac{1}{2} \end{cases} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

とおくと.

$AX = XA = E_2$ であるから A は正則で $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ □

・ $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ は? $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$AX = \begin{pmatrix} c & d \\ 2c & 2d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} c=1 \\ d=0 \\ 2c=0 \\ 2d=1 \end{cases} \quad ??$$

A は正則でない.

Ex. $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の逆行列は $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
であることを示せ.

Ex

2次正方行列 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ が正則である

必要十分条件を調べよ.

Pf.

$X=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}$ とする.

$$AX=E_2 \iff \begin{cases} ax+bz=1 & \cdots ① \\ ay+bw=0 & \cdots ② \\ cx+dz=0 & \cdots ③ \\ cy+dw=1 & \cdots ④ \end{cases}$$

$a\neq 0,\ c\neq 0$ とする

①$\times c$ $-$ ③$\times a$

$$\begin{array}{rl} & acx+bcz=c \\ -) & acx+adz=0 \\ \hline & (ad-bc)z=-c \end{array}$$

②$\times c$ $-$ ④$\times a$

$$\begin{array}{rl} & acy+bcw=0 \\ -) & acy+adw=a \\ \hline & (ad-bc)w=a \end{array}$$

$D:=ad-bc\neq 0$ とする.

$$\begin{cases} z=-\dfrac{c}{D} \xrightarrow{\text{①に代入}} \\ w=\dfrac{a}{D} \xrightarrow{\text{②に代入}} \end{cases}$$

$$x=\frac{1-bz}{a}=\frac{1-\frac{bc}{D}}{a}=\frac{D-bc}{aD}$$

$$=\frac{\cancel{a}d}{\cancel{a}D}=\frac{d}{D}$$

$$y=\cdots=\frac{-b}{D}$$

$X=\dfrac{1}{D}\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}$ このとき

$AX=XA=E_2$ となる

$\boxed{A \text{ が正則} \iff D:=ad-bc\neq 0}$

Thm 行列 A, B が正則ならば $A^{-1}, AB, {}^tA, \overline{A}, A^*$ はいずれも正則で逆行列は

(1) $(A^{-1})^{-1} = A$　　(2) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

(3) $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1})$　　(4) $(\overline{A})^{-1} = \overline{(A^{-1})}$

(5) $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$　　$\square$

Pf. $C = A^{-1}, AB, {}^tA, \ldots$ としたとき
$CX = XC = E$ となる行列 X があれば
逆行列の一意性より $C^{-1} = X$ となる.

(1) $X = A$ とおく. $\begin{cases} A^{-1}X = A^{-1} \cdot A = E \\ XA^{-1} = A \cdot A^{-1} = E \end{cases}$ なので

A^{-1} は正則であり $(A^{-1})^{-1} = A$ である.

(2) $X = B^{-1}A^{-1}$ とおく.

- $(AB)X = (AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$
- $X(AB) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}EB = B^{-1}B = E.$

以上から AB は正則であり $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ $\square$

以下略 $\square$